SCUOLA NORMALE SUPERIORE
Classe di Lettere
Tesi di Perfezionamento

Teoria degli insiemi, logica e filosofia nei *Collected works* di Kurt Gödel

Relatore:
Chiar.$^{\text{mo}}$ Prof. Ettore Casari

Candidato:
Marco Galvagni

Anno Accademico
2004-2005

Indice

Presentazione

A partire dal 1986, data di pubblicazione del primo volume dei *Collected works* di Kurt Gödel, l'opera di quello che può essere considerato, se non il più importante, certamente il più geniale e innovativo fra i logici del Ventesimo secolo è diventata oggetto di un crescente numero di nuove ricerche da parte di logici, matematici e filosofi.

Nel 1995 è stata pubblicata per la prima volta una parte del *Nachlass* gödeliano, principalmente articoli di interesse filosofico e divulgativo, che hanno cambiato radicalmente l'immagine tradizionalmente legata all'opera e alla filosofia della matematica di Gödel. Infine nel 2003, con la pubblicazione del quarto e del quinto volume dei *Collected works* dedicati all'epistolario gödeliano, la possibilità di rivedere e rileggere l'opera dell'autore è stata arricchita di nuovi preziosi materiali inediti.

Alla luce dello straordinario interesse sollevato dalle opere e dalle riflessioni del logico moravo, ci è sembrato sensato tentare di dare una presentazione di alcuni aspetti fondamentali dei suoi contributi logici, matematici e filosofici tenendo conto innanzitutto dell'immagine che di tali lavori è emersa dalla lettura degli inediti. Abbiamo quindi pensato di illustrare l'opera logico-matematica e fondazionale di Gödel secondo uno schema tripartito: una prima parte dedicata alla logica, una seconda sulla teoria degli insiemi ed infine un'ultima sulla filosofia della matematica.

Non si può pensare di intraprendere un lavoro anche generale su una figura complessa come quella di Gödel senza dover fare delle scelte ed inevitabilmente delle esclusioni. Il punto di partenza delle nostre ricerche è stato quello di tentare un percorso interpretativo dell'opera gödeliana che, da una parte, mettesse in risalto anche i suoi lavori "meno noti" e, dall'altra, ripercorresse innanzitutto gli aspetti ontologici e fondazionali del suo pensiero.

Per quanto riguarda questi ultimi ci è parso interessante presentare l'argomento ontologico gödeliano, ma soprattutto tentare un'esposizione sistematica dei contributi dell'autore alla teoria degli insiemi e provare ad illustrare la filosofia della matematica gödeliana nel suo divenire storico. Quanto agli aspetti "meno noti" dell'opera di Gödel ci siamo occupati, ad esempio, della matematica costruttiva, della nozione di definibilità in termini di ordinali e dei cosiddetti assiomi quadrati.

Nella prima parte, relativa alla logica, abbiamo presentato i classici risultati di completezza (capitolo 1) e incompletezza (capitolo 2) utilizzando in particolare due conferenze inedite sui due argomenti ed evidenziando le strategie dimostrative in esse utilizzate. Abbiamo poi affrontato le "incursioni gödeliane" nell'ambito della logica intuizionista e della matematica costruttiva (capitolo 3) ed in quello della logica modale e di ordine superiore (capitolo 4).

Nella seconda parte, la più importante dal punto di vista dello specifico approccio interpretativo da noi scelto, abbiamo cercato di ricostruire il percorso di studio, scoperta e riflessione fatto da Gödel nell'ambito della teoria degli insiemi (capitolo 5). In questo senso abbiamo prestato particolare attenzione alla formalizzazione della teoria degli insiemi proposta dall'autore (capitolo 7), ai modelli da lui ideati nell'ambito dei suoi risultati di noncontraddittorietà relativa (capitoli 8 e 9) ed alle sue proposte per una soluzione definitiva del problema del continuo di Cantor (capitoli 10 e 11).

Nella terza ed ultima parte, ideale punto di arrivo delle due precedenti, abbiamo tentato una ricostruzione cronologica, ancora una volta basata in gran parte sugli inediti, dei principali momenti della riflessione filosofica gödeliana. Avendo avuto di mira in primo luogo gli aspetti ontologici e fondazionali di tale percorso intellettuale, abbiamo consapevolmente sorvolato sull'importante tema delle considerazioni gödeliane relative a calcolabilità, filosofia della mente, problema mente/macchina ed effettività delle dimostrazioni, le quali, anche recentemente, hanno sollevato numerosi dibattiti fra logici, informatici e filosofi. Ci siamo invece rivolti soprattutto al ruolo ed alle forme assunte nel corso degli anni dai fondamentali temi gödeliani del realismo in matematica, dell'analiticità, dell'analogia fra matematica e scienze empiriche ed infine dei nuovi assiomi per la matematica.

Vista la mole di materiali disponibili abbiamo suddiviso questa terza parte in quattro sezioni corrispondenti, grosso modo, agli anni Trenta, Quaranta, Cinquanta e Sessanta del secolo scorso. Nella prima abbiamo cercato di illustrare le riflessioni dell'autore sulla situazione dei fondamenti dopo i teoremi di incompletezza (capitolo 12) e sul problema della noncontraddittorietà (capitolo 13). Nella seconda abbiamo tentato di dar conto dell'importante eredità russelliana che caratterizza il pensiero gödeliano (capitolo 14) e del significato di alcune nozioni-chiave della filosofia dell'autore quali sono quelle di assolutezza, realtà e oggettualità (capitolo 15). Nella terza sezione abbiamo descritto il tentativo intrapreso da Gödel nel corso degli anni Cinquanta di fondare il realismo matematico mediante un confronto con due tradizionali punti di vista filosofici, il concettualismo e il nominalismo, rappresentati nella fattispecie da costruttivismo (capitolo 16) e neo-positivismo (capitolo 17). Nella quarta ed ultima sezione (capitolo 18) abbiamo infine proposto la lettura di un breve inedito del 1961 come punto di partenza per una ricostruzione del rapporto di Gödel con la filosofia di Husserl e per una verifica dell'eventuale presenza di un'influenza della fenomenologia sui lavori più tardi dell'autore.

Prima parte
Logica

Introduzione

In questa prima parte cercheremo di presentare i risultati squisitamente logici o logico-matematici dell'opera di Gödel. Nel tentativo di ricostruire un quadro il più coerente possibile dell'approccio ai fondamenti dell'autore, ci è sembrato utile anteporre al nucleo tematico del nostro lavoro un itinerario attraverso i contributi logici sia per la loro intrinseca portata filosofica e fondazionale sia per l'importanza che essi chiaramente rivestono all'interno dell'opera gödeliana.

Nell'affrontare questo compito ci siamo serviti, oltre che di tutto il materiale edito presente nel primo e nel secondo volume dei *Collected works* anche degli inediti. Questi ultimi ci offrono la possibilità di presentare sinteticamente i principali risultati logici dell'opera gödeliana degli anni Trenta e oltre (come nel caso della "Dialectica interpretation") seguendo un'esposizione ad un tempo accessibile e fedele ai testi.

In questa prima parte affronteremo le seguenti quattro tematiche:

- il problema della completezza della logica elementare;

- i teoremi di incompletezza;

- le "incursioni" gödeliane nell'ambito della matematica costruttiva;

- l'argomento ontologico.

Nell'ambito di un lavoro rivolto principalmente ad un'analisi critica della filosofia della matematica di Gödel ci si potrebbe legittimamente chiedere il perché di un'ampia sezione interamente dedicata alla logica, soprattutto tenendo conto del fatto che il nucleo tematico cui intendiamo far riferimento è costituito dalla teoria degli insiemi. Di fatto a noi sembra che una piena comprensione dei contributi gödeliani alla teoria degli insiemi debba passare per lo meno attraverso i due fondamentali risultati di completezza e incompletezza e non c'è dubbio che la scoperta del fenomeno dell'incompletezza abbia influito pesantemente sulle riflessioni filosofiche dell'autore.

In secondo luogo, i principali punti di riferimento concettuali e le figure che più influenzarono Gödel in ambito insiemistico e filosofico sembrano essere in gran parte gli stessi che ebbero un ruolo centrale per la logica. Basti pensare all'importanza che ebbero per l'autore le opere di Hilbert e Skolem sia per il teorema di completezza che per la dimostrazione della noncontraddittorietà dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di scelta.

Infine è proprio nei lavori logici che sembra possibile riscontrare “in nuce” lo specifico dell’impostazione concettuale e metodologica gödeliana ossia la compresenza di una forte attenzione per la costruttività delle dimostrazioni e del riconoscimento del necessario utilizzo di metodi e assunzioni non-costruttivi in generale nel fare matematica ed in particolare nell’affrontare questioni fondazionali e logico-matematiche.

1. Completezza

1.1. Le origini

Nel paragrafo 10 del capitolo III dei *Grundzüge der theoretischen Logik* Hilbert e Ackermann descrivevano nei seguenti termini uno dei più importanti problemi relativi alle proprietà metamatematiche del calcolo per la logica dei predicati del prim'ordine:

> La questione qui è se tutte le formule universalmente valide del calcolo dei predicati ... possano essere dimostrate in quel sistema di assiomi.

Probabilmente è questa la prima formulazione esplicita del problema della completezza (semantica) del calcolo dei predicati del prim'ordine, problema per altro già sollevato e risolto per il calcolo proposizionale classico (in breve **CPC**). Nello stesso anno in cui furono pubblicati i *Grundzüge*, cioè nel 1928, Hilbert nella conferenza[1] intitolata "Probleme der Grundlegung der Mathematik" esponeva come quarto ed ultimo fra i problemi più interessanti della teoria della dimostrazione quello della completezza della teoria dei numeri e del calcolo per la logica dei predicati del prim'ordine.

In quella sede Hilbert spiegava la nozione che oggi chiameremmo di legge logica predicativa in un linguaggio elementare in termini di "teoremi logici universalmente validi". Egli esponeva il problema della completezza del calcolo predicativo classico o calcolo quantificazionale classico (in breve **CQC**) in relazione al problema della completezza della teoria dei numeri. Come vedremo, quando Gödel affrontò il problema della completezza ebbe certamente come punti di riferimento principali la conferenza hilbertiana di Bologna e i *Grundzüge*.

Hilbert, sempre nella conferenza del '28, illustrava anche lo "status quaestionis" del problema generale della completezza osservando come esso fosse già stato risolto positivamente nell'ambito della logica proposizionale e della logica predicativa monadica. La completezza di **CPC** era stata dimostrata dapprima da Paul Bernays nella sua tesi di dottorato[2] e poi, nel 1921, da Post. Quest'ultimo per mezzo delle tavole di verità aveva dimostrato, oltre

[1] Pronunciata a Bologna in occasione del Congresso internazionale dei matematici, vedi *Hilbert 1929*.

[2] Scritta proprio sotto la supervisione di Hilbert. Sul ruolo di Hilbert nella dimostrazione del teorema di completezza si veda *Zach 1999*.

alla completezza semantica di **CPC**, il seguente risultato: *ogni formula proposizionale diviene dimostrabile in* **CPC** *se si assume come nuovo assioma una qualunque formula non dimostrabile nel calcolo proposizionale classico.*

Questa proprietà, una sorta di massimalità della logica proposizionale, viene spesso chiamata *completezza alla Post*. Si tratta di una proprietà sintattica del calcolo proposizionale classico che deriva dalla decidibilità di questo sistema formale e perciò tende ad oscurare il fatto che questo calcolo sia completo anche rispetto a tutti i suoi possibili modelli cioè che esso sia completo nel senso semantico della parola.

Colui il quale invece mise ben in evidenza il significato più importante della completezza di **CPC** fu Bernays, il quale, nel 1918, dimostrò proprio che il calcolo proposizionale classico è completo:

> ... nel senso che da esso possono ottenersi mediante regole di inferenza formali tutte le formule formali universalmente corrette.

Dunque quello che Bernays dimostrò nel 1918, e pubblicò solo parzialmente nel 1926, mediante il metodo strettamente finitario delle forme normali congiuntive, fu il seguente teorema: *per ogni formula φ del linguaggio del calcolo proposizionale classico si ha che, se la formula φ è vera per ogni assegnazione di valori di verità 0,1 alle variabili proposizionali in essa occorrenti, allora φ è una formula proposizionale dimostrabile nel sistema formale* **CPC**.[3]

Con ciò abbiamo delineato solo una parte del *background* di ricerche logico-matematiche da cui Gödel mosse per la sua dimostrazione. Altrettanto importanti furono per lui l'articolo di Thoralf Skolem intitolato *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einige Theoreme über dichte Mengen*.[4] In questo lavoro troviamo una dimostrazione del cosiddetto "teorema di Löwenheim-Skolem" in cui si fa uso essenziale delle forme normali e dell'assioma di scelta. Quest'ultimo verrà utilizzato da Gödel in una forma indebolita nel passaggio più delicato dell'intera dimostrazione del teorema di completezza. Inoltre le forme normali sono alla base dell'impostazione gödeliana del risultato di completezza.

Possiamo dunque concludere che, sulla soluzione gödeliana del problema della completezza, influirono due tradizioni logiche ben distinte. Da un lato quella degli algebristi della logica (Schröder, la scuola Polacca, Löwenheim e

[3]Più formalmente: per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **CPC**, se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$, $\mathcal{V} \models \varphi$, allora $\mathbf{CPC} \vdash \varphi$.

[4]Cf. *Skolem 1920*.

Skolem) con un approccio fortemente semantico e attento più alle strutture astratte che non a quelle linguistiche. Dall'altro la tradizione hilbertiana col suo approccio tipicamente sintattico rivolto principalmente alle questioni linguistiche e formali della ricerca logica.

Come vedremo uno dei grandi meriti del risultato di completezza di Gödel è stato quello di aver dimostrato che queste due tradizioni, ben lungi dall'essere incompatibili, risultano invece essere, almeno a livello logico predicativo classico, in un certo senso fra loro equivalenti. Usando le parole di Ettore Casari diremmo che:[5]

> Con questo lavoro che stabiliva una connessione fondamentale tra il concetto di dimostrazione formale che stava al centro del grande sforzo di chiarificazione della tradizione hilbertiana e quello di validità logica che stava invece alla base del teorema di Löwenheim-Skolem venivano a saldarsi due grandi ipotesi di approccio allo studio della verità logica.

1.2. Genesi del problema e riferimenti

Come ci riferisce John W. Dawson nella sua biografia di Gödel,[6] il nostro autore cominciò ad interessarsi a questioni logiche e fondazionali verso il 1928. Fu proprio verso la fine di quell'anno che Gödel prese a prestito dalla biblioteca dell'università di Vienna alcuni scritti di logica fra cui vale la pena di ricordare:

- le *Vorlesungen über die Algebra der Logik* di Ernst Schröder;
- le *Grundlagen der Arithmetik* di Gottlob Frege;
- la *Mathematik und Logik* di Heinrich Behmann;
- i *Proceedings of the Fifth Scandinavian Mathematical Congress* in cui compare *Skolem 1923a*.

Già sulla base di questi primi riferimenti ci è possibile ricollegarci alle considerazioni fatte sopra circa le due tradizioni "logico-matematiche" cui Gödel sembra far riferimento. Va notato che sia Schröder che Behmann vengono citati da Hilbert nella conferenza di Bologna del 1928. Ciò sembra confermare in qualche modo il fatto che Gödel, oltre ai *Grundzüge* di Hilbert e Ackermann, avesse ben presente questa conferenza hilbertiana.

[5] Si veda *Casari 1981*, pagg. 109-110.
[6] Cf. *Dawson 1996*, cap. 4.

Sull'ultimo dei testi citati da Dawson occorre soffermarsi con una certa attenzione. Il fatto che Gödel avesse letto o meno l'articolo di Skolem presente nei *Proceedings* di Helsingfors è fondamentale per comprendere il ruolo degli scritti del logico norvegese nella dimostrazione gödeliana del teorema di completezza. Questo problema è stato affrontato sia da Hao Wang nel suo *1974* che da Jean van Heijenoort nel suo *1967* e successivamente sempre da van Heijenoort e da Burton Dreben nella loro nota introduttiva ai vari articoli gödeliani sulla completezza.[7] Da quei testi emerge il fatto che fra i lavori di Skolem e quelli di Gödel della fine degli anni Venti esistono alcuni nessi di cui vale la pena di ricordare i seguenti:

1. Gödel lesse e considerò come un punto di riferimento, secondo sua stessa ammissione, il già citato *Skolem 1920* e da esso trasse spunto per lo meno per:
   (a) l'utilizzo delle forme normali,
   (b) la forma disgiuntiva dell'enunciato del teorema di completezza,
   (c) l'estensione del suo risultato dal caso di un insieme finito di formule a quello di un insieme infinito numerabile;
2. in *Skolem 1923a*, l'autore arrivò molto vicino al teorema di completezza ma non lo formulò esplicitamente, forse in conseguenza del fatto di non aver precisato le nozioni di sistema formale e di dimostrazione formale.

Quello che sembra emergere nella letteratura secondaria[8] è che Gödel non fosse a conoscenza di *Skolem 1923a* quando scrisse la sua tesi di dottorato. Questa diffusa conclusione sarebbe avvalorata da un'affermazione dello stesso Gödel, il quale in una lettera spedita a van Heijenoort nel 1963 scriveva:[9]

> Per quanto riguarda il lavoro di Skolem, penso di averlo letto per la prima volta circa nel periodo in cui pubblicai il mio lavoro sulla completezza ... In ogni caso sono praticamente certo che non lo conoscevo mentre scrivevo la mia tesi. Altrimenti lo avrei citato poiché esso è assai più vicino al mio lavoro di quanto non lo fosse l'articolo del 1920, che ho citato.

Se è vero, come afferma Dawson, che Gödel prese a prestito *Skolem 1923a* fra la fine del 1928 e l'inizio del 1929, sembra tuttavia piuttosto inverosimile che

[7] Cf. *Dreben et van Heijenoort 1986* in *Gödel 1986*, pagg. 44-59.
[8] Cf. *Dawson 1996*, *Wang 1987* e *van Heijenoort 1967*.
[9] Cf. *Gödel 2003a*, pagg. 310-311.

nel luglio del 1929, quando Hans Hahn e Philipp Furtwängler ne approvarono la tesi, egli non avesse letto quell'articolo. Sembra invece plausibile che il nostro autore, quando scrisse la sua tesi di dottorato, avesse in realtà presenti entrambi i lavori di Skolem e ciò spiegherebbe anche la vicinanza fra *Skolem 1923a* e *Gödel 1929*.

Forse l'affermazione fatta da Gödel nella lettera del 1963 fu frutto di una dimenticanza, ma non si può escludere a priori che nel suo *1929* Gödel abbia consapevolmente evitato di citare quel lavoro e che abbia poi voluto in qualche modo "giustificare" questa vistosa lacuna nei riferimenti della sua tesi di dottorato.

Come vedremo, anche negli articoli sul problema del continuo Gödel non cita *Skolem 1923a* che per molti aspetti fu un precursore di alcune sue importanti idee sul problema del continuo.[10]

Di fatto, al di là delle fonti secondarie e di quelle incerte, sicuramente l'autore ebbe come principali riferimenti nella dimostrazione di completezza, oltre a *Löweheim 1915* e *Skolem 1920*, i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead e soprattutto i *Grundzüge der theoretischen Logik*. Gödel apre la sua tesi di dottorato citando proprio queste due opere e facendo un essenziale riferimento a Löwenheim per spiegare la nozione di "formula valida esprimibile nel calcolo funzionale ristretto". Nell'articolo pubblicato nel 1930 vengono citati i *Principia* già nella prima riga e poi *Hilbert et Ackermann 1928* e *Bernays 1926* in nota. Anche la conferenza di Königsberg del 1930 (*Gödel *1930c*) si apre con una citazione dei *Principia Mathematica* seguita poco dopo da quella dei *Grundzüge*.

In tutti e tre questi scritti, l'opera più citata è di gran lunga quella di Hilbert e Ackermann, ma questo non deve trarre in inganno. L'intera dimostrazione di Gödel è condotta secondo lo stile e mediante le tecniche di Löwenheim e Skolem. Va rilevato che, mentre ogni richiamo a questioni formali è accompagnato da una precisa citazione riferita ai *Principia*, a Hilbert, Ackermann o Bernays, invece le considerazioni e le definizioni semantiche (soddisfacibilità, validità, etc...) vengono date senza riferimenti. La ragione di questa asimmetria può forse essere ritrovata nel fatto che il problema che Gödel affrontava era stato formulato e studiato esclusivamente dalla scuola

[10] Si noti che in *Gödel 1929* il nostro non cita neppure *Skolem 1920* ma si limita a dire, nella nota 15: "Thoralf Skolem ha impiegato un procedimento analogo per la dimostrazione del noto teorema che prende il nome da lui e da Löwenheim". Invece in *Gödel 1930*, nota 14, viene citato *Skolem 1920*. Ma di nuovo, nell'articolo inedito *Gödel *1930c* si dice solo di aver fatto uso del "metodo di Skolem usato per dimostrare il teorema di Löweheim".

hilbertiana, mentre le tecniche modellistiche elaborate la Löwenheim e da Skolem erano del tutto indipendenti dal problema della completezza.

1.3. Formulazioni del teorema di completezza

In *Gödel 1930* il problema della completezza viene formulato così:[11]

> Com'è noto, Whitehead e Russell hanno costruito la logica e la matematica ponendo all'inizio come assiomi certe proposizioni evidenti e deducendo da questi certi teoremi della logica e della matematica ... mediante alcuni principi precisamente formulati, in modo puramente formale ... *quando si segue una tale procedura, sorge immediatamente il problema se il sistema di assiomi e di principi di inferenza inizialmente formulati è completo, vale a dire se esso è effettivamente sufficiente per la derivazione di ogni proposizione logico-matematica o se forse è concepibile che esistano proposizioni vere ... che non possono essere dimostrate nel sistema considerato.*[12]

Questa citazione mette bene in evidenza il significato concettuale della completezza, in quanto proprietà dei sistemi formali: un sistema formale è *semanticamente completo* se è in grado di dimostrare formalmente tutte le proposizioni "vere"[13] formulabili nel suo linguaggio. Nell'ambito affrontato da Gödel della logica predicativa del prim'ordine, dunque, dire che il sistema formale per il calcolo predicativo classico, **CQC**, è completo significa affermare che in esso si possono dimostrare formalmente tutte le leggi logiche esprimibili nel linguaggio predicativo del prim'ordine. Il teorema di completezza avrà quindi la seguente forma: *per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di* **CQC***, se ogni valutazione di $\mathcal{L}$ soddisfa φ, allora φ è dimostrabile in* **CQC**.[14]

Nella tesi di dottorato (ossia in *Gödel 1929*) leggiamo invece:[15]

> Qui "completezza" [ted. Vollständigkeit] va intesa nel senso che: ogni formula valida esprimibile nel calcolo funzionale ristretto (una "Zählaussage" valida, come direbbe Löwenheim) può essere derivata dagli assiomi mediante una successione finita di inferenze formali.

E subito dopo:[16]

---

[11] Cf. *Gödel 1986*, pag. 102.

[12] Il corsivo è mio.

[13] Cioè: vere in ogni modello del sistema formale dato.

[14] Più formalmente: per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **CQC**, se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$, $\mathcal{V} \models \varphi$, allora $\mathbf{CQC} \vdash \varphi$.

[15] Cf. *Gödel 1986*, pag. 60.

[16] Cf. *Gödel 1986*, pag. 60.

> Si vede facilmente che questa asserzione è equivalente alla seguente: ogni sistema di assiomi noncontraddittorio [ted. widerspruchslos] che consti solo di Zählaussagen ha una realizzazione.

Qui viene formulata un'importante versione alternativa del teorema di completezza che potremmo indicare come *teorema di esistenza del modello* ossia: *ogni sistema formale* $\mathbf{T}$ *del prim'ordine, cioè basato sul linguaggio* $\mathcal{L}$ *e sul sistema* **CQC** *come parte logica, se è noncontraddittorio, allora ha un modello.*[17]

Sempre nel paragrafo introduttivo della sua tesi di dottorato l'autore osserva, richiamandosi a Brouwer, che quest'ultima formulazione costituisce un "completamento teorico" dell'usuale metodo impiegato per dimostrare la noncontraddittorietà cioè il reperimento di un modello. Quello che Gödel vuol dire è che, una volta dimostrata la completezza della logica del prim'ordine, non si ha solo che un sistema formale del prim'ordine è consistente *se* ha un modello, ma è consistente *se e solo se* ha un modello. Mediante il teorema di completezza si ha che, se un sistema formale del prim'ordine non ha modelli, allora è possibile derivare una contraddizione a partire dai suoi assiomi, mediante le sue regole di inferenza.

Apparentemente in polemica con Hilbert,[18] Gödel afferma inoltre che sarebbe forse possibile pensare che i concetti introdotti mediante un sistema formale non necessitino di una dimostrazione di esistenza, essendo già sufficiente la noncontraddittorietà del sistema. Secondo l'autore non è così in quanto ciò presupporrebbe che ogni problema matematico debba necessariamente essere risolubile.

Questa osservazione è particolarmente interessante in quanto spiega un importante nesso concettuale sussistente fra le nozioni, di per sè nettamente distinte, di completezza semantica e di completezza sintattica. Se si può dimostrare che ogni formula chiusa del linguaggio di un certo sistema formale del prim'ordine è dimostrabile o refutabile, chiaramente si avrà che, se il sistema è corretto, allora sarà anche semanticamente completo. Tuttavia, dice Gödel:[19]

> ... non possiamo affatto escludere una dimostrazione della non-risolubilità di un problema, se notiamo che qui si parla solo della non-risolubilità mediante certi metodi di inferenza formali precisamente specificati.

---

[17]Detto altrimenti: per ogni sistema formale elementare $\mathbf{T}$, se non esiste formula φ di $\mathcal{L}$ tale che $\mathbf{T} \vdash \varphi$ e $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$, allora esiste una valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$ tale che $\mathcal{V} \models \mathbf{T}$.

[18]Cf. ad esempio *Hilbert 1900.*

[19]Cf. *Gödel 1929* in *Gödel 1986*, pag. 62.

Si ha qui l'impressione che l'autore faccia implicito riferimento ai risultati di incompletezza, tuttavia egli conclude il paragrafo con molta cautela, dicendo:[20]

> Queste riflessioni del resto hanno il solo scopo di mettere nella giusta luce le difficoltà connesse a un tale concetto di esistenza, senza affermare nulla di definitivo circa la sua possibilità o impossibilità.

Si potrebbe congetturare che, nel momento in cui Gödel scrisse queste parole avesse già individuato, almeno intuitivamente, il fenomeno dell'incompletezza in riferimento a certi formalismi, senza però essere ancora riuscito a darne una dimostrazione rigorosa.

Finora abbiamo visto due formulazioni del teorema di completezza. Gödel ne dà anche una terza che sarà poi quella di cui verrà data la dimostrazione. Nel paragrafo 4 di *Gödel 1929* possiamo leggere:[21]

> Poiché gli assiomi logici sono universalmente validi, è chiaro che ogni formula dimostrabile è universalmente valida. Il teorema di completezza che ora dobbiamo dimostrare afferma l'inverso: *ogni espressione logica universalmente valida è dimostrabile.* Ciò evidentemente può essere espresso anche così: *ogni espressione logica o è soddisfacibile o è refutabile.*

Abbiamo quindi quello che potremmo chiamare *teorema di completezza in forma disgiuntiva* cioè: *per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ del calcolo predicativo classico* **CQC***, o esiste una valutazione di $\mathcal{L}$ che soddisfa φ oppure $\neg\varphi$ è dimostrabile in* **CQC**.[22]

1.4. Estensioni e "ricerche complementari"

Il risultato di completezza venne esteso da Gödel, già nel 1929, nelle seguenti due direzioni:

i) dal caso della logica elementare, **CQC**, a quello della logica quasielementare,[23] $\mathbf{CQC}^=$;

ii) da una singola formula a insiemi numerabili (finiti o infiniti) di formule.

[20] Cf. *Gödel 1929* in *Gödel 1986*, pag. 62.

[21] Cf. *Gödel 1986*, pagg. 72,74.

[22] Formalmente avremo: per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ del calcolo predicativo classico **CQC**, o esiste una valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$ tale che $\mathcal{V} \models \varphi$ oppure $\mathbf{CQC} \vdash \neg\varphi$.

[23] Cioè del prim'ordine con identità.

La prima generalizzazione dà luogo al *teorema di completezza per la logica quasielementare* ossia al seguente risultato: *per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di* $\mathbf{CQC}^=$*, se ogni valutazione di $\mathcal{L}$ soddisfa φ, allora φ è dimostrabile in* $\mathbf{CQC}^=$*.*

La seconda generalizzazione costituisce un fondamentale rafforzamento del teorema di completezza in forma disgiuntiva che chiameremo *teorema di completezza numerabile* ossia: *per ogni insieme numerabile (finito o infinito) $\mathcal{F}$ di formule del linguaggio $\mathcal{L}$ di* $\mathbf{CQC}$ *o esiste una valutazione di $\mathcal{L}$ che soddisfa ogni formula di $\mathcal{F}$ oppure c'è un sottoinsieme finito di formule di $\mathcal{F}$ la cui chiusura congiuntiva è refutabile in* $\mathbf{CQC}$*.* Questa seconda estensione del teorema di completezza è particolarmente importante per una sua applicazione ai sistemi formali del prim'ordine cioè, perché da essa segue che:[24]

> Per ogni proposizione φ che sia sensata in un sistema di assiomi $\mathbf{T}$, o φ è deducibile dagli assiomi oppure esiste un modello di $\mathbf{T}\wedge\neg\varphi$.

Si tratta del cosiddetto *teorema generale di completezza* ossia del seguente risultato: *dato un sistema formale* $\mathbf{T}$ *del prim'ordine, per ogni formula chiusa φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di* $\mathbf{T}$*, se ogni modello di* $\mathbf{T}$ *soddisfa φ, allora φ è dimostrabile in* $\mathbf{T}$*.*

Indipendenza degli assiomi di CQC

Gödel presenta, come appendice ai suoi risultati di completezza, la dimostrazione dell'indipendenza degli assiomi di **CQC** e lo fà lungo le seguenti linee:

1) considera un certo assioma φ di **CQC**;
2) definisce un'opportuna valutazione $\mathcal{V}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **CQC** in modo tale che:
    a) sia possibile verificare che $\mathcal{V}$ soddisfa tutti gli assiomi di $\mathbf{T} - \{\varphi\}$;
    b) si verifichi inoltre che $\mathcal{V}$ non soddisfa φ.

Come quello della completezza, anche questo dell'indipendenza degli assiomi di **CQC** era un problema aperto che fu proposto all'attenzione dei matematici in *Hilbert et Ackermann 1928*.

[24]Cf. *Gödel 1929* in *Gödel 1986*, pag. 100.

Il teorema di compattezza

In *Gödel 1929* la dimostrazione di quello che sopra è stato chiamato teorema di completezza numerabile viene considerata come una generalizzazione della dimostrazione del teorema di completezza in forma disgiuntiva.[25] Invece in *Gödel 1930* esso viene dato come banale conseguenza del seguente risultato:[26]

> Affinché un sistema infinito numerabile di formule sia soddisfacibile è necessario e sufficiente che ogni [suo] sottosistema finito sia soddisfacibile.

Detto in altri termini, Gödel qui formula e dà le linee essenziali del famoso teorema di compattezza: *se ogni sottoinsieme finito di assiomi di un certo sistema formale* **T** *ha un modello, allora anche* **T** *ha un modello.*

Com'è stato osservato in *Dreben et van Heijenoort 1986* questo risultato non ebbe grande risonanza negli anni immediatamente successivi alla pubblicazione, soprattutto se confrontato col teorema di completezza. Tuttavia più tardi quando, in seguito ai fondamentali lavori di Tarski, nacque la moderna teoria dei modelli, il teorema di compattezza assunse un'importanza e centralità non comuni in ambito logico-matematico.

In *Gödel 1930* il teorema di compattezza viene formulato in riferimento a teorie basate su un linguaggio numerabile. Fu lo stesso Gödel ad indicare un metodo che sarebbe potuto servire per un'estensione di questo risultato a sistemi formali basati su linguaggi più-che-numerabili nell'articolo "Eine Eigenschaft der Realisierung des Aussagenkalküls" pubblicato nel 1932 sugli *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*. In questo articoletto Gödel mostrava come fosse possibile generalizzare la tecnica di Lindenbaum per estendere un insieme noncontraddittorio di formule del linguaggio della logica predicativa elementare ad un insieme noncontraddittorio e massimale. Gödel, pur limitandosi all'ambito della logica proposizionale, generalizzò il risultato di Lindenbaum dal caso numerabile a quello più-che-numerabile. Fu poi Anatolii Ivanovich Maltsev, nei suoi *1936* e *1941*, a generalizzare il teorema di compattezza rispetto a sistemi basati su linguaggi di cardinalità qualsiasi.

[25] Nell'ottavo e ultimo paragrafo di *Gödel 1929* a pag. 96, leggiamo infatti: "La dimostrazione è del tutto analoga a quella data sopra per singole espressioni e sarà quindi solo brevemente accennata".

[26] Cf. *Gödel 1986*, pag. 118.

1.5. Considerazioni sui metodi dimostrativi

Nell'"Introduzione" della sua tesi di dottorato Gödel fa una considerazione molto interessante sia per quanto riguarda il suo approccio alle ricerche fondazionali che per quanto riguarda il significato che egli attribuisce in particolare al problema della completezza. Vi leggiamo infatti:[27]

> Per finire, ancora un'osservazione sui metodi dimostrativi impiegati nel seguente lavoro: su di essi non è stata posta alcuna limitazione. In particolare viene fatto uso essenziale del principio del terzo escluso per totalità infinite (per contro, l'infinito più che numerabile non viene impiegato nella dimostrazione principale).

Di fatto Gödel, oltre all'uso "infinitario" del "terzo escluso" si servirà di un altro principio problematico dal punto di vista fondazionale e cioè di un principio debole di scelta, il *lemma di König*.[28] L'uso di questo principio "non-costruttivo", da un lato, potrebbe essere considerato come un segnale della propensione gödeliana per un uso piuttosto liberale di tutti gli strumenti matematici a disposizione nell'ambito delle ricerche sui fondamenti, ma, d'altro canto, va letto anche nella particolarità del problema in questione che il nostro autore considerava come squisitamente matematico, ancor prima e forse ancor più che fondazionale. Alla fine dell'introduzione di *Gödel 1929* l'autore contrappone infatti il problema della completezza a quello della non-contraddittorietà osservando che il primo, a differenza del secondo, "non è emerso solo dal dibattito sui fondamenti" e perciò lo si sarebbe potuto sollevare sensatamente "anche se non fosse mai stato messo in dubbio il valore della matematica naïf".[29] In tal senso, spiega Gödel, nell'ambito del problema della completezza "una restrizione dei metodi dimostrativi" non sembra motivata a meno che non lo sia per ogni altro problema matematico.[30]

[27]Cf. *Gödel 1929* in *Gödel 1986*, pag. 62.

[28]Questo principio può essere formulato come segue: *ogni albero infinito, finitamente ramificato, ha un ramo infinito.* Sulla base di alcuni risultati di *reverse mathematics* è oggi noto che per dimostrare il teorema di completezza di Gödel è già sufficiente la seguente forma debole del teorema di König: *ogni albero binario infinito, ha un ramo infinito.* Si veda al riguardo *Simpson 1999*, cap. IV, pagg. 127-165.

[29]Cf. *Gödel 1929* in *Gödel 1986*, pag. 64.

[30]Cf. *Gödel 1929* in *Gödel 1986*, pag. 64.

1.6. La strategia dimostrativa

Nella conferenza inedita sul teorema di completezza, pubblicata nel 1995 nel terzo volume dei *Collected works*, col titolo "Vortrag über Vollständigkeit des Funktionenkalküls", Gödel definisce in primo luogo la nozione di *formula normale* come una formula in cui "tutti i quantificatori occorrono all'inizio ... e ... un quantificatore universale viene per primo e un quantificatore esistenziale per ultimo".[31] In secondo luogo egli definisce il *grado* di una formula normale come "il numero dei blocchi di quantificatori universali"[32] in essa occorrenti. A questo punto l'autore traccia le linee essenziali della dimostrazione, individuando i tre seguenti passaggi:

1. se ogni formula normale è refutabile o soddisfacibile, allora ogni formula è refutabile o soddisfacibile;

2. se ogni formula normale di grado k è refutabile o soddisfacibile, allora ogni formula normale di grado $k + 1$ è refutabile o soddisfacibile;

3. ogni formula normale di grado uno è refutabile o soddisfacibile.

Chiaramente da 2 e 3, per induzione sul grado delle formule normali, si ha che ogni formula normale è refutabile o soddisfacibile, e quindi, per 1, si ottiene il risultato voluto cioè l'enunciato di quello che abbiamo chiamato teorema di completezza in forma disgiuntiva.

Detto altrimenti, col punto 1, il problema della completezza in tutta generalità viene ridotto al problema della completezza per le formule normali, e dal dominio di tutte le formule del linguaggio di **CQC** ci si può quindi legittimamente restringere a quello delle formule normali dello stesso linguaggio. A questo punto è possibile procedere per induzione sul grado delle formule normali. La base dell'induzione consisterà nel dimostrare che ogni formula normale φ di grado uno è refutabile o soddisfacibile, mentre il passo sarà dato dalla verifica del fatto che, se ogni formula normale di grado k è refutabile o soddisfacibile, allora ogni formula normale di grado $k + 1$ è refutabile o soddisfacibile.

Il primo passo della dimostrazione di completezza di Gödel sta comunque[33] nella chiara distinzione delle nozioni di soddisfacibilità, validità in un

[31]Cf. *Gödel *1930c* in *Gödel 1995*, pagg. 20-22.

[32]Cf. *Gödel *1930c* in *Gödel 1995*, pag. 22.

[33]Ed è questo un importante elemento di novità rispetto ai lavori di Skolem.

modello, validità in ogni modello, dal lato semantico, e dimostrabilità formale, refutabilità, formula normale, grado di una formula normale, dal lato sintattico.[34]

Consideriamo lo schema dimostrativo del punto 1. Indichiamo con $\mathcal{SR}$ la proprietà di una formula di essere soddisfacibile o refutabile. Dovremo allora stabilire che: se per ogni formula normale φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **CQC** si ha $\mathcal{SR}(\varphi)$, allora per ogni formula ψ di $\mathcal{L}$ si ha $\mathcal{SR}(\psi)$. E' facile verificare che per ogni formula φ di $\mathcal{L}$ esiste una formula normale ψ dello stesso linguaggio tale che:

a) $\mathbf{CQC} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$;

b) se ψ è soddisfacibile, anche φ è soddisfacibile;

c) se ψ è refutabile, anche φ é refutabile.

Dunque data una formula φ di $\mathcal{L}$ e la formula normale ψ ad essa associata, se ψ è refutabile o soddisfacibile, allora anche φ è refutabile o soddisfacibile. Con ciò il punto 1 di cui sopra risulta dimostrato.

Consideriamo ora il punto 2. Questa parte della dimostrazione si basa sul fatto che, per ogni formula normale φ di grado $k+1$, si può determinare una formula normale ψ di grado k tale che la refutabilità (o soddisfacibilità) di ψ implica la refutabilità (o soddiffacibilità) di φ. Gödel dà un esempio esplicativo di come ottenere questo risultato. Si consideri la formula:

$$\forall x \exists y \forall z \exists u A(x, y, z, u) \tag{1}$$

dove $A(x, y, z, u)$ è una formula priva di quantificatori o meglio deve essere pensata come "costruita a partire da variabili funzionali soltanto mediante le operazioni del calcolo proposizionale (dunque senza $\forall x$ o $\exists x$)".[35] Chiaramente φ è una formula normale di grado 2. Si consideri ora la formula:

$$\forall v \exists w F(v, w) \wedge \forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow \forall z \exists u A(x, y, z, u)) \tag{2}$$

dove F "denota una variabile funzionale a due posti".[36] La forma normale della (2) sarà la formula:

$$\forall v \forall x \forall y \forall z \exists w \exists u (F(v, w) \wedge (F(x, y) \rightarrow A(x, y, z, u))). \tag{3}$$

[34]Naturalmente, ciò non vuol dire che in Gödel si abbia già una matematizzazione di queste nozioni, infatti la matematizzazione delle nozioni semantiche di soddisfacibilità, validità, ecc... si avrà solo con Tarski.

[35]Cf. *Gödel *1930c* in *Gödel 1995*, pag. 22.

[36]Cf. *Gödel *1930c* in *Gödel 1995*, pag. 22.

Gödel osserva che per la formula (2) si ha che:

(a) la formula normale ad essa associata, la (3), ha grado 1;

(b) se essa è refutabile (o soddisfacibile), allora anche la (1) è refutabile (o soddisfacibile).

Il punto (a) è banale. Consideriamo quindi il punto (b) ed in particolare il caso della refutabilità. Supponiamo che la formula (2) sia refutabile. Ciò significa che la formula:

$$\neg(\forall v \exists w F(v,w) \wedge \forall x \forall y (F(x,y) \rightarrow \forall z \exists u A(x,y,z,u))) \tag{4}$$

è dimostrabile. Dunque sarà dimostrabile anche la formula:

$$\neg(\forall v \exists w \forall z \exists u A(v,w,z,u) \wedge \forall x \forall y (\forall z \exists u A(x,y,z,u) \rightarrow \forall z \exists u A(x,y,z,u)) \tag{5}$$

ottenuta dalla (4) sostituendo ad ogni occorrenza della variabile F la formula $\forall z \exists u A(x,y,z,u)$. Affinché la formula (5) sia vera occorre che una delle due formule:

$$\forall x \forall y (\forall z \exists u A(x,y,z,u) \rightarrow \forall z \exists u A(x,y,z,u)) \tag{6}$$

o

$$\forall v \exists w \forall z \exists u A(x,y,z,u) \tag{7}$$

sia falsa. La (6) è chiaramente vera (oltre che dimostrabile in **CQC**). Dunque la (7) sarà invece falsa e di conseguenza refutabile. Ma la formula (7) non è altro che un cambio alfabetico della (1) e quindi, come volevasi dimostrare, dalla refutabilità della (2) segue la refutabilità della (1). In modo analogo, spiega Gödel, si dimostra che dalla soddisfacibilità della (2) segue la soddisfacibilità della (1). Ciò naturalmente non costituisce una dimostrazione del passo induttivo bensì un'esemplificazione di come si dovrebbe procedere nel caso generale.

Il punto 3 della strategia gödeliana consiste nel dimostrare che, per ogni formula normale φ di grado 1, φ è soddisfacibile o refutabile. Anche per questa parte della dimostrazione, in *Gödel *1930c*, l'autore, anziché procedere in piena generalità come negli articoli pubblicati, illustra invece la procedura dimostrativa con un esempio. Sia φ la formula:

$$\forall x \exists y \exists z A(x,y,z)$$

dove $A(x,y,z)$ è una formula priva di quantificatori. Si consideri ora la successione di formule:

$$A(x_0, x_1, x_2),$$
$$A(x_1, x_3, x_4),$$
$$A(x_2, x_5, x_6),$$
$$....$$
$$....$$
$$A(x_n, x_{2n+1}, x_{2n+2}),$$

che si ottiene da φ rimpiazzando successivamente x con le variabili $x_0, ..., x_n$ e y, z con variabili sempre nuove. Chiamiamo A_n la chiusura congiuntiva delle prime n formule così ottenute:

$$A(x_0, x_1, x_2) \wedge A(x_1, x_2, x_3) \wedge ..... \wedge A(x_n, x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

e $P_n A_n$ la chiusura esistenziale di A_n, cioè la formula:

$$\exists x_0 \exists x_1 ...... \exists x_{2n+2} A_n.$$

Chiaramente $\varphi \to P_n A_n$ è una tautologia ossia per ogni valutazione $\mathcal{V}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ si ha che:

$$\mathcal{V} \models \varphi \to P_n A_n.$$

Inoltre in **CQC** si dimostrano le seguenti implicazioni:

$$\begin{array}{rcl} \forall x \exists y \exists z A(x,y,z) & \to & \exists y \exists z A(x_0, y, z), \\ \exists y \exists z A(x_0, y, z) & \to & \exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 A(x_0, x_1, x_2), \\ \varphi & \to & P_1 A_1. \end{array}$$

Analogamente in **CQC** è dimostrabile:

$$\forall x \exists y \exists z A(x,y,z) \to \exists x_1 \exists x_3 \exists x_4 A(x_1, x_3, x_4)$$

e quindi:

$$\varphi \to P_2 A_2.$$

Procedendo in questo modo per induzione si ottiene quindi che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{CQC} \vdash \varphi \to P_n A_n.$$

Ma il frammento puramente esistenziale di **CQC** è decidibile e di conseguenza per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P_n A_n$ è soddisfacibile o refutabile. Per il *principio del terzo escluso* si danno quindi solo due possibilità: o tutte le $P_n A_n$ sono soddisfacibili oppure almeno una delle $P_n A_n$ è refutabile. Ossia abbiamo un'alternativa secca fra le due seguenti proposizioni:

A1. per ogni numero naturale n, esiste una valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$ tale che:

$$\mathcal{V} \models P_n A_n;$$

A2. per qualche numero naturale n:

$$\mathbf{CQC} \vdash \neg P_n A_n.$$

Se vale la proposizione A2 allora poiché:

$$\mathbf{CQC} \vdash \varphi \rightarrow P_n A_n$$

per contrapposizione e *modus ponens* otteniamo che:

$$\mathbf{CQC} \vdash \neg\varphi.$$

Ossia: *se c'è un numero naturale n tale che $P_n A_n$ è refutabile, allora φ è refutabile.* D'altro canto, se vale la clausola A1 cioè se per ogni numero naturale n esiste una valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$ tale che:

$$\mathcal{V} \models P_n A_n,$$

allora per ogni numero naturale n esiste una valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$ tale che:

$$\mathcal{V} \models P_{n-1} A_{n-1},$$

$$\mathcal{V} \models P_{n-2} A_{n-2},$$

$$....$$

$$....$$

$$\mathcal{V} \models P_0 A_0.$$

Da ciò segue, per il *lemma di König*,[37] che le formule $P_n A_n$ sono tutte soddisfacibili simultaneamente. Ossia, dal fatto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una

[37] Gödel non cita mai questo strumento essenziale per la sua dimostrazione.

valutazione $\mathcal{V}$ di $\mathcal{L}$ che soddisfa P_nA_n segue che esiste una valutazione $\mathcal{V}^*$ di $\mathcal{L}$ che soddisfa tutte le P_nA_n. Ciò significa esattamente che per ogni oggetto $\mathbf{o}$ della base $cod(\mathcal{V}^*)$ della valutazione $\mathcal{V}^*$ esistono due oggetti $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2 \in cod(\mathcal{V}^*)$ tali che:

$$\mathcal{V}^{*\binom{x}{\mathbf{o}}\binom{y}{\mathbf{o}_1}\binom{z}{\mathbf{o}_2}} \models A(x, y, z)$$

ossia che:

$$\mathcal{V}^* \models \forall x \exists y \exists z A(x, y, z).$$

Dunque: *se ogni P_nA_n è soddisfacibile, allora φ è soddisfacibile.*

Con questo termina lo schizzo di dimostrazione proposto in *Gödel *1930c*.

1.7. Completezza, categoricità e decidibilità

Come accennato sopra, nella sua tesi di dottorato Gödel metteva in qualche modo in relazione il teorema di completezza con il problema della decisione e col problema della noncontraddittorietà, discutendo il fatto che la dimostrazione di completezza costituisce un completamento dell'usuale metodo usato per determinare la noncontraddittorietà di un sistema formale. Si è anche detto che questo si potrebbe interpretare come una tacita allusione ai risultati di incompletezza e che tuttavia, in questa sede, Gödel usava molta cautela.

In *Gödel *1930c* invece l'autore parla esplicitamente dell'incompletezza a proposito di un'interessante applicazione del teorema di completezza numerabile che, sotto certi aspetti, richiama proprio il passo della tesi di dottorato cui abbiamo accennato sopra. In *Gödel 1929* l'autore diceva che l'esistenza definita in termini di noncontraddittorietà:[38]

> ... presuppone l'assioma della risolubilità di ogni problema matematico. O, più esattamente essa presuppone che non si possa dimostrare la nonrisolubilità di alcun problema.

Sempre in *Gödel 1929* egli proseguiva osservando che:[39]

> ... se si dimostrasse la non-risolubilità di un problema (diciamo nel dominio dei numeri reali) da ciò seguirebbe, secondo la definizione precedente [esistenza come noncontraddittorietà], l'esistenza di due realizzazioni nonisomorfe del sistema di assiomi per i numeri reali, mentre, d'altra parte, si può dimostrare l'isomorfismo di due qualsiasi di tali realizzazioni ...

[38] Cf. *Gödel 1986*, pag. 60.
[39] Cf. *Gödel 1986*, pag. 62.

In *Gödel *1930c* questa traccia di argomentazione viene spiegata con maggiore ricchezza di particolari nei seguenti termini. Per prima cosa Gödel richiama la nozione di completezza sintattica (nei termini di decidibilità di ogni formula del linguaggio sulla base degli assiomi) e la nozione di categoricità o monomorfismo (in termini di isomorfismo di modelli). In breve:

D1. Un sistema formale $\mathbf{T}$ si dice *sintatticamente completo* se e solo se per ogni formula chiusa φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di $\mathbf{T}$: $\mathbf{T} \vdash \varphi$ oppure $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi$.

D2. Un sistema formale $\mathbf{T}$ si dice *categorico* se e solo se per ogni coppia di modelli $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ di $\mathbf{T}$, $\mathcal{M}'$ e $\mathcal{M}''$ sono fra loro isomorfi.

Gödel osserva che ci si potrebbe aspettare che fra queste due nozioni debba esserci una stretta "parentela" ma che al riguardo non si sono ottenuti risultati generali. Ora, spiega l'autore, sulla base del teorema di completezza per **CQC** è possibile dimostrare un risultato rilevante, cioè che per una certa collezione di sistemi assiomatici, quelli esprimibili nel linguaggio di **CQC**, la completezza sintattica segue dalla categoricità. Ossia, usando le nostre notazioni, avremo che è possibile dimostrare il seguente:

Teorema 1. Dato un sistema formale $\mathbf{T}$ basato su un linguaggio elementare o quasielementare $\mathcal{L}$ e su **CQC** come parte logica, se $\mathbf{T}$ è categorica, allora $\mathbf{T}$ è sintatticamente completa.

La dimostrazione di questo fatto è piuttosto intuitiva. Si consideri, infatti, un sistema $\mathbf{T}$ come da ipotesi e si supponga che non sia sintatticamente completo. Allora esisterà una formula chiusa φ di $\mathbf{T}$ tale che:

$$\mathbf{T} \nvdash \varphi \tag{1}$$

e

$$\mathbf{T} \nvdash \neg\varphi. \tag{2}$$

Dunque, per il teorema di completezza numerabile, avremo che:

$$\mathbf{T} \nvDash \varphi$$

cioè avremo che esiste un modello $\mathcal{M}$ di $\mathbf{T}$ tale che:

$$\mathcal{M} \nvDash \varphi$$

e quindi tale che:

$$\mathcal{M} \models \neg\varphi.$$

Sempre per il teorema di completezza numerabile e per (2) avremo inoltre che c'è un modello $\mathcal{M}'$ di $\mathbf{T}$ tale che:

$$\mathcal{M}' \not\models \neg\varphi$$

e quindi tale che:

$$\mathcal{M}' \models \varphi.$$

Dunque esistono due modelli non-isomorfi di $\mathbf{T}$ e quindi $\mathbf{T}$ non è categorica, come volevasi dimostrare.

Nella sua nota introduttiva a *Gödel *1930c*, Warren Goldfarb ha osservato che questo risultato è in realtà privo di applicazioni non banali in quanto il teorema di Löwenheim-Skolem *all'insù* ci dice che non esistono sistemi formali elementari o quasielementari che siano categorici.[40] Probabilmente a Gödel interessavano più che altro le applicazioni di questo risultato alla logica del second'ordine ed in particolare il seguente:

Teorema 2. Il calcolo predicativo classico del second'ordine, $\mathbf{CQC_2}$, non è semanticamente completo.

Infatti, spiega l'autore, se $\mathbf{CQC_2}$ fosse completo potremmo dimostrare un analogo del Teorema 1 anche per i sistemi formali basati sulla logica del second'ordine. In particolare, e qui ritorna l'osservazione di *Gödel 1929* cui abbiamo accennato sopra, se $\mathbf{CQC_2}$ fosse semanticamente completo avremmo che dalla categoricità dell'aritmetica del second'ordine, $\mathbf{PA_2}$, ne seguirebbe la completezza sintattica. Per il teorema di Dedekind sappiamo che $\mathbf{PA_2}$ è categorica e quindi dovrebbe anche essere sintatticamente completa. Ma, aggiunge Gödel, annunciando così qui per la prima volta i suoi risultati di incompletezza, è possibile dimostrare che ogni estensione dell'aritmetica basata su un insieme finito di assiomi è sintatticamente incompleta, ed in particolare lo sarà $\mathbf{PA_2}$. Dunque la logica del second'ordine, a differenza di quella del prim'ordine, non è semanticamente completa. Usando le parole dell'autore:[41]

[40]Cf. *Goldfarb 1995*.
[41]Cf. *Gödel *1930c* in *Gödel 1995*, pag. 28.

> ... se si potesse dimostrare il teorema di completezza anche per le parti superiori della logica (il calcolo funzionale esteso), allora si potrebbe anche dimostrare in piena generalità che la completezza sintattica segue dal monomorfismo; e poiché noi sappiamo, ad esempio, che il sistema di assiomi di Peano [del second'ordine] è monomorfo, da ciò seguirebbe la risolubilità di ogni problema dell'aritmetica e dell'analisi esprimibile nei *Principia Mathematica*.

E tuttavia:[42]

> ... una tale estensione del teorema di completezza è impossibile, come ho recentemente dimostrato; infatti, ci sono problemi matematici che, pur essendo esprimibili nei *Principia Mathematica* non possono essere risolti con gli strumenti logici dei *Principia Mathematica*.

[42] Cf. *Gödel *1930c* in *Gödel 1995*, pag. 28.

2. Incompletezza

2.1. Introduzione

I più celebri risultati mai ottenuti da Gödel furono i cosiddetti teoremi di incompletezza che egli dimostrò all'età di appena ventiquattro anni. Essi furono comunicati per la prima volta al pubblico dei matematici presenti al congresso di Königsberg nel 1930, prima informalmente, in *Gödel *1930c*, poi ufficialmente, nella breve comunicazione *Gödel 1930b*[43] cui assistette, fra gli altri, John von Neumann che fu uno dei primi a coglierne la portata.

Nel 1931 Gödel pubblicò il famoso articolo "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I" in cui esponeva la dimostrazione del primo teorema di incompletezza in tutti i dettagli ed enunciava il secondo teorema di incompletezza dandone solo uno schizzo di dimostrazione.

Nel 1934, nel corso del suo primo viaggio negli Stati Uniti, Gödel tenne a Princeton, alla presenza di due uditori di eccezione, Stephen C. Kleene e J. Barkley Rosser, un importante ciclo di lezioni sull'incompletezza che contribuirono alla diffusione dei suoi risultati nella comunità dei matematici d'oltreoceano. Le note, trascritte da Kleene e Rosser, di quelle lezioni, dapprima circolarono in forma dattiloscritta fra i logici, poi furono pubblicate in *Davis 1965* col titolo "On undecidable propositions of formal mathematical systems" ed infine furono ripubblicate nel 1986 nel primo volume dei *Collected works*.

Come per il teorema di completezza, cercheremo di ricostruire questi due risultati, prestando particolare attenzione a:

1. i riferimenti impliciti ed espliciti dei testi di Gödel;
2. le varie formulazioni del risultato;
3. la struttura argomentativa delle dimostrazioni;
4. alcune conseguenze matematiche e fondazionali.

Una ragione sufficiente per inserire in questo lavoro un intero capitolo sull'incompletezza va ritrovata in gran parte nel fatto che oggi sono disponibili

[43] Pubblicata col titolo "Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit".

nuove fonti inedite (pubblicate nel 1995 nel III volume dei *Collected works*) in cui Gödel:

- spiega in modo molto accessibile i risultati di incompletezza;
- ne valuta la portata e la generalità;
- ne sviluppa e analizza alcune interessanti conseguenze filosofiche.

Anche qui cercheremo di dare uno schizzo della strategia dimostrativa evitando ogni arbitraria semplificazione o rielaborazione, utilizzando il testo di una conferenza sull'incompletezza del 1931 pubblicata postuma nel 1995 col titolo "Über unentscheidbare Sätze" (*Gödel *1931d*). Se per la completezza Gödel faceva riferimento a due filoni ben distinti della ricerca logico-matematica di inizio secolo, nei lavori sull'incompletezza i riferimenti sono più omogenei e riguardano principalmente i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead e la scuola hilbertiana.

In *Gödel 1930b* vengono citati i *Principia Mathematica*, il sistema **ZF** per la teoria degli insiemi e l'articolo di von Neumann "Zur Hilbertschen Beweistheorie" pubblicato nel 1927 sulla *Mathematische Zeitschrift*.

In *Gödel 1931*[44] troviamo riferimenti più ricchi e precisi. Nella pagina introduttiva Gödel spiega a quali sistemi formali si applichino i suoi risultati. E' curioso il fatto che vengano nominati, da un lato, il sistema dei *Principia Mathematica* (*Whitehead et Russell 1925*) e dall'altro gli assiomi per la teoria degli insiemi (in nota, vengono citati *Fraenkel 1927* e i tre articoli di von Neumann *1925*, *1928* e *1929*), mentre il fatto che i risultati lì esposti si applicassero anche ai sistemi formali *à la* Hilbert viene richiamato solo in nota. Al riguardo vengono citati *Bernays 1923*, *Ackermann 1924*, *von Neumann 1927* e i tre articoli di Hilbert *1922*, *1923* e *1928*.

Abbiamo già parlato di *Hilbert 1929* a proposito della completezza e anche in questo contesto va ricordato che è proprio nella conferenza di Bologna che Hilbert presenta il problema della completezza dell'aritmetica. Nel definire le formule del sistema di riferimento Gödel cita *Łukasiewicz et Tarski 1930*.

A conferma di quanto importante fosse la figura di Hilbert in generale per i matematici dell'epoca ed in particolare per i primi lavori di Gödel, il nostro autore cita ancora *Hilbert et Ackermann 1928* ed inoltre *Hilbert 1926* e *1929*.

[44] Il già citato "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I".

Nella breve nota "Über die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit" (*Gödel 1932b*) l'unico riferimento è quello di Peano nell'ambito della descrizione del sistema formale di base. Nelle già citate lezioni di Princeton del 1934 gli unici riferimenti sono *Herbrand 1931*, *Carnap 1934*, *Pressburger 1930* e *Skolem 1931*.

In *Gödel *1931d* non c'è alcun riferimento, mentre nell'articolo inedito e non datato, pubblicato postumo col titolo di "Undecidable diophantine propositions" (*Gödel *1939c*) vengono citati (ma senza precisi rimandi bibliografici) Hilbert, Pell, Herbrand, Church e Turing.

Nella nota aggiuntiva del 1963 a *Gödel 1931* si fa riferimento a *Turing 1937* ed al celebre articoletto di Gödel "Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics" (1946). Nel Poscritto del 1964 a *Gödel 1934* vengono richiamati alcuni fra i più importanti titoli della letteratura sull'incompletezza e sul problema della decisione dagli anni '30 fino agli anni '60. Vi troviamo *Turing 1937*, *Post 1936*, *Church 1936*, *Kleene 1936*, *Rosser 1936*, *Tarski et alii 1953*, *Hilbert et Bernays 1939*, *Kreisel 1958* ed infine *Davis 1965*.

In *Gödel 1972a*, tre brevi note dedicate, rispettivamente, ad una versione più generale del secondo teorema di incompletezza, al problema della necessità di estendere la matematica con nuovi assiomi e ad un "errore filosofico" di Turing l'unico riferimento è il già citato *Turing 1937*.

2.2. Formulazioni dei teoremi di incompletezza

Consideriamo ora alcune formulazioni dei due teoremi di incompletezza. In *Gödel 1930b* possiamo leggere:[45]

> ... se agli assiomi di Peano aggiungiamo la logica dei *Principia Mathematica* ... e l'assioma di scelta otteniamo un sistema formale **S** per cui valgono i seguenti teoremi: I. il sistema **S** non è completo; cioè esso contiene proposizioni A per le quali non è dimostrabile né A né $\neg A$ e, in particolare, esso contiene problemi indecidibili della semplice struttura $\exists x F(x)$ dove x varia sui numeri naturali. II. Persino se ammettiamo tutti gli strumenti logici dei *Principia Mathematica* nella metamatematica, non esiste una dimostrazione di noncontraddittorietà per il sistema **S**.

[45]Cf. *Gödel 1986*, pagg. 140,142.

In questo articoletto il primo teorema di incompletezza viene formulato per un particolare sistema formale, tuttavia viene poi generalizzato nel senso che:[46]

> ... il teorema I vale anche per tutte le estensioni ω-consistenti del sistema **T** che si ottengono aggiungendo un numero infinito di assiomi, purché la classe di assiomi aggiunta sia decidibile.

Le condizioni che vengono qui presentate come sufficienti affinché un sistema formale **T** sia incompleto sono tre:

1. **T** deve essere un'estensione di un opportuno sistema formale per l'aritmetica (cioè deve essere un sistema capace di esprimere alcuni fatti aritmetici elementari);

2. **T** deve essere ω-consistente ossia tale che non esista nessun predicato $P(x)$ del linguaggio di **T** tale che:

   (a) per ogni numero naturale n, $\mathbf{T} \vdash P(n)$, e

   (b) $\mathbf{T} \vdash \exists x \neg P(x)$;

3. **T** può avere un numero finito di assiomi oppure un numero infinito di assiomi purché l'insieme degli assiomi sia decidibile.

In *Gödel 1931* il primo teorema di incompletezza viene invece formulato così:[47]

> Teorema VI. Per ogni classe k ricorsiva, ω-consistente di *formule* esistono *segni di classe* ricorsivi r tali che né vGen$r$ né Neg(vGen$r$) appartengono a Flg(k) (dove v è la *variabile libera* di r).

Ciò significa che per ogni sistema formale **T** ω-consistente, i cui assiomi costituiscano una classe decidibile esistono formule non quantificate $R(x)$ tali che né $\forall x R(x)$ né $\neg \forall x R(x)$ appartiene all'insieme dei teoremi di **T**. Detto ancor più semplicemente: *per ogni sistema formale* **T** *basato su di un insieme ω-consistente e decidibile di assiomi, esistono formule puramente universali che il sistema formale* **T** *non dimostra né refuta.* Per usare le parole di Gödel sempre nel suo *1931*, in ogni sistema formale definito come sopra: "esistono

[46]Cf. *Gödel 1930b* in *Gödel 1986*, pag. 142.
[47]Cf. *Gödel 1986*, pag. 172.

problemi relativamente semplici di teoria degli interi che non possono essere decisi sulla base degli assiomi".[48] Il secondo teorema di incompletezza, sempre in *Gödel 1931* recita così:[49]

> Teorema XI. Sia k una qualsiasi classe ricorsiva e consistente di formule; allora la formula proposizionale che stabilisce che k è consistente non è k-dimostrabile.

Ossia, *in ogni sistema formale noncontraddittorio e basato su un insieme decidibile di assiomi, la proposizione che ne stabilisce la noncontraddittorietà non è dimostrabile* e quindi fa parte dell'insieme delle proposizioni formalmente indecidibili del sistema.

Sempre nell'articolo del '31 Gödel osserva che nella dimostrazione del primo teorema di incompletezza si usano solo tre proprietà del sistema formale **T** in questione:

1. il fatto che gli assiomi e le regole di **T** siano decidibili e cioè che l'insieme dei codici (numeri di Gödel)[50] degli assiomi e delle regole del sistema sia definibile ricorsivamente;

2. il fatto che ogni relazione ricorsiva (primitiva) sia rappresentabile (cioè definibile) nel sistema **T**;

3. il fatto che il sistema **T** sia ω-consistente.

Dunque qui le condizioni di applicabilità del primo teorema di incompletezza vengono precisate nel senso che alla decidibilità dell'insieme degli assiomi vien sostituita la definibilità ricorsiva dell'insieme (dei numeri di Gödel) degli assiomi ed alla richiesta che **T** sia un'estensione di un'opportuno sistema formale per l'aritmetica si sostituisce la condizione di rappresentabilità o definibilità delle relazioni ricorsive (primitive) nel sistema **T**.

Nelle lezioni di Princeton del '34 i due teoremi di incompletezza non vengono formulati esplicitamente e distintamente, tuttavia nel primo paragrafo Gödel scrive:[51]

---

[48]Cf. *Gödel 1986*, pag. 144.

[49]Cf. *Gödel 1986*, pag. 192.

[50]Da qui in avanti col termine "gödeliano" o "numero di Gödel" di un certo simbolo (rispettivamente, di una certa successione di simboli o di una successione di successioni di simboli) del linguaggio $\mathcal{L}$ di un certo sistema formale **T**, intendiamo un numero naturale n che corrisponde a quel simbolo (rispettivamente, a quella successione di simboli o a quella successione di successioni di simboli), sulla base di un'opportuna codifica effettiva del linguaggio $\mathcal{L}$.

[51]Cf. *Gödel 1934* in *Gödel 1986*, pag. 346.

> Dimostreremo ... che (sotto condizioni da precisare) un sistema in cui sono esprimibili tutte le proposizioni dell'aritmetica come formule sensate non è completo.

Alle "condizioni" che un sistema formale deve soddisfare affinché gli si possano applicare gli argomenti di incompletezza Gödel dedica qui un intero paragrafo. Nel paragrafo 6 di *Gödel 1934* troviamo ben sei condizioni, ossia:

1. fissata una certa codifica (gödelizzazione) dei simboli del linguaggio del sistema formale $\mathbf{T}$, la classe degli assiomi e la "relazione di conseguenza immediata" devono essere ricorsive;

2. ci deve essere una certa successione di formule ben-formate φ_n tali che la relazione fra il numero naturale n e il numero di Gödel di φ_n sia ricorsiva;

3. ci devono essere simboli $\neg, x, y$ tali che ad ogni relazione ricorsiva R in due variabili corrisponda una formula $R^*(x, y)$ di $\mathbf{T}$ tale che, se p e q stanno nella relazione R allora, se indichiamo con $\lceil p\rceil$ e $\lceil q\rceil$ i numeri di Gödel di p e q, si ha:
$$\mathbf{T} \vdash R^*(\lceil p\rceil, \lceil q\rceil),$$
   mentre se p e q non stanno nella relazione R, allora:
$$\mathbf{T} \vdash \neg R^*(\lceil p\rceil, \lceil q\rceil);$$

4. ci deve essere un simbolo $\forall$ tale che se $\mathbf{T} \vdash \forall x R(x)$, dove R è un simbolo che rappresenta una relazione ricorsiva, allora, per ogni numero naturale n,
$$\mathbf{T} \vdash R(\lceil n\rceil)$$
   dove $\lceil n\rceil$ indica il termine che sta per il numero di Gödel che rappresenta il numero naturale n nel sistema $\mathbf{T}$;

5. il sistema deve essere noncontraddittorio nel senso che, se R^* è un simbolo che rappresenta una relazione binaria ricorsiva R, allora non si dà il caso che:
$$\mathbf{T} \vdash R^*(\lceil p\rceil, \lceil q\rceil)$$
   e
$$\mathbf{T} \vdash \neg R^*(\lceil p\rceil, \lceil q\rceil);$$

6. $\mathbf{T}$ deve inoltre essere ω-consistente nel senso che se P^* è un simbolo che rappresenta una relazione ricorsiva unaria P allora non si dà il caso che:

$$\mathbf{T} \vdash \neg \forall x P^*(x),$$

e per ogni numero naturale n:

$$\mathbf{T} \vdash P^*(\lceil 0 \rceil),$$

$$\mathbf{T} \vdash P^*(\lceil 1 \rceil),$$

$$\mathbf{T} \vdash P^*(\lceil 2 \rceil),$$

$$...$$

$$...$$

$$\mathbf{T} \vdash P^*(\lceil n \rceil)$$

$$...$$

Come abbiamo visto, al di là delle differenze formali delle varie enunciazioni dei risultati di incompletezza, quello che le contraddistingue maggiormente sono le condizioni di applicabilità dei teoremi. Su tali condizioni Gödel continuò a riflettere e a lavorare anche molti anni dopo la pubblicazione dei teoremi di incompletezza, probabilmente in quanto era proprio su quel terreno che si giocava la maggiore o minore generalità di quei risultati.

Ulteriori ricerche già a partire dagli anni '30 ad opera di Hilbert e Bernays portarono all'individuazione, nell'ambito della dimostrazione rigorosa del secondo teorema di incompletezza, delle cosiddette "condizioni di derivabilità" oggi note anche come "condizioni di Löb" che il predicato di dimostrabilità *Bew* deve soddisfare.

Nel corso degli anni '50 Georg Kreisel, Solomon Feferman, Andrzej Mostowski ed altri individuarono dei predicati di dimostrabilità sulla base dei quali non era possibile dimostrare il secondo teorema di incompletezza, confermando quindi che le attenzioni gödeliane per le condizioni di applicabilità dei suoi risultati erano tutt'altro che immotivate.

2.3. La strategia dimostrativa

Per illustrare brevemente la strategia usata da Gödel nella dimostrazione del suo primo teorema di incompletezza, ci serviremo qui dell'inedito *Gödel *1931d*, databile orientativamente nei primi anni Trenta, che costituisce forse lo schema espositivo di una conferenza divulgativa. In effetti fra il gennaio 1931 e l'aprile 1934 Gödel tenne varie conferenze sull'incompletezza ad esempio a Vienna (il 15 gennaio 1931), a Bad Elster (il 15 settembre 1931), a New York (il 18 aprile 1934) e a Washington (il 20 aprile 1934).

In *Gödel *1931d* il primo teorema di incompletezza viene enunciato nella sua forma più semplice e lineare ossia:[52]

> Ogni sistema formale con un numero finito di assiomi che contenga l'aritmetica dei numeri naturali è incompleto.

Il risultato viene poi opportunamente generalizzato come segue:[53]

> Lo stesso vale anche per sistemi con infiniti assiomi purché la regola per gli assiomi (cioè la legge sulla base della quale viene generato l'insieme infinito degli assiomi) sia costruttiva (in un senso che può essere completamente precisato).

Infine Gödel aggiunge un'importante osservazione a proposito della natura costruttiva del primo risultato di incompletezza:[54]

> Per ogni sistema formale che soddisfi le assunzioni enunciate si può specificare in modo effettivo una proposizione indecidibile e la proposizione così costruita appartiene all'aritmetica dei numeri naturali.

Ossia, non solo si può dimostrare che, in linea di principio, tutti i sistemi formali ω-consistenti, sufficientemente potenti e basati su un insieme di assiomi ricorsivo sono incompleti, ma per essi è possibile fornire una dimostrazione costruttiva di questa incompletezza mediante un particolare esempio di proposizione che non può essere né dimostrata né refutata sulla base degli assiomi.

Gödel traccia poi le linee essenziali della dimostrazione di questo risultato.

1. Per prima cosa si fissa una codifica del linguaggio $\mathcal{L}$ di un certo sistema formale $\mathbf{T}$ e cioè si attribuisce un numero naturale distinto ad ogni

[52] Cf. *Gödel 1995*, pag. 30.
[53] Cf. *Gödel 1995*, pag. 30.
[54] Cf. *Gödel 1995*, pag. 32.

simbolo del linguaggio in modo tale da poter determinare per ogni simbolo il suo numero e viceversa per ogni numero naturale se esso codifica qualche simbolo del linguaggio e quale. La codifica permetterà di assegnare un numero non solo ai simboli primitivi ma anche ad ogni successione finita di simboli e ad ogni successione finita di successioni finite di simboli. Dunque la codifica o gödelizzazione fornirà anche una numerazione delle formule e delle dimostrazioni del sistema formale **T**.

2. Ad ogni nozione sintattica riguardante il sistema **T** (ad esempio, essere una formula, essere un assioma, essere derivabile mediante una regola di inferenza, essere un teorema) verrà associata, mediante la codifica di cui sopra, una nozione aritmetica. In tal modo, la sintassi di **T** diventa esprimibile aritmeticamente e visto che **T**, per definizione, deve contenere un'opportuna porzione di aritmetica, le nozioni sintattiche e metamatematiche di **T** risulteranno esprimibili in **T** stessa.

   Gödel porta come esempio di relazione metamatematica relativa a **T** esprimibile in **T**, la relazione "la formula φ è derivabile dalla formula ψ mediante le regole di inferenza". Ad essa, spiega l'autore, corrisponderà la relazione aritmetica R la quale sussiste fra i numeri naturali m e n se e solo se la formula di numero di Gödel n è derivabile dalla formula di numero di Gödel m.

3. Si considerano poi tutte le formule di **T** con una sola variabile libera ed un loro ordinamento basato sui numeri ad essi assegnati:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ...$$

4. Si definisce quindi la classe K come:

$$n \in K \leftrightarrow \neg Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_n(n)),$$

   dove $Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_n(n))$ sta per "la formula $\varphi_n(n)$ è dimostrabile in **T**". Questa classe K, definita in termini del predicato di derivabilità $Bew_{\mathbf{T}}$ risulta essere dimostrabilmente aritmetica, cioè c'è una classe esprimibile mediante somma, prodotto, connettivi e quantificatori che è "coestensiva con K".

5. Dall'ipotesi secondo cui **T** è un'estensione di un'opportuna parte dell'aritmetica, segue che fra le formule della successione $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...$

ce ne sarà una $\varphi_k(x)$ tale che:

$$\varphi_k(x) \leftrightarrow x \in K$$

e quindi tale che:

$$\varphi_k(n) \leftrightarrow \neg Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_n(n))$$

per qualsiasi numero naturale n.

6. In particolare, per $n = k$, avremo che:

$$\varphi_k(k) \leftrightarrow \neg Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_k(k)).$$

7. Ora sappiamo che, se si avesse che:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi_k(k),$$

allora si avrebbe anche che:

$$\mathbf{T} \vdash \neg Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_k(k))$$

ossia, informalmente parlando, se $\varphi_k(k)$ fosse dimostrabile in **T**, allora in **T** si dimostrerebbe anche che $\varphi_k(k)$ non è dimostrabile in **T**. Se si assume che **T** sia corretto, cioè che dimostri solo cose vere, allora avremo che $\varphi_k(k)$ è dimostrabile in **T** e, ad un tempo, che $\varphi_k(k)$ non è dimostrabile in **T**, ma ciò è assurdo.

8. Analogamente, se:

$$\mathbf{T} \vdash \neg\varphi_k(k),$$

allora:

$$\mathbf{T} \vdash Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_k(k))$$

e quindi, sempre sotto l'ipotesi della correttezza del sistema **T**, otterremmo che sia $\varphi_k(k)$ che $\neg\varphi_k(k)$ sono dimostrabili in **T**. Assurdo.

Dunque possiamo concludere che la proposizione $\varphi_k(k)$ è formalmente indecidibile sulla base degli assiomi del sistema formale **T**.

Gödel puntualizza che:[55]

[55]Cf. *Gödel 1995*, pag. 34.

> Nella dimostrazione si è tacitamente assunto che ogni proposizione dimostrabile in **T** sia vera. Come un'attenta ricerca mostra, questa assunzione può essere rimpiazzata da un'altra molto più debole la quale richiede solo poco più della noncontraddittorietà del sistema considerato.

Chiaramente qui l'autore stà alludendo all'ipotesi di ω-consistenza, la quale a sua volta, come dimostrato in *Rosser 1936*, può essere ulteriormente indebolita alla semplice noncontraddittorietà.

Negli scritti di Gödel, non si trova lo svolgimento dettagliato della dimostrazione del secondo teorema di incompletezza. Sia nell'articolo del '31 che nelle lezioni del '34 l'argomento è solo accennato nei seguenti termini.[56]

Sia $\varphi_k(k)$ la proposizione formalmente indecidibile costruita come sopra per un certo sistema formale **T** sufficientemente potente. Sia $Wid_{\mathbf{T}}$ la proposizione che esprime la noncontraddittorietà di **T** nei seguenti termini:

$$\forall x \forall y \forall z \neg(B(x,y) \wedge B(z, Neg(y)))$$

dove $B(x,y)$ sta per "x è (il numero di Gödel di) una dimostrazione della formula di (numero di Gödel) y" e $Neg(y)$ sta per "il numero di Gödel della negazione della formula (di numero di Gödel) y". Essendo $Wid_{\mathbf{T}}$ un'affermazione del fatto che il sistema **T** è noncontraddittorio, col primo teorema di incompletezza si è dimostrato che:

$$\forall x \forall y \forall z \neg(B(x,y) \wedge B(z, Neg(y))) \rightarrow \forall x \neg B(x, \varphi_k(k)).$$

Ma se fosse dimostrabile $Wid_{\mathbf{T}}$, allora avremmo che per *modus ponens* sarebbe dimostrabile $\forall x \neg B(x, \varphi_k(k))$ e quindi $\varphi_k(k)$, il che è impossibile. Dunque, conclude Gödel, $Wid_{\mathbf{T}}$ non è dimostrabile in **T** a meno che **T** "non contenga una contraddizione".

2.4. Incompletezza e paradossi logici

Nel primo paragrafo del suo *1931* Gödel osserva che:[57]

> L'analogia di questo argomento [l'argomento informale per dimostrare il primo teorema di incompletezza] con l'antinomia di Richard salta subito all'occhio. Esso è anche strettamente correlato con il "Mentitore" ... abbiamo di fronte a noi una proposizione che dice di se stessa di non essere dimostrabile.

[56] Seguiamo qui l'argomento esposto nelle lezioni di Princeton.

[57] Cf. *Gödel 1986*, pag. 148.

Ci si potrebbe quindi legittimamente chiedere se non sia forse presente nell'argomento una qualche forma di circolarità viziosa. Lo stesso Gödel affronta il problema nella nota 15 di *Gödel 1931* e lo risolve dicendo che:[58]

> ... una tale proposizione non coinvolge nessuna circolarità viziosa, infatti inizialmente essa asserisce solo che una certa formula ben definita ... è indimostrabile. Solo successivamente ... risulta che questa formula è precisamente quella mediante la quale la proposizione stessa era espressa.

E di fatto, la formula:

$$\neg Bew_{\mathbf{T}}(\varphi_k(k))$$

non parla direttamente della propria dimostrabilità, bensì della proprietà aritmetica che codifica la proprietà sintattica "essere un teorema" e del proprio numero di Gödel. Dunque, precisando quanto suggeritoci dall'autore nell'ultima citazione qui sopra, la proposizione $\varphi_k(k)$ non è una proposizione che dice di se stessa "io non sono dimostrabile" (nel qual caso ci sarebbe circolarità), ma è piuttosto una proposizione che dice "il mio numero di Gödel non è il numero di Gödel di una formula dimostrabile in **T**". Dunque la presunta circolarità scompare grazie al meccanismo di codifica del linguaggio e della sintassi di **T**.

Gödel torna sull'argomento della relazione dei teoremi di incompletezza coi paradossi logici nelle lezioni di Princeton, dove gli dedica un intero paragrafo. Qui l'autore considera in particolare il paradosso del mentitore e afferma che:[59]

> La soluzione di Whitehead e Russell che una proposizione non possa dire qualcosa su se stessa è troppo drastica.

Gödel afferma inoltre che:[60]

> E' persino possibile, per una qualsiasi proprietà metamatematica P che sia esprimibile nel sistema, costruire una proposizione che dica di se stessa di avere questa proprietà.

Si tratta di quello che è oggi noto come *teorema del punto fisso*[61] che può essere usato per semplificare notevolmente la dimostrazione del primo teorema di incompletezza. Gödel procede poi esponendo un notevole argomento che fornisce ad un tempo:

---

[58] Cf. *Gödel 1986*, pag. 150.

[59] Cf. *Gödel 1934* in *Gödel 1986*, pag. 362.

[60] Cf. *Gödel 1986*, pag. 362-363.

[61] Come scrive lo stesso Gödel in una nota aggiunta del 1964, questo fatto venne osservato per la prima volta in *Carnap 1934a*.

1. una spiegazione e soluzione del paradosso del Mentitore,
2. un argomento informale per il primo teorema di incompletezza,
3. un'anticipazione del teorema di Tarski.

Fissata una certa proprietà P, sia $F(\varphi_n)$ una formula che significa: "n è il numero di Gödel di una formula che gode della proprietà P". Supponiamo ora che la formula $F(\varphi_k(k))$ abbia numero di Gödel p, allora la formula $F(\varphi_p(p))$ dice di se stessa: "io godo della proprietà P". Questo argomento può essere realizzato solo se la proprietà P è esprimibile nel sistema $\mathbf{T}$. Di conseguenza, il paradosso del mentitore si risolve *non* eliminando ogni tipo di autoriferimento, *bensì* affermando che la nozione o proprietà metamatematica "essere vero in $\mathbf{T}$" non è esprimibile in $\mathbf{T}$. In un certo senso, osserva Gödel, il paradosso stesso può essere considerato come una dimostrazione del fatto che la nozione di "essere una proposizione falsa in $\mathbf{T}$" non può essere espressa in $\mathbf{T}$.

Secondo Gödel, questo ragionamento costituisce anche "un argomento euristico per l'esistenza di proposizione indecidibili". Supponiamo infatti che $W_{\mathbf{T}}(\varphi_n)$ sia una formula che significa: "la formula con numero di Gödel n è vera". Ossia, se n è il numero di Gödel della formula φ, allora

$$\varphi \leftrightarrow W_{\mathbf{T}}(\varphi_n).$$

Se applichiamo la procedura vista sopra alla formula $\neg W_{\mathbf{T}}(\varphi_k(k))$ otteniamo la formula ψ della forma:

$$\neg W_{\mathbf{T}}(\varphi_p(p))$$

dove p è il numero di Gödel di $\neg W_{\mathbf{T}}(\varphi_k(k))$. La formula ψ dice di essere una formula falsa e quindi conduce ad una situazione paradossale. Dunque il predicato $W_{\mathbf{T}}$ *non* è esprimibile in $\mathbf{T}$ mentre il predicato $Bew_{\mathbf{T}}$ lo è. Di conseguenza in $\mathbf{T}$ non esiste una formula che abbia come estensione la classe $\mathcal{W}$ di tutti e soli i numeri di Gödel delle formule vere, mentre esiste una formula che ha come estensione la classe $\mathcal{B}$ di tutti e soli i numeri di Gödel delle formule dimostrabili. Quindi le due classi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{B}$ sono distinte e se assumiamo che $\mathbf{T}$ sia corretta, cioè che ogni formula dimostrabile sia vera, otteniamo che:

$$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{W}$$

e quindi che in $\mathbf{T}$ c'è almeno una proposizione vera φ che non è dimostrabile. Dunque la formula $\neg\varphi$ sarà falsa e sempre per correttezza non sarà quindi dimostrabile. Dunque in $\mathbf{T}$ c'è una formula φ indecidibile.

Chiaramente, come osserva Gödel nella nota 26 (aggiunta nel 1964 al testo delle lezioni di Princeton), in tal modo si è ottenuta una dimostrazione del fatto che esistono proposizioni indecidibili in **T** ma "nessun esempio specifico di una proposizione indecidibile".[62]

2.5. Equivalenti matematici delle proposizioni indecidibili

Nelle lezioni di Princeton Gödel presenta un'importante passo avanti nello studio del fenomeno dell'incompletezza. Una possibile obiezione ai teoremi di incompletezza potrebbe riguardare la rilevanza matematica di proposizioni come quelle presentate in *Gödel 1931*. Oggi, in seguito alla scoperta di Jeff Paris e Leo Harrington,[63] sappiamo che esistono proposizioni formalmente indecidibili di **PA** dotate di un genuino "contenuto matematico", ma già Gödel affrontò questo problema e di fatto ottenne risultati positivi. Nel paragrafo 8 del suo *1934* egli dimostrò l'esistenza di una proposizione formalmente indecidibile di **T** relativa alle soluzioni intere di un'equazione diofantea. Per la precisione Gödel dimostrò il seguente:

Teorema. Se $\varphi_k(k)$ è la formula indecidibile del primo teorema di incompletezza allora: (i) esiste una funzione diofantea $F(x_1, ..., x_n) = 0$, dove $F(x_1, ..., x_n)$ è un polinomio a coefficienti interi, (ii) esiste una successione di quantificatori $Q_1x_n....Q_nx_n$, e

$$\varphi_k(k) \quad \leftrightarrow \quad Q_1x_n....Q_nx_n(F(x_1, ..., x_n) = 0).$$

Di fatto, come dimostrò Yuri Matiyasievich nel suo "Enumerable sets are Diophantine" (1970) questo risultato può essere rafforzato nel senso che il prefisso $Q_1x_1...Q_nx_n$ può essere costituito di soli quantificatori esistenziali.

2.6. Funzioni ricorsive primitive e ricorsive generali

In *Gödel 1931* l'autore introduce la nozione di *funzione ricorsiva* nei seguenti termini:[64]

[62]Cf. *Gödel 1934* in *Gödel 1986*, p.363.

[63]Cf. Jeff Paris e Leo Harrington, "A mathematical incompleteness in Peano arithmetic", in *Barwise 1977*, pagg. 1133-1142.

[64]Cf. *Gödel 1986*, pag. 159.

> Una funzione numerica ϕ si dice *ricorsiva* se esiste una successione finita di funzioni numeriche $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ che termina con ϕ ed ha la proprietà che ogni funzione ϕ_k della successione è definita ricorsivamente in termini di due delle funzioni precedenti, oppure si ottiene per sostituzione da funzioni precedenti oppure, infine, è una costante o la funzione successore $x + 1$.

Si tratta della definizione di quelle che oggi vengono chiamate *funzioni ricorsive primitive*[65] le quali costituiscono una sottoclasse propria di quelle che nella terminologia moderna vengono dette *funzioni ricorsive.* Queste ultime vennero introdotte col nome di *funzioni ricorsive generali* ancora una volta da Gödel nelle lezioni del '34.[66] Lo spunto per questa generalizzazione della sua precedente nozione di funzione ricorsiva (primitiva) gli venne dalla cosiddetta *funzione di Ackermann* e cioè una funzione calcolabile ma non ricorsiva (primitiva). L'autore dà infatti un esempio di funzione ricorsiva generale non ricorsiva primitiva molto simile a quella individuata da Ackermann nel suo celebre articolo "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen" (1928). Gödel considera la funzione $\phi(x, y)$ definita con una *doppia recursione inscatolata* della seguente forma:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= \psi(y) \\ \phi(x + 1, 0) &= \chi(x) \\ \phi(x + 1, y + 1) &= \phi(x, \phi(x + 1, y)), \end{aligned}$$

dove $\psi(x)$ e $\chi(x)$ sono funzioni ricorsive previamente definite. Egli osserva che intuitivamente questa funzione non è ricorsiva primitiva in quanto si tratta di una funzione in cui la recursione agisce *simultaneamente* su due variabili, e di fatto ciò era stato dimostrato da Ackermann nel 1928. Il problema che Gödel si pone in questo ultimo paragrafo delle lezioni sull'incompletezza *non* è quello di determinare una nozione di ricorsività che catturi la nozione informale di "funzione computabile", bensì quello di stabilire "che cosa si intende per ogni funzione ricorsiva". Dunque qui l'autore è interessato a estendere opportunamente la nozione di funzione ricorsiva (primitiva) al fine di catturare tutte le possibili forme di definizione per recursione in un unico concetto.

[65] Con l'espressione *funzioni ricorsive primitive* Stephen C. Kleene indicò la classe delle funzioni ricorsive "primitivamente" introdotte da Gödel nel 1931.

[66] L'ultimo paragrafo delle lezioni di Princeton è intitolato infatti "Funzioni ricorsive generali".

L'idea da cui parte Gödel, suggeritagli da Herbrand in una lettera del 1931,[67] viene formulata a pagina 368 di *Gödel 1934* nei seguenti termini:

> Se ϕ denota una funzione incognita e $\psi_1, ..., \psi_k$ sono funzioni note [e ricorsive] e se le ψ e la ϕ vengono sostituite in un'altra [funzione] nel modo più generale e certe coppie delle funzioni risultanti vengono eguagliate, allora se l'insieme risultante di equazioni ha una e una sola soluzione per ϕ, ϕ è una funzione ricorsiva [generale].

In tal modo, spiega Gödel, si potrebbe ad esempio definire la funzione $\phi(x, y)$ come *ricorsiva nel senso di Herbrand* se e solo se esistono funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 tali che:

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \psi_1(x) \\ \phi(0, y+1) &= \psi_2(x) \\ \phi(1, y+1) &= \psi_3(x) \\ \phi(x+2, y+1) &= \psi_4(\phi(x, y+2), \phi(x, \phi(x, y+2))). \end{aligned}$$

L'autore propone di sottoporre questa nozione a due restrizioni, ossia:

A. il membro sinistro di ogni equazione definitoria di ϕ dovrà avere la seguente forma: $\phi(\psi_{i1}(x_1, ..., x_n), ..., \psi_{il}(x_1, ..., x_n))$;

B. le n-uple di possibili argomenti di ϕ devono poter essere ordinate in modo tale che la computazione del valore di ϕ per ogni data n-upla di argomenti dipenda solo dai valori di ϕ per le n-uple precedenti di argomenti.

La nozione così caratterizzata da Gödel risultò essere dimostrabilmente equivalente alle nozioni elaborate in quegli stessi anni da Church (λ-definibilità), Kleene (ricorsività generale definita in termini di sostituzione, recursione e minimalizzazione) e Turing (Turing-computabilità).

Fu solo dopo la scoperta della nozione di *macchina di Turing* e di quella di *funzione Turing-computabile* che Gödel prese in considerazione la possibilità che la sua nozione di funzione ricorsiva generale potesse catturare la nozione informale di funzione computabile.[68]

[67] Cf. al riguardo l'epistolario Gödel-Herbrand pubblicato in *Gödel 2003a*, pagg. 14-25. Si veda inoltre la nota introduttiva di Sieg sempre in *Gödel 2003a*, pagg. 3-13.

[68] Ossia quella che oggi è nota come tesi di Church o tesi di Turing.

2.7. Osservazioni sulla generalità dei risultati di incompletezza

Come già accennato nel paragrafo dedicato alle condizioni di applicabilità dei teoremi di incompletezza Gödel, fin dai primi anni Trenta, si preoccupò di approfondire il problema della generalità dei suoi risultati. Su questo tema egli scrisse una breve osservazione aggiunta in nota alla traduzione in inglese di *Gödel 1932b* e successivamente ripubblicata nel 1990 col titolo "The best and most general version of the unprovability of consistency in the same system".[69]

Questa nota è dedicata al secondo teorema di incompletezza ed in particolare ad alcuni suoi raffinamenti che, come afferma Solomon Feferman nella sua nota introduttiva, "ne aumentano la portata".[70] Gödel osserva che:[71]

> Sotto le sole ipotesi che **PA** (la teoria dei numeri) sia ricorsivamente traducibile in modo iniettivo in **T**, preservando in tale direzione la dimostrabilità, la noncontraddittorietà (nel senso della non-dimostrabilità di una proposizione e della sua negazione) anche di sistemi molto potenti **T** *può* essere dimostrabile in **T** e addirittura nella teoria dei numeri ricorsiva.

Questa affermazione sembrerebbe essere in contraddizione col secondo teorema di incompletezza, ma di fatto non è così. Quello che, presumibilmente, Gödel intende mettere in evidenza è il fatto che l'applicabilità del suo secondo risultato di incompletezza dipende essenzialmente dalla presentazione del sistema **T** o, per essere più precisi, dalla struttura intensionale del predicato di dimostrabilità $Bew_{\mathbf{T}}$. Come già accennato sopra, i primi ad aver individuato delle condizioni di derivabilità sufficienti per la dimostrazione del secondo teorema di incompletezza furono Hilbert e Bernays nel loro *1939*. Altre condizioni di derivabilità furono determinate nel 1955 da Martin H. Löb nel suo articolo "Solution of a problem of Leon Henkin".[72] Oggi le condizioni di derivabilità per un dato sistema formale **T** vengono normalmente formulate come segue:[73]

D1 $\mathbf{T} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{T} \vdash Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

[69] Questa osservazione è stata trovata, assieme ad altre due, allegata all'articolo inedito del 1972 sulla "Dialectica interpretation" dell'aritmetica di Peano.

[70] Cf. *Feferman 1990*, pagg. 281-287.

[71] Cf. *Gödel 1972a* in *Gödel 1990*, pag. 305.

[72] Cf. *Löb 1955*.

[73] Cf. *Smorynski 1977*.

D2 $\mathbf{T} \vdash Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

D3 $\mathbf{T} \vdash Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner) \rightarrow Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Nel corso degli anni Sessanta furono scoperti esempi di sistemi che non soddisfano una o più delle condizioni di derivabilità nei quali è possibile dimostrare la noncontraddittorietà del sistema all'interno del sistema stesso.[74] Si tratta di sistemi in cui rispetto ai sistemi formali *à la* Hilbert vengono modificati:

- l'insieme delle regole che generano i teoremi, oppure
- la descrizione dell'insieme degli assiomi, oppure
- la descrizione dell'insieme delle dimostrazioni.

Il risultato citato da Gödel nel suo *1972a* costituisce una generalizzazione del secondo teorema di incompletezza volta in qualche modo a dimostrare che, nonostante questi nuovi risultati, il programma di Hilbert resta comunque compromesso. Si tratta del seguente:

Teorema. Chiamo *noncontraddittorietà esterna* di un sistema formale $\mathbf{T}$ la seguente proprietà: per ogni equazione $t = s$ dimostrata in $\mathbf{T}$ utilizzando solo le regole del calcolo equazionale, $t = s$ è corretta per ogni istanza numerica. Se $\mathbf{T}$ contiene l'aritmetica ricorsiva primitiva **PRA** ed è esternamente noncontraddittorio, allora un'istanza della noncontraddittorietà esterna di $\mathbf{T}$ non è dimostrabile in $\mathbf{T}$.

Detto altrimenti, come spiega Feferman nel suo *1990*, Gödel ha dimostrato che, se assumiamo che:

1. $\mathbf{T}$ è un sistema formale contenente **PRA**;
2. $\mathbf{T}$ è chiuso rispetto alle regole del calcolo equazionale;
3. se f è una funzione ricorsiva primitiva, allora:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x(f(x) = 0) \Rightarrow \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, (f(n) = 0);$$

[74] Al riguardo vanno citati almeno l'articolo di Gaisi Takeuti "On the fundamental conjecture of GCL" (1955), quello di Feferman "Arithmetization of metamathematics in a general setting" (1960) e infine la monografia di Kreisel *Mathematical logic* (1965). Si vedano inoltre *Kreisel et Takeuti 1974*, *Jeroslow 1975*, *Smorynski 1977* e *Boolos 1979*.

4. la formula φ ha la forma $\forall x(f(x) = 0)$ per f ricorsiva primitiva;

allora un'istanza dello schema di riflessione:

$$Bew_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi$$

è indimostrabile in **T**.

Gödel sottolinea il fatto che è proprio la noncontraddittorietà esterna (il punto 3 di cui sopra) la proprietà essenziale per il programma di Hilbert. Di conseguenza, come osservato da Feferman:[75]

> Ciò che Gödel realizza in questa osservazione è il fatto di mostrare, in modo ancor più generale, che non si può sperare di dimostrare la noncontraddittorietà esterna di **T**, purché naturalmente essa valga per **T**. Quindi, rispetto al programma di Hilbert, Gödel può tranquillamente asserire di aver ottenuto "la versione migliore e più generale" del suo secondo teorema di incompletezza.

Giustamente Feferman nota anche che qui Gödel trascura ulteriori generalizzazioni dei teoremi di incompletezza, da un lato, per sistemi formali costruttivi[76] e, dall'altro, in ambiti che esulano dal programma di Hilbert.[77]

Un secondo importante senso[78] in cui il risultato visto sopra generalizza il teorema di incompletezza sta nel fatto di applicarsi a sistemi molto più deboli di **PA** come ad esempio **PRA**, che, come vedremo, Gödel considerava una possibile formalizzazione dell'aritmetica finitaria.

[75]Cf. *Feferman 1990* in *Gödel 1990*, pag. 286.
[76]Cf. al riguardo *Rosser 1937* e *Mostowski 1952*.
[77]Cf. al riguardo *Feferman 1962* e *Kreisel et Levy 1968*.
[78]Sottolineato dallo stesso Gödel.

3. Matematica costruttiva

In questo terzo capitolo tratteremo una serie di contributi che possono essere classificati come "incursioni gödeliane nella matematica intuizionista", come li definì Kreisel nel suo *1987* oppure, come "risultati gödeliani sulla matematica costruttiva".

3.1. Intuizionismo e logica polivalente

Nel 1932 Gödel pubblicò sull'*Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* una breve nota[79] in risposta ad un quesito postogli dal suo maestro ed amico Hans Hahn. La domanda posta da Hahn sarebbe potuta essere all'incirca la seguente: può la logica intuizionista essere interpretata come una logica polivalente?

Un quesito del genere può sorgere in modo piuttosto naturale quando si rifletta sul fatto che la logica intuizionista non assume in tutta generalità il principio del terzo escluso e di conseguenza rifiuta una qualche forma del principio di bivalenza secondo cui ogni proposizione è vera o falsa. Questo tipo di approccio nella lettura del principio del terzo escluso potrebbe essere interpretato in questo modo: se, data una certa proposizione φ, non è possibile, in generale, affermare che essa è vera o falsa, è però forse possibile affermare che essa possiede sempre un valore di verità compreso in un certo insieme finito di possibili valori. Cioè, la semantica intuizionista, pur non essendo definibile in termini bivalenti, può forse essere definita in termini n-valenti per qualche numero naturale n.

La risposta di Gödel è che così non è, ma che fra la logica proposizionale intuizionista (**IPC**) e la logica proposizionale classica (**CPC**) esistono infinite "logiche intermedie". Ossia l'autore dimostra che:[80]

> I. Non esiste alcuna realizzazione con un numero finito di elementi (valori di verità) nella quale siano soddisfatte ... tutte e sole le formule dimostrabili in **IPC**. II. Fra **IPC** e **CPC**, l'usuale calcolo proposizionale classico, esiste un' infinità di sistemi, cioè c'è una successione monotona decrescente di sistemi ciascuno dei quali include **IPC** come sottoinsieme ed è incluso in **CPC** come sottoinsieme.

Il primo risultato afferma che:

[79] Cf. *Gödel 1932*.

[80] Cf. *Gödel 1932* in *Gödel 1986*, pag. 224.

Teorema 1. Fra **IPC** e **CPC** esistono infiniti sistemi formali intermedi $\mathbf{I}_n$ cioè tali che:

$$\{\varphi : \mathbf{IPC} \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi : \mathbf{I}_n \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi : \mathbf{CPC} \vdash \varphi\}.$$

La dimostrazione di questo teorema si basa su una valutazione a n valori di verità del linguaggio $\mathcal{L}$ di **IPC**, definita come segue: $\mathcal{V}_n$ è una funzione definita sull'insieme $Prop$ delle variabili proposizionali di $\mathcal{L}$ e a valori sull'insieme $\mathbb{N}_n$ dei primi n numeri naturali. Inoltre, se $p, q \in Prop$, allora:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_n(p \vee q) & := & min(\mathcal{V}_n(p), \mathcal{V}_n(q)) \\ \mathcal{V}_n(p \wedge q) & := & max(\mathcal{V}_n(p), \mathcal{V}_n(q)) \\ \mathcal{V}_n(p \rightarrow q) & := & \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{V}_n(p) \leq \mathcal{V}_n(q) \\ n, & \text{se } \mathcal{V}_n(p) > \mathcal{V}_n(q) \end{cases} \\ \mathcal{V}_n(\neg p) & := & \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{V}_n(p) = n \\ n, & \text{se } \mathcal{V}_n(p) \neq n \end{cases} \end{array}$$

Si può ora verificare, per ispezione degli assiomi e delle regole di inferenza di **IPC**, che:

$$\mathcal{V}_n \models \mathbf{IPC}$$

e quindi:

$$\mathcal{V}_n \models \{\varphi : \mathbf{IPC} \vdash \varphi\}.$$

Inoltre si consideri la formula φ_n della forma:

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee (p_1 \leftrightarrow p_3) \vee (p_1 \leftrightarrow p_4) \vee ... \vee (p_{n-1} \leftrightarrow p_n)$$

o in breve:

$$\bigvee_{1 \leq i < k \leq n} (p_i \leftrightarrow p_k).$$

Chiaramente, per ogni $m > n$ si ha che:

$$\mathcal{V}_n \models \varphi_m$$

perché almeno uno dei disgiunti dovrà risultar vero, mentre per ogni $k < n$

$$\mathcal{V}_n \not\models \varphi_k$$

ed inoltre:

$$\mathcal{V}_n \not\models \varphi_n.$$

Dunque per ogni numero naturale n, esiste una formula φ_n tale che:

$$\mathbf{IPC} \nvdash \varphi_n$$

visto che c'è sempre una valutazione $\mathcal{V}_n$ del linguaggio di **IPC** che soddisfa **IPC** ma non φ_n. Dunque il calcolo proposizionale intuizionista ammette infiniti rafforzamenti propri e di conseguenza esistono infiniti sistemi formali intermedi (dal punto di vista deduttivo) fra **IPC** e **CPC**.

Da questo primo teorema segue il secondo risultato, ossia:

Teorema 2. Non ci sono valutazioni finite $\mathcal{V}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **IPC** tali che:

$$\mathcal{V} \models \varphi \iff \mathbf{IPC} \vdash \varphi.$$

Infatti dal Teorema 1 si ha che per ogni valutazione finita $\mathcal{V}_{n+1}$ del linguaggio di **IPC** c'è una formula φ_n che essa soddisfa ma che **IPC** non dimostra.

Alla fine del breve articolo del '32, Gödel formula anche una fondamentale proprietà del calcolo intuizionista, la cosiddetta *primalità* o *proprietà della disgiunzione*. Si tratta della seguente:

Osservazione. Per due qualsiasi formule φ, ψ del linguaggio di **IPC**:

$$\mathbf{IPC} \vdash \varphi \vee \psi \iff \mathbf{IPC} \vdash \varphi \text{ oppure } \mathbf{IPC} \vdash \psi.$$

Gödel non dà la dimostrazione di questo fatto; la prima dimostrazione di questa proprietà della logica intuizionista fu pubblicata da Gerhardt Gentzen nel suo "Untersuchungen über das logische Schließen".[81]

Questo primo contributo gödeliano sulla logica intuizionista presenta almeno tre elementi rilevanti:

(a) col Teorema 2 viene data un'informazione negativa sulla semantica intuizionista: non si tratta di una semantica polivalente finita;

(b) col Teorema 1, come osservato anche da Troelstra nel suo *1986*, Gödel dà quello che può essere considerato il primo contributo a quell'area di ricerche che oggi viene indicata col nome di "logiche intermedie";

[81] Si veda *Gentzen 1934*.

(c) con l'osservazione sulla primalità l'autore mette in evidenza il fatto che la logica intuizionista non pone solo restrizioni a quella classica (come nel caso del terzo escluso), ma possiede essa stessa delle proprietà (in questo caso metateoriche) di cui la logica classica non gode.

3.2. Dimostrabilità e necessità: la traduzione modale

Nel 1933 Gödel pubblicò sugli *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* un breve articolo intitolato "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls".[82] Si tratta di un lavoro pionieristico sotto vari punti di vista: in esso l'autore inaugura infatti un modo di guardare alla semantica intuizionista in termini di modalità sulla cui falsariga si svilupparono ricerche nell'ambito delle semantiche algebriche, in quello delle semantiche a mondi possibili ed infine, è forse questa la parentela più diretta, nell'ambito della cosiddetta "logica della dimostrabilità".[83] In questa nota Gödel congettura che si possa dimostrare un teorema di equivalenza deduttiva fra la logica proposizionale intuizionista **IPC** e un sistema epistemico classico **B** definito come un'estensione del calcolo proposizionale classico **CPC** con una costante di "dimostrabilità informale" B e con i seguenti assiomi e regole addizionali:

B1. $B\varphi \to \varphi$,

B2. $B\varphi \to (B(\varphi \to \psi) \to B\psi)$,

B3. $B\varphi \to BB\varphi$,

RB. $\varphi \;\Rightarrow\; B\varphi$.

Come risulta evidente, questo sistema, qualora si sostituisca l'operatore modale $\Box$ alla costante B, è esattamente il sistema modale normale **S4** come lo conosciamo oggi.[84] Dunque si può affermare che quello che Gödel congetturò fu il seguente:

Teorema. Esiste una traduzione $\sharp$ delle formule del linguaggio $\mathcal{L}$ di **IPC** nelle formule del linguaggio di **S4** tale che per ogni formula φ di $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{IPC} \vdash \varphi \iff \mathbf{S4} \vdash \varphi^{\sharp}.$$

[82] Cf. *Gödel 1933b*.

[83] Cf. al riguardo *Boolos 1979* e *1993*.

[84] Si noti che questo tipo di formalizzazione costituiva, all'inizio degli anni Trenta, un'assoluta novità. All'epoca infatti le formalizzazioni delle modalità erano legate alla nozione di implicazione stretta di Clarence Irving Lewis.

Gödel, sempre in questo breve articolo, dimostrò metà (da sinistra verso destra) di questa equivalenza sulla base di un analogo epistemico della seguente *traduzione modale* $\sharp$. $\sharp$ è una applicazione dall'insieme delle formule di **IPC** sull'insieme delle formule di **S4** definita induttivamente come segue.

Base. Se φ è atomica, allora:

- $\varphi^\sharp := \varphi$.

Passo. Se φ e ψ sono formule del linguaggio di **IPC**, allora:

- $(\varphi \wedge \psi)^\sharp := \varphi^\sharp \wedge \psi^\sharp$;
- $(\varphi \vee \psi)^\sharp := \Box\varphi^\sharp \vee \Box\psi^\sharp$;
- $(\varphi \rightarrow \psi)^\sharp := \Box\varphi^\sharp \rightarrow \Box\psi^\sharp$;
- $(\neg\varphi)^\sharp := \neg\Box\varphi^\sharp$.

L'altra metà della congettura di Gödel fu dimostrata da Alfred Tarski e John McKinsey nel loro articolo "Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting" pubblicato sul *Journal of symbolic logic* nel 1948. Nel lavoro di Tarski e McKinsey si faceva uso di semantiche algebriche che, oltre alle corrispondenze deduttive già rilevate da Gödel, mettevano in evidenza anche le differenze strutturali fra i due sistemi **IPC** ed **S4**.

L'articolo di Gödel si conclude con un paio di osservazioni che vale la pena di menzionare. La prima riguarda il sistema epistemico **B** che Gödel osserva essere equivalente al sistema dell'implicazione stretta, $\longrightarrow$, di Lewis ove si traduca $B\varphi$ con $\Box\varphi$ e si aggiunga l'assioma $\Box\varphi \longrightarrow \Box\Box\varphi$. A proposito di quest'ultimo assioma viene citato l'articolo di Oskar Becker "Zur Logik der Modalitäten" pubblicato nel 1930 sullo *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*.[85]

La seconda, non meno importante, osservazione riguarda l'interpretazione intesa dell'operatore di dimostrabilità B. Gödel constata che:[86]

> ... non tutte le formule dimostrabili in **B** sono valide per la nozione di "dimostrabile in un dato sistema formale **S**". Ad esempio, $B(Bp \rightarrow q)$ non è mai valida per sistemi che contengono l'aritmetica.

[85] Si tratta di un riferimento molto interessante perché testimonia di un primo contatto di Gödel con un autore di impostazione fenomenologica già negli anni Trenta.

[86] Cf. *Gödel 1933b* in *Gödel 1986*, pagg. 300-302.

Con questa nota Gödel mette in chiaro il fatto che l'operatore B non può esser letto in termini di "dimostrabilità in un sistema formale". Se infatti interpretassimo B come il predicato di dimostrabilità $Bew_{\mathbf{PA}}$ in **PA** di cui si è parlato nel capitolo 2 avremmo che poiché:

$$\mathbf{B} \vdash B(B\varphi \to \varphi),$$

sarebbe allora dimostrabile, in **IPC** e *a fortiori* in **PA**:

$$Bew_{\mathbf{PA}}\varphi \to \varphi,$$

ed in particolare, per $0 \neq 0$, avremmo:

$$Bew_{\mathbf{PA}}(0 \neq 0) \to 0 \neq 0,$$

cioè:

$$\neg Bew_{\mathbf{PA}}(0 \neq 0),$$

e dunque:

$$Wid_{\mathbf{PA}}.$$

Ma questo non può essere per il secondo teorema di incompletezza e quindi, in generale, l'operatore B può essere letto solo in termini di "dimostrabilità in qualche (imprecisato) senso informale". Si noti che questa osservazione ben si adatta al fatto che, dal punto di vista intuizionista, gli operatori logici vengono interpretati in termini di dimostrazioni (si pensi all'interpretazione di Brouwer, Heyting e Kolmogorov), ma dice qualcosa di più: se si vuole interpretare la verità in termini di dimostrabilità come fanno gli intuizionisti, esistono dei limiti precisi alla possibilità di specificare tale nozione di dimostrabilità.

Possiamo quindi concludere che, anche se con un contributo squisitamente tecnico, Gödel dice qualcosa di profondo sulla nozione di "verità intuizionista" e su quella di "costruttività" che ne è alla base. Sarà proprio riflettendo su questi due concetti che lui, verso l'inizio degli anni Quaranta, formulerà una sua nozione di "costruttività" distinta da quella intuizionista.

3.3. Aritmetica classica e intuizionista: la traduzione negativa

Nel 1932 Gödel tenne, su invito di Karl Menger, un intervento al Mengers Kolloquium, dedicato all'aritmetica intuizionista, quella che oggi viene comunemente chiamata "aritmetica di Heyting" (**HA**). Una sintesi di quell'intervento fu pubblicata nel 1933 col titolo "Zum intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie"[87] sugli *Ergebnisse*.[88]

Si tratta di un contributo davvero notevole nell'ambito della precisazione della logica e della matematica intuizioniste in quanto mostra che, almeno dal punto di vista formale, in un certo senso l'aritmetica intuizionista e quella classica sono (deduttivamente) equivalenti.

Gödel cita i fondamentali articoli di Heyting "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik" (1930) e "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik" (1930) a proposito dei sistemi formali che oggi chiameremmo **IPC**, **IQC** e **HA**[89]. Egli fa inoltre riferimento all'articolo di Valerii I. Glivenko "Sur quelques points de la logiques de M. Brouwer" (1929) per quanto riguarda l'interpretabilità di **CPC** in **IPC** e ai due articoli di Herbrand "Les bases de la logique hilbertienne" (1930) e "Sur la non-contradiction de l'arithmetique" (1931), rispettivamente, per una caratterizzazione della nozione di "dimostrazione finitista" nel senso di Hilbert e per un sistema formale per l'aritmetica classica.

Dopo aver osservato che, sulla base dell'interpretazione di Glivenko del frammento di **CPC** basato sull'insieme $\{\neg, \wedge\}$ di connettivi "*il calcolo proposizionale classico è ... un sottoinsieme di quello intuizionista*",[90] Gödel descrive l'obiettivo del suo contributo come un tentativo di far vedere che qualcosa di simile si verifica anche per l'aritmetica classica. L'autore caratterizza quindi il principale risultato che andrà a dimostrare, nei seguenti termini:[91]

> ... possiamo fornire un'interpretazione delle nozioni classiche in termini di quelle intuizioniste tale che *ogni proposizione dimostrabile a partire dagli assiomi classici vale pure per l'intuizionismo.*

Ossia, egli dimostra il seguente:

Teorema. Esiste un'applicazione ^{N} dall'insieme delle formule di **PA** sull'insieme delle formule di **HA** tale che per ogni formula φ del linguaggio

[87]Cf. *Gödel 1933a*.

[88]Che, come si saprà, erano proprio gli atti del Mengers Kolloquium.

[89]Rispettivamente: il calcolo proposizionale intuizionista, il calcolo quantificazionale intuizionista e l'aritmetica intuizionista o aritmetica di Heyting.

[90]Cf. *Gödel 1933a* in *Gödel 1986*, pag. 286.

[91]Cf. *Gödel 1933a* in *Gödel 1986*, pag. 288.

di **PA**:

$$\mathbf{PA} \vdash \varphi \iff \mathbf{HA} \vdash \varphi^N.$$

Chiaramente la parte da destra a sinistra dell'equivalenza è banale, visto che per un'opportuna formulazione dei due sistemi si ha che:

$$\mathbf{HA} \subset \mathbf{PA}.$$

La dimostrazione della parte da sinistra a destra del teorema di basa invece sulla traduzione ^{N} definita per induzione come segue.

Base. Se φ è atomica:

- $\varphi^N := \varphi$.

Passo. Se φ e ψ sono due formule del linguaggio di **PA**:

- $(\neg\varphi)^N := \neg\varphi^N$,
- $(\varphi \wedge \psi)^N := \varphi^N \wedge \psi^N$,
- $(\varphi \vee \psi)^N := \neg(\neg\varphi^N \wedge \neg\psi^N)$,
- $(\varphi \to \psi)^N := \neg(\varphi^N \wedge \neg\psi^N)$,
- $(\forall x\varphi)^N := \forall x\varphi^N$,
- $(\exists x\varphi)^N := \neg\forall x\neg\varphi^N$.

L'idea alla base di questa traduzione è analoga a quella di Glivenko:[92] essa trasforma le formule dell'aritmetica classica in formule contenenti solo i connettivi non problematici dal punto di vista intuizionista $\neg, \wedge, \forall$.[93]

La dimostrazione del Teorema è del tutto simile a quella del Teorema relativo alla traduzione modale. Essa procede cioè per ispezione degli assiomi di **PA** e verificando che dalla dimostrabilità della ^{N}-traduzione delle premesse di una certa regola segue la dimostrabilità della ^{N}-traduzione della conclusione di quella regola.

Per semplificare la dimostrazione del Teorema, Gödel dimostra prima due risultati ausiliari. Il primo è il seguente:

[92]Cf. *Glivenko 1929*.

[93]Altre traduzioni sono state formulate in *1925* da Kolmogorov (per il calcolo proposizionale), nel 1933 da Bernays e Gentzen (per l'aritmetica) e in *1951* da Kuroda. Si può dimostrare che queste traduzioni sono tutte fra loro equivalenti a livello proposizionale, predicativo e aritmetico.

Lemma 1. Per ogni formula φ del linguaggio di **PA** si ha:

$$\mathbf{HA} \vdash \neg\neg\varphi^N \to \varphi^N.$$

Questo risultato lo si dimostra facilmente per induzione sulla complessità logica di φ (cioè sul numero di connettivi e quantificatori occorrenti in φ).

Il secondo risultato ausiliario è il seguente:

Lemma 2. Per due qualsiasi formule φ, ψ del linguaggio di **PA**:

$$\mathbf{HA} \vdash (\varphi^N \to \psi^N) \leftrightarrow \neg(\varphi^N \wedge \neg\psi^N).$$

Gödel conclude il suo articolo con una serie di osservazioni che vale la pena di considerare nel dettaglio. La prima è che il Teorema sulla doppia negazione evidenzia il fatto che l'aritmetica di Heyting costituisce "solo apparentemente" una restrizione dell'aritmetica di Peano, mentre di fatto, modulo l'interpretazione ^{N}, la contiene. L'autore spiega questo risultato sorprendente sulla base del fatto che:[94]

> ... la proibizione intuizionista contro la riformulazione di negazioni di proposizioni universali come proposizioni puramente esistenziali non ha alcun effetto visto che il predicato di assurdità può essere applicato a proposizioni universali e ciò conduce a proposizioni che, formalmente, sono esattamente le stesse di quelle asserite dalla matematica classica.

Come vedremo nel prossimo paragrafo dedicato alla "Dialectica interpretation" Gödel ribadirà in vari lavori degli anni Trenta e Quaranta[95] il fatto che uno dei punti deboli del costruttivismo di ispirazione intuizionista sta proprio nel fatto di ammettere l'uso dei connettivi logici ed in particolare della negazione su proposizioni quantificate universalmente. In tal modo, sostiene Gödel, il divieto nei confronti delle proposizioni esistenziali non-costruttive finisce per essere inutile.

Proprio in quest'ottica si inserisce anche l'osservazione successiva dell'autore, secondo cui l'intuizionismo introduce restrizioni essenziali della matematica classica solo nell'analisi e nella teoria degli insiemi, e non a causa del rifiuto del principio del terzo escluso, bensì per quello delle definizioni impredicative.

L'articolo termina con una nota relativa al seguente corollario del Teorema sulla traduzione negativa:

---

[94] Cf. *Gödel 1933a* in *Gödel 1986*, pag. 294.

[95] Si vedano *Gödel *1933f*, *Gödel *1938a* e *Gödel *1941*.

Corollario. Se **HA** è noncontraddittoria, allora anche **PA** lo è.

Gödel osserva che, sebbene la traduzione negativa fornisca una dimostrazione di noncontraddittorietà per l'aritmetica classica, non si tratta certo di una dimostrazione finitista nel senso di Hilbert. Insomma, il Teorema fornisce una dimostrazione di noncontraddittorietà nel senso che si hanno due sistemi formali $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ e si dimostra che:

$$Wid_{\mathbf{S}} \rightarrow Wid_{\mathbf{T}}.$$

Il problema è che con ciò si ottiene solo un risultato di noncontraddittorietà relativa e quindi non si arriva all'obiettivo desiderato a meno che non si assuma o si dimostri in qualche modo la noncontraddittorietà del sistema **S**. In un certo senso invece questa dimostrazione può essere considerata valida dal punto di vista intuizionista e questa volta non in quanto riduzione del problema della consistenza da un certo sistema formale ad un suo sottosistema, bensì in quanto riduzione del problema da un sistema meno intuitivo ad uno più intuitivo.

3.4. La "Dialectica interpretation"

Il 15 aprile 1941 Gödel pronunciò alla Yale University una conferenza intitolata "In what sense is intuitionistic logic constructive?"[96] e, sempre in quell'anno, tenne una serie di lezioni sull'intuizionismo a Princeton. Gli appunti di quelle lezioni e il testo della conferenza sono stati ritrovati nel *Nachlass* e la conferenza è stata pubblicata nel 1995 nel terzo volume dei *Collected works*. Nella conferenza di Yale Gödel presentò in modo informale un nuovo sistema formale per l'aritmetica **T**[97] ed un'interpretazione ^{D} delle formule del linguaggio di **HA** nelle formule del linguaggio di **T**.[98]

L'idea centrale di questo contributo era già stata presentata da Gödel in una conferenza viennese del 1938[99] dove venivano prese in considerazione tre vie per un possibile recupero del programma di Hilbert oltre i troppo angusti limiti del finitismo, ossia:

[96] Cf. *Gödel *1941*.

[97] Di fatto Gödel usa la lettera greca maiuscola Σ per indicarlo ma noi per uniformità di notazione useremo **T**; anche nelle citazioni apporteremo piccole modifiche sempre per non appesantire il testo con troppe notazioni differenti.

[98] Gödel usa il simbolo di apice ' anziché ^{D}.

[99] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*.

1. l'approccio di Gentzen mediante l'induzione transfinita fino a un certo ordinale transfinito;

2. la via "modal-logica" che in qualche modo tentava di estendere un analogo della traduzione modale al caso dell'aritmetica; ed infine

3. una terza via basata su un'idea di Hilbert, quella dei *funzionali calcolabili di tipo finito*.

Questa terza possibilità per un'estensione più-che-finitaria del programma di Hilbert rimase inedita fino al 1958 quando, in un numero monografico dedicato al settantesimo compleanno di Paul Bernays della rivista svizzera *Dialectica*, Gödel pubblicò il celebre articolo "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes".[100] In quel lavoro, proprio come nella conferenza di Yale, Gödel presentò un sistema costruttivo **T** e una traduzione ^{D} delle formule del linguaggio di **HA** nelle formule del linguaggio di **T**. I risultati fondamentali erano gli stessi, ma la forma e lo spirito erano profondamente mutati rispetto al 1941. Mentre lì, già a partire dal titolo, l'accento veniva posto sulla critica e rivisitazione del costruttivismo intuizionista, nel 1958 Gödel sottolineava soprattutto gli elementi di superamento e riproposizione del programma di Hilbert, facendo riferimento alla posizione espressa più volte da Bernays in proposito.

Nel 1965 proprio Bernays propose a Gödel di far pubblicare una traduzione di *Gödel 1958* sempre sulla rivista *Dialectica*. Gödel diede allora la propria disponibilità a rivedere complessivamente l'articolo e nel 1967 fu ultimata tale revisione e parziale riscrittura. Successivamente però, come spesso capitava, l'autore si dichiarò insoddisfatto del lavoro e decise di riscrivere completamente l'articolo, ma anche questo secondo tentativo risultò fallimentare. Alla fine Gödel pensò di aggiungere solo una dozzina di note al testo del 1958, ma ancora una volta il risultato non lo convinse tanto è vero che la traduzione in inglese del testo così ampliato non fu pubblicata fino al 1990 quando venne inserita, assieme a *Gödel 1958* e ad un'introduzione di Anne S. Troelstra,[101] nel secondo volume dei *Collected works*.[102] Alcune delle note aggiunte a questa revisione, cui l'autore lavorò probabilmente fino al 1972, sono davvero notevoli, tanto è vero che per poter comprendere

[100]Cf. *Gödel 1958*.
[101]Cf. *Troelstra 1990*.
[102]Cf. *Gödel 1972*.

pienamente i dettagli tecnici della “Dialectica interpretation” risulta molto utile tener presente questo testo.

3.4.1. Motivazioni

La “Dialectica interpretation” è caratterizzata oltre che, come già detto, da una pluralità di presentazioni nei tre articoli che la riguardano, anche da una duplicità di intenti. Nella conferenza inedita del '41 Gödel motiva il suo contributo in riferimento al problema della caratterizzazione della nozione di “costruttività” in modo indipendente da quella intuizionista. A pagina 150 di *Gödel *1941* leggiamo infatti:

> ... la nozione di dimostrazione intuizionisticamente corretta o di dimostrazione costruttiva non ha la precisione desiderabile ... Perciò sembra che, volendo considerare la costruttività davvero in senso stretto, le nozioni della logica intuizionista non possano essere ammesse nel loro solito senso.

Troviamo qui una critica del concetto intuizionista di costruttività che, da un lato, richiama l'osservazione fatta da Gödel a proposito della traduzione modale e, dall'altro, sembra essere una naturale prosecuzione della considerazione fatta nell'ambito della traduzione negativa, secondo cui alcune delle restrizioni imposte dagli intuizionisti alla matematica classica risultano essere vacue. Di fatto, nel secondo paragrafo della conferenza di Yale, Gödel, richiamandosi proprio al suo *1933a*, afferma che le principali obiezioni rivolte dagli intuizionisti alla matematica classica riguardano:

1) da un lato, le definizioni impredicative e

2) dall'altro, il *tertium non datur* e i teoremi del calcolo proposizionale ad esso associati.

Gödel osserva che, sebbene l'obiezione 2) possa sembrare la più seria, in quanto riguardante una “legge più fondamentale” della 1), in realtà “un esame più accurato mostra che è vero esattamente l'opposto”. Questo tuttavia non significa che i sistemi formali intuizionisti non possano essere giustificati sulla base di una buona definizione di costruttività, cioè “in termini di nozioni strettamente costruttive”. Ciò, secondo Gödel, è possibile per lo meno se si considerano le applicazioni della logica intuizionista nella teoria dei numeri. Dunque, qui la “Dialectica interpretation” viene presentata come uno strumento utile per determinare:

i) un “buon” paradigma di costruttività ed inoltre

ii) una giustificazione costruttiva dell’aritmetica di Heyting.

Nell’articolo del ’58 e in modo ancor più approfondito nella revisione del ’72 la “Dialectica interpretation” viene presentata invece come un tentativo di estendere i confini imposti da Hilbert alle dimostrazioni di noncontraddittorietà per i sistemi formali, ammettendo cioè l’uso di opportuni concetti astratti. *Gödel 1958* inizia infatti con le seguenti parole:[103]

> Paul Bernays ha rilevato in varie occasioni che, poiché la noncontraddittorietà di un sistema non può essere dimostrata utilizzando metodi dimostrativi più deboli di quelli del sistema stesso, se si vuole dimostrare la noncontraddittorietà della matematica classica è necessario andare oltre l’ambito di quella che è la matematica finitaria nel senso di Hilbert.

Già nel 1935 infatti, nel celebre articolo “Sur le platonisme dans les mathematiques”, Bernays aveva affermato che, sulla base dei risultati di incompletezza:

> ... arriviamo alla conclusione che sono necessari strumenti più potenti dei metodi combinatori elementari per dimostrare la noncontraddittorietà della teoria assiomatica dei numeri.

Proprio con esplicito riferimento a *Bernays 1935* Gödel afferma che dal momento che la matematica finitaria viene definita come la matematica dell’intuizione concreta, un suo superamento implicherà necessariamente un ricorso a “certi concetti astratti”. Nel suo *1958* l’autore caratterizza i concetti astratti come:

> ... concetti che non riguardano proprietà o relazioni di *oggetti concreti* (per esempio combinazioni di segni), ma che fanno riferimento a *costrutti mentali* (per esempio dimostrazioni, enunciati sensati e così via).

Nel 1958 Gödel chiarisce molto bene lo scopo del suo articolo dicendo che, secondo l’analisi di Bernays, si possono distinguere due elementi del finitismo hilbertiano, ossia:

F1. *l’elemento costruttivo* secondo cui si può parlare di esistenza di un oggetto matematico solo se possiamo esibirlo mediante una costruzione;

ed inoltre:

[103]Cf. *Gödel 1990*, pag. 240.

F2. *l'elemento specificamente finitista* secondo cui i "veri" oggetti matematici devono essere "anschaulich" cioè "concretamente intuibili".

L'idea di Gödel è che, per poter perseguire ancora sensatamente un programma di dimostrazioni di noncontraddittorietà, occorre sopprimere l'elemento F2 dell'approccio finitista.

Queste affermazioni sono nuove se si considerano solo gli scritti pubblicati dall'autore, tuttavia negli inediti *Gödel *1933f*, **1938a* e **1941* veniva già rilevata con chiarezza la necessità di un superamento del punto di vista hilbertiano in questa direzione.

Dunque, nel complesso, la motivazione fondamentale dell'articolo del '58 è quella di fornire una dimostrazione costruttiva della noncontraddittorietà dell'aritmetica di Peano e quindi, pur con le dovute estensioni del punto di vista finitista, si tratta ancora di un obiettivo riconducibile, sia per l'ispirazione che per certe scelte tecniche, al paradigma hilbertiano di ricerche fondazionali.

3.4.2. Riferimenti

Nella conferenza di Yale non troviamo riferimenti bibliografici, tuttavia vengono fatti quattro nomi importanti: quello di Brouwer a proposito delle prove di esistenza non costruttive; quello di Heyting per quanto riguarda la formalizzazione della logica intuizionista; quello di Hilbert a proposito del finitismo e infine quello di Gentzen in riferimento alla sua dimostrazione di noncontraddittorietà dell'aritmetica classica.

In *Gödel 1958* troviamo numerosi riferimenti a Bernays, in particolare agli articoli *Bernays 1935*, *1941* e *1954*. Vengono inoltre citati *Hilbert 1926* e *Hilbert et Bernays 1939*. Nell'ambito di una discussione della dimostrazione di Gentzen, Gödel cita l'articolo di Ackermann "Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse" (1951) e la conferenza di Kreisel "Ordinal logic and the characterization of informal concepts of proof" (1960). Gli altri meno rilevanti riferimenti riguardano Turing, Church, Heyting,[104] Whitehead e Russell[105] e infine, come già detto, l'articolo di Gödel sulla traduzione negativa.

In *Gödel 1972*, oltre a tutte quelle presenti in *Gödel 1958*, troviamo un cospicuo numero di citazioni a proposito della dimostrazione di Gentzen, in

[104]La monografia *Intuitionism: an introduction* del 1952.

[105]La seconda edizione dei *Principia Mathematica*.

particolare *Gentzen 1936*, *Lorenzen 1951*, *Schütte 1954*, *Kreisel 1965* e *1967* ed infine gli articoli di Takeuti *1957*, *1960* e *1967*. Questa ricchezza di riferimenti sembra importante in quanto evidenzia quanto Gödel fosse rimasto attento alle estensioni del programma di Hilbert ma soprattutto ai tentativi di realizzare dimostrazioni di noncontraddittorietà con nuovi metodi.

Altre citazioni che distinguono *Gödel 1972* da *Gödel 1958* sono quelle di *Kleene 1960*, *Johansson 1936* e *Spector 1962*.

3.4.3. Paradigmi di costruttività

In *Gödel *1933f* l'autore definiva tre condizioni che un sistema formale avrebbe dovuto soddisfare per poter essere considerato costruttivo in senso stretto e in *Gödel *1938a* proponeva un secondo paradigma di costruttività basato questa volta su quattro condizioni. Un terzo ed ultimo paradigma di costruttività viene formulato da Gödel nella conferenza di Yale nei seguenti termini:[106]

> ... devo per prima cosa spiegare in modo più completo quali mi sembra siano i requisiti di un sistema strettamente costruttivo, cioè i seguenti: 1. tutte le funzioni primitive che si introducono devono essere calcolabili per ogni dato argomento; 2. le asserzioni esistenziali devono avere significato solo come abbreviazioni per costruzioni attuali cioè il quantificatore esistenziale non deve comparire come termine primitivo ... 3. Le proposizioni universali possono essere negate solo nel senso che esiste un controesempio nel senso appena definito.

Sulla base di questa citazione e del paragrafo ad essa immediatamente successivo possiamo dunque descrivere il *paradigma di costruttività* in riferimento al quale Gödel, nel 1941, intendeva definire il sistema formale **T** per interpretare costruttivamente l'aritmetica intuizionista, come segue.

C1. Le funzioni e le relazioni di **T** devono essere calcolabili, rispettivamente, decidibili.

C2. Il linguaggio di **T** non contiene $\exists$ fra i simboli primitivi. Una formula come $\exists x\varphi(x)$ può occorrere solo come abbreviazione di $\varphi(t)$ per qualche termine t.

C3. Una formula come $\neg\forall x\varphi(x)$ può occorrere solo come abbreviazione di $\neg\varphi(t)$ per qualche termine t.

[106] Cf. *Gödel *1941* in *Gödel 1995*, pag. 191.

C4. I connettivi proposizionali non possono essere applicati a proposizioni universali.

Una volta definiti i limiti entro i quali si dovrà muovere, Gödel comincia a caratterizzare il sistema costruttivo **T** spiegando quale forma logica dovrà avere una formula-ben-formata di questo sistema: i quantificatori universali dovranno occorrere tutti all'inizio mentre il resto della formula non dovrà contenere quantificatori. Se si ammette una regola per l'introduzione di quantificatori esistenziali come abbreviazioni, ossia la regola:

$$\varphi(t) \;\;\Rightarrow\;\; \exists x \varphi(x)$$

allora, conclude Gödel, ogni formula avrà la forma:

$$\exists x_1 .... \exists x_n \forall y_1 ... \forall y_m M(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$$

dove M non contiene quantificatori.

3.4.4. Funzionali calcolabili di tipo finito

Fissati un paradigma di costruttività e la forma logica delle formule del sistema **T** l'autore va a specificare l'ontologia intesa del sistema formale costruttivo di riferimento. Ossia:[107]

> L'analisi del sistema ... che ho esposto finora descrive uno schema astratto e ora dobbiamo riempirlo con oggetti concreti, cioè, dobbiamo specificare che cosa dovranno essere gli oggetti primitivi, le relazioni e le funzioni.

Gödel osserva che la teoria dei numeri ricorsiva costituisce per così dire "il livello più basso" della matematica costruttiva e l'ontologia intesa da questo sistema è costituita dai numeri naturali. Chiaramente sulla base dei teoremi di incompletezza sappiamo che la teoria dei numeri ricorsiva è troppo debole per dimostrare la noncontraddittorietà dell'aritmetica e quindi, prosegue l'autore, è necessario estenderla anche se non, come tentato da Gentzen, nei suoi metodi dimostrativi. Infatti, oltre a quello di Gentzen, ci sono altri modi per estendere l'aritmetica finitaria: si potrebbe ad esempio partire da **PRA** ed ammettere, oltre agli interi e alle funzioni di interi, anche "funzioni che si applicano a funzioni ed hanno funzioni come risultato".[108]

[107] Cf. *Gödel *1941* in *Gödel 1995*, pag. 193.
[108] Cf. *Gödel *1941* in *Gödel 1995*, pag. 194.

Gödel porta come esempio di questa nuova sorta di funzioni, l'elevamento al quadrato Q di una funzione di interi f. Avremo quindi funzioni di tipo zero come ciascun numero naturale, funzioni di tipo uno come ad esempio la funzione successore $x+1$ ed ora anche funzioni di tipo due come ad esempio:

$$Q : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

che ad ogni funzione f di tipo uno associa la funzione composta $f \circ f$ ancora di tipo uno. Naturalmente in tal modo si possono definire funzioni di tipo arbitrariamente alto, infatti se si sono già definiti i tipi τ_1 e τ_2, è possibile definire un nuovo tipo $(\tau_1\tau_2)$ o $\tau_1 \to \tau_2$ cioè il tipo delle funzioni che applicate a funzioni di tipo τ_1 danno come risultato una funzione di tipo τ_2.

Abbiamo così una nuova ontologia costituita dai numeri naturali e da queste funzioni di tipo finito arbitrario che chiameremo *funzionali di tipo finito*. Naturalmente, per rispettare il paradigma di costruttività gödeliano queste funzioni dovranno essere tutte calcolabili e l'idea di Gödel per ottenere questo è quella di ammettere soltanto metodi definitori che garantiscano che la calcolabilità venga preservata, ossia:

a) le definizioni esplicite e

b) le definizioni ricorsive.

Se ci limitiamo ad essi, osserva l'autore, gli schemi definitori sono quelli dell'aritmetica ricorsiva primitiva, mentre l'ontologia viene estesa dal dominio dei numeri naturali a quello più ampio che contiene inoltre le funzioni dello spazio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, quelle dello spazio $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$, e così via. Con ciò termina la caratterizzazione gödeliana di quegli oggetti che vengono normalmente chiamati *funzionali calcolabili di tipo finito*.

In nessuno dei tre articoli sulla "Dialectica" Gödel affronta il problema di una dimostrazione rigorosa del fatto che i funzionali calcolabili di tipo finito siano davvero sempre calcolabili. La cosa è intuitivamente chiara ma per dimostrarlo occorre, è importante sottolinearlo, un'induzione transfinita fino a ε_0 esattamente come nel caso della dimostrazione di Gentzen della noncontraddittorietà di **PA**.

3.4.5. Il sistema T di Gödel

Vediamo ora nel dettaglio il sistema **T**. Cercheremo di seguire l'esposizione inedita del '41, ovunque possibile, ma dove necessario, per riempire eventuali lacune, ci avvarremo anche degli altri due articoli.

L'alfabeto $\mathcal{A}$ di $\mathbf{T}$ è dato da:

- la costante 0 di tipo 0;
- la costante funzionale unaria +1 di tipo 1;
- un'infinità numerabile di variabili per ogni tipo finito;
- una costante funzionale Ap^σ per ogni tipo $\sigma > 0$;
- un simbolo predicativo binario $=_\sigma$ per ogni tipo σ;
- i simboli di costante funzionale (combinatori tipati):

  $K^{\sigma\to(\tau\to\sigma)}$,
  $S^{(\sigma\to(\tau\to\rho))\to((\sigma\to\tau)\to(\sigma\to\rho))}$,
  $R^{\sigma\to((\sigma\to(0\to\sigma))\to(0\to\sigma))}$,

  dove σ, τ, ρ indicano tipi finiti qualsiasi;
- i connettivi logici proposizionali: $\neg, \wedge, \vee, \to$.

Chiaramente gli apici dei simboli di funzione K, S, R ne indicano il tipo, dove un tipo della forma $\sigma \to \tau$ (o anche $(\sigma\tau)$) va letto intuitivamente come il tipo dei funzionali calcolabili di tipo finito che associano ad argomenti di tipo σ valori di tipo τ.

L'insieme TM dei termini di $\mathbf{T}$ si definisce come il più piccolo insieme di espressioni tali che:

- $0 \in TM$;
- $x, y, z, ... \in TM$;
- $K, S, R \in TM$;
- se $t^{\sigma\to\tau}, s^\sigma \in TM$ allora $Ap^\tau(t, s) \in TM$;
- se $n^0 \in TM$ allora $n + 1 \in TM$.

Definiamo infine l'insieme FM delle formule di $\mathbf{T}$ come il più piccolo insieme di espressioni tali che:

- per ogni tipo finito σ, se t ed s sono termini di tipo σ, allora:

$$(t = s) \in FM;$$

- se $\varphi, \psi \in FM$ allora $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi \in FM$.

Gli assiomi di **T** sono:

- gli assiomi logici del calcolo proposizionale classico **CPC**;

- gli assiomi per l'identità (intesa intensionalmente fra termini di tipo 0 ed estensionalmente fra termini di tipo $\sigma > 0$):

  LEIB $\quad x^\sigma = y^\sigma \to f(x) = f(y)$;

  RIFL $\quad x^\sigma = x^\sigma$;

- il terzo e il quarto assioma di Peano; in simboli, se x e y sono variabili di tipo 0:

  P3 $\quad x + 1 \neq 0$;

  P4 $\quad x + 1 = y + 1 \to x = y$;

- gli assiomi per le costanti K, S, R:

  AK $\quad Kxy = x$;

  AS $\quad Sxyz = xz(yz)$;

  AR $\quad Rxy0 = x$
  $\quad Rxy(z + 1) = y(Rxyz)z$.

Le regole di inferenza di **T** sono:

- il modus ponens:

  mp $\quad \varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \psi$;

- la regola di sostituzione:

  sub $\quad \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$, per x e t dello stesso tipo;

- la regola di induzione:

  ind $\quad \varphi(0), \varphi(x) \to \varphi(x + 1) \Rightarrow \varphi(x)$, per x di tipo 0.

3.4.6. Il significato costruttivo dell'aritmetica intuizionista

Nella conferenza di Yale del '41 Gödel, come più volte ripetuto, si propone di determinare un'interpretazione costruttiva delle formule di una parte della matematica intuizionista: l'aritmetica di Heyting. In un certo senso egli fa qui un'operazione analoga a quella realizzata con la traduzione negativa, ma di verso opposto. Se in quel caso si trattava di determinare una giustificazione intuizionista della matematica classica, qui l'obiettivo è invece una legittimazione strettamente costruttiva della matematica intuizionista. Di fatto, come corollario di quest'operazione si avrà anche una giustificazione costruttiva dell'aritmetica classica.

Alla base di questa interpretazione c'è una traduzione ^{D} delle formule di **HA** in formule di **T** definita per induzione come segue.

Base. Se φ è una formula atomica del linguaggio di **HA**,

- $\varphi^D := \varphi$.

Passo. Se φ e ψ sono formule del linguaggio di **HA** tali che[109] si abbia

$$\varphi^D = \exists x \forall y \varphi_D(x, y)$$

e

$$\psi^D = \exists u \forall v \psi_D(u, v),$$

allora:

- $(\varphi \wedge \psi)^D := \exists x \exists u \forall y \forall v (\varphi_D(x, y) \wedge \psi_D(u, v))$;
- $(\varphi \vee \psi)^D := \exists n \exists x \exists u \forall y \forall v ((n = 0 \rightarrow \varphi_D) \wedge (n \neq 0 \rightarrow \psi_D))$;
- $(\varphi \rightarrow \psi)^D := \exists f \exists g \forall x \forall v (\varphi_D(x, g(x, v)) \rightarrow \psi_D(f(x), v))$
  dove f, g sono variabili nuove tali che i termini $f(x)$ e $g(x, v)$ siano dello stesso tipo di u e y, rispettivamente;
- $(\neg \varphi)^D := \exists f \forall x \neg \varphi_D(x, f(x))$;
- $(\forall z \varphi(z)) := \exists f \forall z \forall x \varphi_D(f(z), y, z)$;
- $(\exists z \varphi(z))^D := \exists z \exists x \forall y \varphi_D(x, y, z)$.

[109] Per semplificare supporremo che φ e ψ contengano solo le variabili x, y, u, v; i ragionamenti che faremo potrebbero però essere ripetuti alla lettera prendendo n-uple di variabili **x,y,u,v**.

Sorge ora il problema: come si giustifica questa traduzione? Ossia, sulla base di quali principi posso considerare una formula di **HA**, diciamo φ, e la sua traduzione φ^D come equivalenti? Come nel caso della traduzione negativa, anche la "Dialectica interpretation" formalmente non può essere legittimata esclusivamente mediante principi intuizionisti. In questo caso necessitiamo esattamente di tre principi normalmente rifiutati dal punto di vista intuizionista, cioè, l'*assioma di scelta* nella forma:

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \to \exists f \forall x \varphi(x, f(x)), \tag{AC}$$

il *principio di Markov*, nella seguente forma:

$$\neg \forall x \varphi(x) \to \exists x \neg \varphi(x), \tag{PM}$$

dove φ è una formula priva di quantificatori e, infine, il *principio di indipendenza delle premesse*:

$$(\varphi \to \exists x \psi(x)) \to \exists x (\varphi \to \psi(x)). \tag{IP}$$

In *Gödel *1941* l'autore non parla di giustificazione formale della traduzione, ma cerca piuttosto di legittimarla intuitivamente sulla base del suo paradigma di costruttività. Vediamo, ad esempio, come si può giustificare la clausola relativa all'implicazione, prima formalmente e poi, intuitivamente, seguendo l'argomento dato da Gödel nella conferenza di Yale.

Per mostrare che, date le formule:

$$\varphi^D = \exists x \forall y \varphi_D(x, y)$$

e

$$\psi^D = \exists u \forall v \psi_D(u, v)$$

si può dimostrare:

$$(\varphi \to \psi)^D \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$$

procediamo come segue. Assumiamo come ipotesi induttiva che:

$$\varphi^D \leftrightarrow \varphi$$

ed inoltre:

$$\psi^D \leftrightarrow \psi.$$

Allora avremo che:

$$\begin{array}{cc}
 & (\varphi \to \psi) \\
\overset{(i)}{\leftrightarrow} & (\varphi^D \to \psi^D) \\
\overset{(ii)}{\leftrightarrow} & (\exists x \forall y \varphi_D(x,y) \to \exists u \forall v \psi_D(u,v)) \\
\overset{(iii)}{\leftrightarrow} & \forall x(\forall y \varphi_D(x,y) \to \exists u \forall v \psi_D(u,v)) \\
\overset{(iv)}{\leftrightarrow} & \forall x \exists u(\forall y \varphi_D(x,y) \to \forall v \psi_D(u,v)) \\
\overset{(v)}{\leftrightarrow} & \forall x \exists u \forall v(\forall y \varphi_D(x,y) \to \psi_D(u,v)) \\
\overset{(vi)}{\leftrightarrow} & \forall x \exists u \forall v \exists y(\varphi_D(x,y) \to \psi_D(u,v)) \\
\overset{(vii)}{\leftrightarrow} & \exists f \forall x \forall v \exists y(\varphi_D(x,y) \to \psi_D(f(x),v)) \\
\overset{(viii)}{\leftrightarrow} & \exists f \forall x \exists h \forall v(\varphi_D(x,h(v)) \to \psi_D(f(x),v)) \\
\overset{(ix)}{\leftrightarrow} & \exists f \exists g \forall x \forall v(\varphi_D(x,g(x,v)) \to \psi_D(f(x),v)) \\
\overset{(x)}{\leftrightarrow} & (\varphi \to \psi)^D.
\end{array}$$

Come si vede il passaggio (*iv*) richiede IP, il passaggio (*vi*) richiede PM e gli ultimi tre passaggi (*vii*), (*viii*), (*ix*) sono tre applicazioni di AC. Tutto il resto invece è giustificabile anche su base intuizionista, per esempio nel sistema intuizionista $\mathbf{HA}^\omega$.[110]

Come abbiamo detto, nella conferenza del '41 l'autore non mirava però ad un tale genere di giustificazione. Infatti in *Gödel *1941* egli spiega la clausola implicativa in termini del tutto informali, come segue. Data la formula:

$$\exists x \forall y \varphi_D(x,y) \to \exists u \forall v \psi_D(u,v) \tag{1}$$

l'idea di Gödel è quella di cercare una formula χ di $\mathbf{T}$ che ne rappresenti fedelmente il contenuto costruttivo nel senso del paradigma di costruttività $\mathsf{C1}$-$\mathsf{C4}$ da lui delineato. Secondo l'autore il contenuto costruttivo di (1) può essere spiegato nei seguenti termini: "Se c'è un oggetto x che soddisfa una certa condizione, allora c'è anche un oggetto u che soddisfa una certa altra condizione".[111] Dunque, sulla base della clausola $\mathsf{C2}$ del paradigma visto sopra, ciò significherà che dato un tale x è possibile determinare un tale u.

[110]Cf. al riguardo *Troelstra 1973* e *Troelstra et van Dalen 1988.*

[111]Cf. *Gödel *1941* in *Gödel 1995*, pag. 196.

Ossia, in prima istanza un equivalente costruttivo di (1) sarà la formula

$$\exists f \forall x (\forall y \varphi_D(x, y) \to \forall v \psi_D(f(x), v)). \tag{2}$$

La sottoformula di (2):

$$\forall y \varphi_D(x, y) \to \forall v \psi_D(f(x), v) \tag{3}$$

viola però la clausola C4, occorre quindi determinarne un'interpretazione costruttiva. Secondo l'autore essa significa che dato un controesempio per ψ_D si può trovare un controesempio per φ_D. Quindi un buon equivalente costruttivo di (3) sarà la formula:

$$\exists h \forall v (\neg \psi_D(f(x), v) \to \neg \varphi_D(x, h(v))). \tag{4}$$

Otteniamo dunque la seguente formula:

$$\exists f \forall x \exists h \forall v (\neg \varphi_D(f(x), v) \to \neg \psi_D(x, h(v))). \tag{5}$$

Quest'ultima formula viola però ancora la clausola C2 sui quantificatori esistenziali, infatti, il secondo quantificatore esistenziale del prefisso di (5), dipendendo dalla variabile x, non è eliminabile. Dunque, conclude Gödel, la (5) andrà interpretata nel senso che la funzione h è di fatto una funzione nelle due variabili x, v. Di conseguenza, in ultima analisi, il significato strettamente costruttivo di (1) sarà rappresentato dalla formula:

$$\exists f \exists g \forall x \forall v (\varphi_D(x, g(x, v)) \to \psi_D(f(x), v)).$$

Con ciò si è finalmente ottenuta una formula di $\mathbf{T}$.

Analogamente si può procedere per giustificare le altre clausole dell'interpretazione, ma per dare un'idea del metodo questo esempio può essere sufficiente.

3.4.7. Il risultato fondamentale

Una volta definiti il sistema $\mathbf{T}$ e l'interpretazione ^{D} è possibile dimostrare il seguente:

Teorema. Per ogni formula φ del linguaggio di $\mathbf{HA}$:

$$\mathbf{HA} \vdash \varphi \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{T} \vdash \varphi^D.$$

La dimostrazione è analoga a quella usata per la traduzione modale e per la traduzione negativa. Schematicamente, occorre dimostrare che:

- per ogni assioma α di **HA**, α^D è dimostrabile in **T**;
- per ogni regola R di **HA**, se **T** dimostra le traduzioni delle premesse di R, allora **T** dimostra anche la traduzione della conclusione di R.

Diamo qualche esempio per illustrare la strategia dimostrativa.

Fra gli assiomi consideriamo l'idempotenza della congiunzione ossia l'assioma proposizionale:

$$\varphi \to \varphi \wedge \varphi.$$

Per semplicità supponiamo che φ contenga due sole variabili vincolate e cioè che:

$$\varphi^D = \exists x \forall y \varphi_D(x, y).$$

La traduzione di $\varphi \to \varphi \wedge \varphi$ sarà quindi:

$$\exists x \forall y \varphi_D(x, y) \to \exists u \exists z \forall v \forall w (\varphi_D(u, v) \wedge \varphi_D(z, w))$$

e dunque:

$$\exists f \exists g \exists h \forall x \forall v \forall w (\varphi_D(x, f(x, v, w)) \to \varphi_D(g(x), v) \wedge \varphi_D(h(x), w)).$$

Consideriamo ora la funzione caratteristica F_{φ_D} della formula φ_D, definita come segue:

$$F_{\varphi_D}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } \varphi_D(x, y) \\ n \neq 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo quindi esplicitamente tre termini t_1, t_2, t_3 come segue:

$$t_1(x) := x,$$

$$t_2(x) := x,$$

e infine

$$t_3(x, v, w) := \begin{cases} w, & \text{se } F_{\varphi_D}(x, v) = 0 \\ v, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente se sostituiamo t_1, t_2, t_3 a g, h, f, rispettivamente, otteniamo la formula:

$$\varphi_D(x, t_3(x, v, w)) \to \varphi_D(x, v) \wedge \varphi_D(x, w).$$

Se vale $\varphi_D(x,v)$ si avrà che $t_3(x,v,w)=w$ e quindi si otterrà la formula:

$$\varphi_D(x,w) \to \varphi_D(x,v) \land \varphi_D(x,w).$$

Se invece non vale $\varphi_D(x,v)$, allora avremo $t_3(x,v,w)=v$ e quindi:

$$\varphi_D(x,v) \to \varphi_D(x,v) \land \varphi_D(x,w).$$

Entrambe le formule sono dimostrabili in $\mathbf{T}$ e quindi $(\varphi \to \varphi \land \varphi)^D$ è dimostrabile in $\mathbf{T}$.

Come secondo esempio consideriamo il *dictum de omni* cioè l'assioma

$$\forall z \varphi(z) \to \varphi(t).$$

Supponiamo, per semplicità, che $(\varphi(z))^D = \exists x \forall y \varphi_D(x,y,z)$. La ^{D}-traduzione del *dictum de omni* è la formula:

$$\exists f \exists g \exists h \forall k (\varphi_D(k(f(k(v))), g(k(v)), f(k(v))) \to \varphi_D(h(k), v, t)).$$

Sostituiamo a f, g, h, rispettivamente, i termini t_1, t_2, t_3 definiti da:

$$t_1(k,v) := t,$$

$$t_2(k,v) := v,$$
$$t_3(k) := k(t),$$

ottenendo in tal modo la formula:

$$\varphi_D(k(t_1(k,v)), t_2(k,v), t_1(k,v)) \to \varphi_D(t_3(k), v, t)$$

e quindi l'identità:
$$\varphi_D(k(t), v, t) \to \varphi_D(k(t), v, t)$$
che chiaramente è dimostrabile in $\mathbf{T}$.

Per concludere, consideriamo come esempio di regola di inferenza il *modus ponens*. Assumiamo quindi, semplificando come sopra, che date due formule φ, ψ del linguaggio di $\mathbf{HA}$:
$$\mathbf{T} \vdash \varphi^D,$$
$$\mathbf{T} \vdash (\varphi \to \psi)^D.$$

Questo significa che se $\varphi^D = \exists x \forall y \varphi_D(x,y)$ e $\psi^D = \exists u \forall v \psi_D(u,v)$ dobbiamo avere tre termini t_1, t_2, t_3 tali che:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi_D(t_1, y),$$

$$\mathbf{T} \vdash \varphi_D(t_1, t_2(x,v)) \to \psi_D(t_3(x), v).$$

In particolare avremo che, sostituendo t_1 a x:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi_D(t_1, t_2(t_1, v)) \to \psi_D(t_3(t_1), v)$$

e, sostituendo $t_2(t_1, v)$ a y:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi_D(t_1, t_2(t_1, v)).$$

Dunque per *modus ponens*:

$$\mathbf{T} \vdash \psi_D(t_3(t_1), v)$$

e quindi, come volevamo, ψ^D è dimostrabile in **T**.[112]

Naturalmente per completare la dimostrazione dovremmo svolgere tutti i casi e soprattutto considerare formule qualsiasi contenenti non solo due variabili, ma successioni finite di variabili di lunghezza arbitraria. Ciononostante, questi esempi dovrebbero essere sufficienti per farsi un'idea del fatto che il nucleo della dimostrazione consiste nel determinare opportuni termini espliciti che trasformino certe formule di **HA** in istanze di assiomi o di teoremi di **T**.

3.4.8. Dimostrazioni di noncontraddittorietà relativa

Dal Teorema di immersione segue immediatamente il seguente:

Corollario. Se il sistema **T** è noncontraddittorio, allora anche **HA** e **PA** lo sono.

Sembra interessante capire in che rapporto stanno questi risultati di noncontraddittorietà col programma di Hilbert e coi risultati di incompletezza.

[112] Gli esempi da noi riportati si distinguono per la semplicità. I casi più complessi, ad esempio quello dell'assioma di induzione, evidenziano invece le situazioni in cui si fa uso di tutta la forza deduttiva del sistema **T**. Al riguardo si veda ad esempio *Troelstra 1973*.

Già abbiamo affrontato parte della questione, ma alla luce della breve esposizione della "Dialectica interpretation" che abbiamo dato, sembra possibile apprezzare meglio in che senso si può dire che Gödel abbia tentato una simile dimostrazione di noncontraddittorietà in alternativa al grande risultato di Gentzen.

Oggi noi sappiamo che una dimostrazione di noncontraddittorietà del sistema **T** richiede una dimostrazione di normalizzazione per i termini del linguaggio di **T** e quest'ultima, a sua volta, fa uso essenziale del principio di induzione transfinita fino a ε_0. Sotto questo aspetto, cioè dal punto di vista matematico, si potrebbe quindi dubitare del fatto che il risultato visto sopra abbia migliorato in maniera rilevante la situazione del problema della noncontraddittorietà di **PA**.

Tuttavia, a ben vedere, quello che Gödel fece con la "Dialectica" fu di assumere *come un dato di fatto che non necessita di essere dimostrato* la calcolabilità dei funzionali e quindi la normalizzabilità dei termini di **T**. In tal senso ci sembra che il risultato di Gödel costituisca un buon esempio di quella forma di dimostrazione di noncontraddittorietà che in *Gödel *1938a* lui classificava in termini di riduzione del problema della noncontraddittorietà da un sistema meno intuitivo e affidabile ad un sistema più intuitivo e costruttivo.

La "Dialectica interpretation" va quindi vista come un notevole contributo ad una forma liberalizzata del programma di Hilbert in cui:

- i concetti astratti e intensionali giocano un ruolo centrale;

- i risultati di incompletezza sono sì un punto di riferimento, ma non in quanto dimostrazione del totale fallimento del fondazionalismo hilbertiano, bensì come termini a partire dai quali certi tratti del programma di Hilbert devono inevitabilmente subire una revisione.

3.4.9. In che senso l'aritmetica intuizionista è costruttiva?

Come abbiamo anticipato sopra, in *Gödel *1941* viene posta molta attenzione, più che sulle dimostrazioni di noncontraddittorietà, sui risultati riguardanti specificamente l'intuizionismo e la matematica costruttiva.

A pagina 199 della conferenza di Yale troviamo infatti un'applicazione della "Dialectica" che costituisce una prima risposta al quesito "In what sense is intuitionistic logic constructive?". Secondo Gödel un primo senso in cui, in particolare, l'aritmetica intuizionista è costruttiva è il seguente:

se si dimostra una proposizione esistenziale $\exists x\varphi(x)$ *in* **HA**, *allora la sua* ^{D}*-traduzione* $\exists x\varphi^D(x)$ *sarà dimostrabile in* **T**. Ciò significa che è possibile costruire un termine t tale che in **T** si dimostri $\varphi^D(t)$.

Abbiamo visto come in **1941* e già prima in *1933a* Gödel criticasse la restrizione intuizionista rispetto alle dimostrazioni di esistenza non-costruttive, visto che poi venivano ammesse formule come $\neg\forall x\varphi(x)$. Con l'applicazione della "Dialectica" vista qui sopra, l'autore sottolinea il fatto che, nonostante tutto, è possibile attribuire un significato genuinamente costruttivo ai teoremi esistenziali.

In modo del tutto analogo, l'altra restrizione inessenziale imposta dagli intuizionisti alla logica classica, quella del principio del terzo escluso, può essere in qualche modo legittimata o per lo meno spiegata nel senso che è possibile costruire una formula aritmetica $\varphi(x)$ tale che $\neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ è noncontraddittoria rispetto alla logica intuizionista. Questa è chiaramente una genuina restrizione rispetto alla logica classica visto che la formula $\neg\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ non può essere mai aggiunta consistentemente ad un sistema formale classico.

Un'ultima applicazione della "Dialectica interpretation" riguarda il principio di Markov o meglio la cosiddetta "regola di Markov":

$$\neg\neg\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\varphi(x)$$

per φ ricorsiva primitiva. Al riguardo in *Gödel *1941* l'autore spiega come una dimostrazione di esistenza classica, cioè la dimostrazione di una formula della forma $\exists x\varphi(x)$, possa essere resa costruttiva mediante l'interpretazione ^{D} purché $\varphi(x)$ sia una proprietà decidibile dei numeri. Gödel attribuisce certamente grande importanza a questa applicazione tanto è vero che la richiama anche nel suo *1972* dove possiamo leggere:[113]

> ... il principio di Markov ... è banalmente dimostrabile per ogni funzione ricorsiva primitiva φ. Questo attribuisce un interesse a questa interpretazione della logica intuizionista ... persino se presupponiamo la logica di Heyting ...

Questa citazione è piuttosto rilevante in quanto lo schema di Markov non è accettato dal punto di vista intuizionista dal momento che risulta essere falso per la teoria delle "lawless sequences".[114] In tal senso la **T** di Gödel sembra costituire davvero un sistema che ben realizza l'idea di cercare un paradigma di costruttività chiaramente distinto da quello intuizionista.

[113]Cf. *Gödel *1941* in *Gödel 1990*, pag. 276.
[114]Cf. al riguardo *Troelstra 1973* e *1990*.

3.5. Considerazioni conclusive

Concludiamo questo terzo capitolo con alcune considerazioni generali di carattere storico.

(1) I primi lavori gödeliani sulla logica e sull'aritmetica intuizionista si collocano negli anni immediatamente successivi alla dimostrazione dei teoremi di incompletezza. Si potrebbe pensare che Gödel, sulla base del necessario ripensamento del programma di Hilbert che l'incompletezza imponeva, si volse a considerare in modo più approfondito l'approccio intuizionista ai fondamenti della matematica in quanto questo, pur costituendo un punto di vista più restrittivo di quello classico, rappresentava comunque un'estensione del punto di vista hilbertiano nel senso che in esso veniva ammesso l'uso di nozioni astratte.

    Ben presto però Gödel riuscì a mettere in evidenza alcuni difetti dell'approccio intuizionista (la nozione di "dimostrazione costruttiva", le restrizioni inessenziali che i sistemi intuizionisti imponevano ai sistemi classici, ecc ...).

(2) Nella seconda metà degli anni Trenta Gödel cominciò a mettere a fuoco una nozione di costruttività che rappresentava un deciso miglioramento rispetto a quella intuizionista. Tale nozione veniva definita sulla base dei seguenti criteri di costruttività:

    (a) l'universo di discorso, l'ontologia intesa di un sistema costruttivo deve essere numerabile;
    (b) le relazioni primitive devono essere decidibili e le funzioni primitive devono essere calcolabili;
    (c) l'esistenza deve essere intesa come esistenza effettiva ossia come costruibilità effettiva di un esempio;
    (d) le definizioni impredicative (compresa l'autoapplicazione di un oggetto a se stesso) devono essere evitate (ovunque possibile).

    Quest'ultimo punto è il più problematico e tuttavia in varie occasioni Gödel sottolineò il fatto che le restrizioni genuine poste dall'intuizionismo alla matematica classica non fossero quelle logiche ma quelle relative alla matematica superiore ed in particolare proprio ai metodi di definizione impredicativi.

(3) Nei primi anni Quaranta Gödel precisò questa nozione o "paradigma" di costruttività nel sistema **T** e, usando la "Dialectica interpretation" riuscì, da un lato, a dare una lettura "davvero costruttiva" dell'aritmetica intuizionista, dall'altro, a fornire una dimostrazione di noncontraddittorietà dell'aritmetica di Peano con strumenti deduttivi più forti di quelli finitisti e "più deboli" di quelli usati da Gentzen. E' importante ricordare che la "Dialectica interpretation" può essere ricondotta al programma di Hilbert non solo in quanto ottiene una dimostrazione di consistenza nel modo più costruttivo possibile, ma anche perché, dal punto di vista tecnico, costituisce una rielaborazione della nozione di *funzionale* formulata in *Hilbert 1926*.

4. L'argomento ontologico

4.1. Introduzione

E' ben noto che già negli anni Venti Gödel lesse le principali opere di Kant e che negli anni Trenta si dedicò piuttosto intensamente allo studio di alcuni scritti di Leibniz.[115] Fu probabilmente dalla frequentazione di questi due autori che derivò il tentativo fatto da Gödel nel 1941 di formalizzare il cosiddetto "argomento ontologico" per l'esistenza di Dio di Anselmo d'Aosta. Il tema, si sa, era centrale nella "Dialettica trascendentale" della *Critica della ragion pura* di Kant e venne affrontato a più riprese, spesso in polemica con Cartesio, da Leibniz.

Dall'attento esame del *Nachlass* fatto da Dawson nel corso degli anni Ottanta è risultato che Gödel tornò più volte sul tema della formalizzazione dell'argomento ontologico negli anni Quaranta e Cinquanta. Mancano riscontri per quanto riguarda la decade successiva e tuttavia fu proprio nel 1970 che egli rese in qualche modo pubblico il suo tentativo, mostrando uno schizzo di dimostrazione a Dana Scott.

All'epoca Gödel era tormentato dalla paura di scomparire prematuramente e, temendo che la sua dimostrazione rimanesse completamente sconosciuta, pensò di riferirla a una persona di fiducia, evitando comunque la pubblicazione. Scott stese delle note dell'argomento e lo presentò, sempre nel 1970, all'interno di un seminario sull'implicazione logica all'università di Princeton.[116]

Lo schizzo di dimostrazione mostrata da Gödel a Scott venne pubblicata, assieme alle note, nel 1987 da Jordan H. Sobel in appendice ad un articolo intitolato "Gödel's ontological proof". Poi, nel 1995, quello stesso schizzo[117] fu pubblicato nel terzo volume dei *Collected works* con un'introduzione storico-filologica di Robert M. Adams[118] e con alcuni stralci del *Nachlass* riguardanti l'argomento ontologico e alcune nozioni ad esso associate.

[115]Cf. al riguardo *Wang 1981, 1987, 1996* e *Dawson 1997*.

[116]Le note storiche che riportiamo qui sono dovute a *Sobel 1987*, a *Dawson 1997* e soprattutto alla nota introduttiva di Robert M. Adams (*Adams 1995*) relativa al materiale inedito sull'argomento ontologico pubblicato nel terzo volume dei *Collected works*.

[117]Cf. *Gödel *1970*.

[118]Cf. *Adams 1995*.

4.2. Motivazioni

Dal diario di Oskar Morgenstern, una delle persone più vicine a Gödel per tutto il periodo da lui trascorso a Princeton, risulta che Gödel non volle pubblicare la sua formalizzazione dell'argomento ontologico non tanto perché questa non lo convincesse o non lo soddisfacesse, quanto piuttosto per timore che si potesse pensare:[119]

> ... che lui di fatto credesse in Dio, mentre lui era impegnato solo in una ricerca logica (cioè nel mostrare che una tal prova è possibile con assunzioni classiche ... corrispondentemente assiomatizzate).

Di conseguenza, il tentativo di Gödel dovrebbe essere visto solo come un esercizio di formalizzazione e come un'applicazione della logica modale semmai all'ontologia generale ma non certo alla teologia.

L'idea che l'argomento gödeliano non avesse finalità teologiche né religiose non deve però oscurare il fatto che l'autore poteva tuttavia aspirare ad utilizzare questo risultato per derivarne considerazioni filosofiche o magari fondazionali. In tal senso sembra infatti interpretabile la seguente affermazione presente in un quaderno di appunti filosofici di Gödel:[120]

> ... Se la dimostrazione ontologica è corretta, allora si può ottenere un'intuizione *a priori* dell'esistenza (attualità) di un oggetto non concettuale.

Dunque, seguendo quest'ultima lettura dell'argomento ontologico, il tentativo gödeliano potrebbe essere inserito nell'ambito delle ricerche filosofiche che Gödel nella *Gibbs lecture* definì come una fondazione rigorosa del platonismo. La possibilità di avere conoscenza matematicamente fondata dell'esistenza (necessaria) di un oggetto sommamente perfetto potrebbe cioè essere vista come un primo passo verso una fondazione rigorosa di un'ontologia realista o platonista.

In quanto esercizio di formalizzazione e in quanto applicazione della logica modale normale **S5**, abbiamo pensato di inserire questo contributo nella prima parte del nostro lavoro.

[119] Dal diario di Morgenstern, 29 agosto 1970, Dip. collezioni rare, Duke University Library, Durham, North-Carolina.

[120] Intitolato con la sigla *Max XI* collocabile in un periodo di tempo non ben precisato fra il 1946 e il 1955. Cf. anche *Gödel 1995*, pag. 431.

4.3. Proprietà positive

Come sottolineato da Sobel[121] e da Adams,[122] l'argomento ontologico di Gödel non è imparentato direttamente con quello esposto per la prima volta da Anselmo d'Aosta nel *Proslogion* (basato sulla nozione di "Ens quo maius cogitari nequit") né con quello di Cartesio (fondato sulla nozione di "Ens perfectissimus"), bensì con quello di Leibniz. Come Leibniz, Gödel definisce Dio come un ente dotato di tutte le perfezioni possibili ossia come un oggetto che gode di tutte le proprietà puramente e illimitatamente positive.

Ma cosa intendeva di preciso Gödel per "proprietà positiva"? Non è facile rispondere a questa domanda, anche perché le poche e frammentarie affermazioni dell'autore al riguardo non sono affatto coerenti e chiare. L'unica definizione rigorosa e comprensibile è quella che emerge dagli assiomi e dai postulati proposti da Gödel per l'argomento. Può tuttavia essere utile presentare prima la nozione leibniziana di "proprietà positiva" per poi avere un termine di confronto nel descrivere quella gödeliana.

Leibniz definì la nozione di proprietà positiva o perfezione come:[123]

> ... ogni qualità semplice, che sia positiva ed assoluta, tale cioè, che, ciò che esprime, lo esprime senza limiti.

Emergono quindi tre caratteristiche fondamentali della nozione leibniziana di perfezione:

- l'essere qualità (e quindi non relazione ma proprietà interna o più semplicemente monadica);
- la semplicità (e quindi non analizzabilità);
- l'assolutezza (nel senso di assenza di limiti).

E' sulla base di queste tre caratteristiche che Leibniz, in polemica con Cartesio, tentò di dimostrare che tutte le perfezioni sono compatibili. Anche Gödel cercò di dimostrare questo fatto ossia tentò di provare, nei termini da lui usati, che l'esistenza di Dio è possibile, che un oggetto dotato di tutte le perfezioni può esistere. Tuttavia, nessuna delle definizioni informali date da Gödel del termine "perfezione" è del tutto riconducibile a quella leibniziana.

---

[121] Cf. *Sobel 1987*.
[122] Cf. *Adams 1995*.
[123] Cf. *Leibniz 1967*, pag. 261.

Consideriamo alcune delle definizioni date da Gödel.[124] Nell'articoletto del 1970 che presenta l'argomento con tutti i dettagli essenziali troviamo almeno due differenti caratterizzazioni della nozione di proprietà positiva. La prima, con cui si conclude *Gödel *1970*, afferma:[125]

(a) "positivo significa positivo nel senso morale estetico (indipendentemente dalla struttura accidentale del mondo)."

Qui "positivo" viene letto come "buono in assoluto", assumendo quindi che si diano dei valori indipendenti dalle contingenze storiche o fisiche del mondo. Questa prima definizione è difficilmente confrontabile con quella leibniziana, ma, almeno per un tratto sembra decisamente differente: si tratta di una caratterizzazione in termini di valori morali o estetici, mentre la nozione leibniziana parrebbe svincolata da considerazioni di questo tipo.

La seconda caratterizzazione presente in *Gödel *1970* dice:[126]

(b) "[Positivo] lo si può intendere anche come pura "attribuzione" in quanto opposta a "privazione" (oppure "contenente privazione")."

Questa seconda definizione sembra più vicina della precedente a quella leibniziana. Pur non facendo riferimento alla semplicità, il fatto di essere pura attribuzione sembrerebbe implicare che una perfezione non sia una relazione ma piuttosto una proprietà monadica che sia positiva in modo illimitato (altrimenti conterrebbe una qualche privazione).

In nota Gödel fornisce tuttavia una spiegazione del termine "attribuzione" che rende impossibile interpretare le perfezioni come proprietà monadiche, infatti vi leggiamo:[127]

(c) "la forma normale in termini di proprietà elementari contiene un membro senza negazioni ..."

Dunque, nel giro di poche righe, in *Gödel *1970* troviamo ben tre possibili letture del termine "perfezione" o "proprietà positiva": una *morale-estetica*, una *ontologica* ed infine una *logica*. Nessuna delle tre viene spiegata sufficientemente, ma di tutte e tre queste interpretazioni troviamo tracce nei quaderni di appunti del *Nachlass* dedicati all'argomento ontologico.

[124]Cf. al riguardo *Gödel 1995*, pagg. 403-404, 429-437.
[125]Cf. *Gödel 1995*, pag. 404.
[126]Cf. *Gödel 1995*, pag. 404.
[127]Cf. *Gödel *1970* in *Gödel 1995*, pag. 404.

A pagina 106 di *Phil XIV* troviamo una definizione che richiama sia la (a) che la (b):[128]

> E' possibile interpretare il positivo come perfezione; ossia come "puramente buono", cioè tale che non implichi alcuna negazione di "puramente buono".

Ancora a pagina 106 dello stesso quaderno di appunti leggiamo una definizione analoga alla (b), ossia:[129]

> Una proprietà è una perfezione se e solo se non implica nessuna negazione di una perfezione.

Infine a pagina 108 sempre di *Phil XIV* Gödel dà una caratterizzazione che ricorda la (c) ossia:[130]

> Le proprietà positive sono precisamente quelle che si possono formare a partire da quelle elementari mediante applicazione delle operazioni $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Non è facile stabilire con precisione il significato di quest'ultima definizione, soprattutto in considerazione del fatto che le proposizioni costruite con i connettivi $\wedge, \vee, \rightarrow$ non escludono implicite negazioni visto che, classicamente, l'implicazione e la congiunzione sono traducibili in termini di negazione e disgiunzione e la disgiunzione può esser letta in termini di negazione e congiunzione.

Di fatto queste brevi caratterizzazioni non hanno sufficiente omogeneità per determinare un'immagine chiara di come Gödel intendesse le proprietà positive. Per questo occorre passare ad analizzare gli assiomi gödeliani per l'argomento ontologico i quali, implicitamente, definiscono la nozione di perfezione rigorosamente e univocamente.

4.4. L'argomento di Gödel

Presentiamo qui di seguito l'argomento ontologico informalmente cercando di seguire fedelmente la stesura del 1970. Nel paragrafo successivo esporremo invece un sistema formale modale, basato su idee di Richard Montague,[131]

[128] Cf. *Gödel 1995*, pag. 434.
[129] Cf. *Gödel 1995*, pag. 434.
[130] Cf. *Gödel 1995*, pag. 436.
[131] Cf. *Montague 1970*.

Daniel Gallin[132] e Melvin Fitting,[133] in cui è possibile formalizzare le idee di Gödel in ogni dettaglio.

Col simbolo $\mathcal{P}(\varphi)$ Gödel indica il fatto che la proprietà φ è una perfezione. Il formalismo da lui usato è un po' ambiguo ammettendo che, a seconda dei contesti, φ possa indicare una variabile per proprietà o una metavariabile per proposizioni. Inoltre l'autore non sembra fare distinzioni fra termini intensionali ed estensionali.

Il primo assioma dato da Gödel è il seguente:

$$\mathcal{P}(\varphi) \wedge \mathcal{P}(\psi) \rightarrow \mathcal{P}(\varphi \wedge \psi). \tag{1}$$

Intuitivamente esso dice che: l'intersezione di due proprietà positive è, a sua volta, una proprietà positiva. Si tratta di un assioma piuttosto delicato che l'autore commenta in nota dicendo che esso vale "per qualsiasi numero di addendi" cioè per ogni numero di congiunti. Si osservi che se non si vuole utilizzare una logica infinitaria, la precisazione di Gödel significa: per qualsiasi numero *finito* di congiunti. Tuttavia non è escluso a priori che le proprietà positive possano essere infinite e quindi non è detto che questo assioma ci possa dare informazioni sull'intersezione generalizzata di tutte le proprietà positive.

L'autore dà come secondo assioma il seguente:

$$\mathcal{P}(\varphi) \vee \mathcal{P}(\neg\varphi) \tag{2}$$

aggiungendo che la disgiunzione va letta in modo esclusivo, ossia: o la proprietà φ è positiva oppure la proprietà $\neg\varphi$ è positiva, ma non possono essere entrambe positive né entrambe negative.

Gödel prosegue poi con due definizioni: quella di "Dio" o "oggetto divino" e quella di "essenza" o "proprietà essenziale" di un oggetto. Dio viene definito come "l'ente che gode di tutte le proprietà positive", ossia come segue:

$$G(x) \leftrightarrow \forall\varphi(\mathcal{P}(\varphi) \rightarrow \varphi(x)), \tag{3}$$

dove $G(x)$ sta per "x è divino". Per essere precisi qui vien definita solo la nozione di "oggetto divino", per l'unicità occorre dare una dimostrazione opportuna.

---

[132] Cf. *Gallin 1975.*

[133] Cf. *Fitting 2002.*

La definizione dalla nozione di essenza o di proprietà essenziale è quella di "una proprietà che implica necessariamente tutte le proprietà di un oggetto dato", ossia:

$$\mathcal{E}(\varphi, x) \leftrightarrow \forall\psi(\psi(x) \rightarrow \Box\forall y(\varphi(y) \rightarrow \psi(y))), \tag{4}$$

dove $\mathcal{E}(\varphi, x)$ sta per "φ è una proprietà essenziale di x". Gödel commenta questa definizione dicendo che due qualsiasi essenze di un oggetto x sono equivalenti, dunque, assumendo il principio di identità degli indiscernibili, se un oggetto x ha una proprietà essenziale allora questa è unica. Abbiamo qui una definizione piuttosto controintuitiva, visto che di solito siamo abituati a pensare all'essenza di un oggetto come alla sua proprietà più fondamentale, come alla proprietà di x senza la quale x non è x. L'essenza definita qui da Gödel è invece una proprietà che implica sì le proprietà fondamentali di x ma anche (se ne ha) quelle contingenti. Si osservi che l'autore non richiede che l'essenza di un oggetto x sia una proprietà dell'oggetto x.

L'argomento di Gödel prosegue con un terzo assioma riguardante ancora le proprietà positive. Esso afferma che le perfezioni sono "rigide" o "stabili" da mondi possibili a mondi possibili, ossia che se una proprietà è positiva nel mondo attuale, allora lo è in qualsiasi mondo possibile e che, viceversa, se è negativa attualmente, allora lo è in qualsiasi mondo. Formalmente avremo i due seguenti assiomi:

$$\mathcal{P}(\varphi) \rightarrow \Box\mathcal{P}(\varphi), \tag{5.1}$$

e

$$\neg\mathcal{P}(\varphi) \rightarrow \Box\neg\mathcal{P}(\varphi). \tag{5.2}$$

Assumendo come logica modale di base gli assiomi di **S5**, (5.1) e (5.2) risultano essere dimostrabilmente equivalenti. Gödel spiega questi due assiomi dicendo che essi seguono "dalla natura della proprietà". Si tratta di un commento telegrafico e piuttosto criptico, tuttavia se le perfezioni devono essere interpretate come proprietà logicamente positive e quindi positive in modo indipendente dallo stato del mondo, allora esso non sembra poi del tutto fuori luogo.

Il primo teorema enunciato, ma non dimostrato, da Gödel è il seguente:

$$G(x) \rightarrow \mathcal{E}(G, x). \tag{6}$$

Esso stabilisce che l'essenza di un oggetto divino consiste proprio nel possedere tutte le proprietà positive cioè nell'essere un oggetto divino. Dunque l'essere divino di un dato oggetto x ne implica tutte le proprietà.

Segue la definizione della nozione di esistenza necessaria, cioè:

$$N(x) \leftrightarrow \forall\varphi(\mathcal{E}(\varphi, x) \rightarrow \Box\exists y\varphi(y)). \tag{7}$$

Intuitivamente, un oggetto x esiste necessariamente, in simboli $N(x)$, se ogni sua proprietà essenziale è esemplificata in ogni mondo possibile. Ecco che finalmente disponiamo di un esempio di proprietà positiva, cioè appunto l'esistenza necessaria. La constatazione di questo fatto costituisce il quarto assioma proposto da Gödel, cioè:

$$\mathcal{P}(N), \tag{8}$$

l'esistenza necessaria è una perfezione.

A questo punto l'autore enuncia, di nuovo senza dimostrarlo, un secondo teorema che stabilisce che se un oggetto x è divino, allora esso è esemplificato in ogni mondo possibile, cioè, esiste necessariamente. In simboli:

$$G(x) \rightarrow \Box\exists yG(y). \tag{9}$$

Attraverso tre passaggi inferenziali, Gödel deduce un terzo teorema che esprime quello che è noto, nella letteratura sull'argomento ontologico, come *principio di Anselmo*, cioè: l'esistenza di Dio è impossibile o necessaria. In forma implicativa, il teorema ci dice che se l'esistenza di Dio è possibile, allora è necessaria:

$$\Diamond\exists xG(x) \rightarrow \Box\exists yG(y). \tag{10}$$

L'autore commenta questo risultato dicendo che l'antecedente $\Diamond\exists xG(x)$ significa che "il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile", dove per compatibile si intende noncontraddittorio. Con ciò egli formula implicitamente un quarto teorema:

$$\Diamond\exists xG(x), \tag{11}$$

il quale sarebbe dimostrabile sulla base di un quinto e ultimo assioma. Si tratta della proposizione secondo cui "tutte le proprietà implicate (necessariamente) da una proprietà positiva sono positive", ossia:

$$\mathcal{P}(\varphi) \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \mathcal{P}(\psi). \tag{12}$$

Questo assioma, spiega Gödel, implica che la proprietà espressa dalla formula $x = x$ sia positiva (essendo una proprietà tautologica è implicata da qualsiasi proprietà, quindi, in particolare, da tutte le proprietà positive e dunque anche da N). Di conseguenza, poiché, per (2), non è ammesso che una proprietà e la sua negazione siano entrambe positive, la proprietà espressa dalla formula $x \neq x$ sarà negativa. Abbiamo così un altro esempio di perfezione ed un primo esempio di proprietà negativa. Chiaramente da (10) e (11) segue $\Box \exists x G(x)$ e quindi l'esistenza di Dio risulta dimostrata.

Per concludere la nostra descrizione informale dell'argomento ontologico di Gödel ci restano solo da spiegare i tre passaggi inferenziali che giustificano la deduzione del principio di Anselmo dal teorema (9).

Il primo passaggio si ottiene per logica dei quantificatori cioè per generalizzazione e per il lemma predicativo classico:

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x \varphi(x) \to \psi) \tag{13}$$

dalla formula (9). Il secondo è dato dall'applicazione del teorema modale del sistema **K**:

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond \varphi \to \Diamond \psi). \tag{14}$$

Il terzo ed ultimo passaggio si ottiene sfruttando un teorema dimostrabile sia nel sistema **S5** che nel sistema **KD45**, ossia la formula:

$$\Diamond \Box \varphi \to \Box \varphi. \tag{15}$$

Otteniamo così il teorema (10) cioè il *principio di Anselmo.*

4.5. Un sistema formale per l'argomento ontologico

Definiamo ora un sistema formale *à la* Hilbert in cui ricostruire col massimo del rigore possibile un "buon" argomento ontologico analogo a quello di Gödel. Questo sistema, che indicheremo come **OA**, assomiglia per certi aspetti al sistema modale intensionale **IL** esposto nella monografia *Intensional and higher-order modal logic* di Daniel Gallin[134] e per altri aspetti al sistema modale intensionale di tableaus per l'argomento ontologico esposto in *Types, tableaus, and Gödel 's God* di Melvin Fitting.[135]

[134] Si veda *Gallin 1975.*
[135] Si veda *Fitting 2002.*

4.5.1. La logica di base: il sistema modale intensionale di ordine superiore HML

Definiamo una collezione di tipi che contenga non solo tipi estensionali (come quello degli oggetti individuali di base), ma anche tipi intensionali (i tipi di proprietà astratte).

La struttura dei tipi

La collezione TP dei tipi intensionali ed estensionali è il più piccolo insieme tale che:

- $0 \in TP$;
- se $\tau_1, ..., \tau_n \in TP$ allora $\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle \in TP$;
- se $\tau \in TP$ allora $\uparrow \tau \in TP$;
- per ogni $\tau \in TP$, τ è un tipo estensionale o intensionale; τ è estensionale se e solo se $\uparrow \tau$ è intensionale.

Intuitivamente: 0 è il tipo degli oggetti di base, degli individui (che hanno proprietà ma non sono essi stessi proprietà). $\langle 0 \rangle$ sarà il tipo delle proprietà in estensione di individui, cioè delle collezioni di individui che condividono una certa proprietà. $\uparrow \langle 0 \rangle$ sarà il tipo delle proprietà intensionalmente intese di oggetti di tipo 0.

Se, ad esempio, 0 è il tipo di tutti gli oggetti dell'universo, la collezione degli oggetti rossi dell'universo sarà di tipo $\langle 0 \rangle$ e il concetto astratto "essere rosso" di tipo $\uparrow \langle 0 \rangle$.[136]

$\langle \uparrow \langle 0 \rangle \rangle$ sarà il tipo delle collezioni di proprietà astratte e $\uparrow \langle \uparrow \langle 0 \rangle \rangle$ il tipo dei concetti di tipo $\uparrow \langle 0 \rangle$. In tal modo si può procedere definendo tipi arbitrariamente complessi come ad esempio:

$$\uparrow \langle \uparrow \langle 0 \rangle , \langle 0 \rangle , \langle \uparrow \langle 0 \rangle , 0 \rangle \rangle .$$

Il linguaggio $\mathcal{L}$ di HML

L'alfabeto di **HML** è costituito dai seguenti simboli:

- un'infinità numerabile di variabili $x_0^\tau, x_1^\tau, x_2^\tau, ...$ per ogni $\tau \in TP$;

[136] L'esempio è dovuto a *Fitting 2002*.

- un'infinità numerabile di costanti $c_0^\tau, c_1^\tau, c_2^\tau, ...$ per ogni $\tau \in TP$;
- i connettivi $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$;
- i quantificatori: $\forall, \exists$;
- i simboli per l'astrazione e per la chiusura estensionale: λ e $\downarrow$;
- gli operatori modali: $\Diamond, \Box$;
- i simboli ausiliari: (,).

Definiamo per recursione simultanea le due collezioni TM e FM dei termini e delle formule di **HML**.

TM è il più piccolo insieme di espressioni del linguaggio di **HML** tale che:

- per ogni variabile x, per ogni tipo τ, $x^\tau \in TM$;
- per ogni costante c, per ogni tipo τ, $c^\tau \in TM$;
- se φ è una formula di $\mathcal{L}$, allora $\lambda x_1^{\tau_1} ... \lambda x_n^{\tau_n}.\varphi \in TM$;
- se $t^{\uparrow\tau}$ è un termine di tipo intensionale allora t^τ è un termine di tipo estensionale.

FM è il più piccolo insieme di espressioni di $\mathcal{L}$ tale che:

- se $t_1^{\tau_1}, ..., t_n^{\tau_n}, t^\tau \in TM$ e $\tau = \langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle$, allora $t(t_1, ..., t_n) \in FM$;
- se $t_1^{\tau_1}, ..., t_n^{\tau_n}, t^\tau \in TM$ e $\tau =\uparrow \langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle$ allora $tt_1...t_n \in FM$;
- se $\varphi, \psi \in FM$ allora $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in FM$;
- se $\varphi \in FM$, allora $\Diamond\varphi, \Box\varphi \in FM$;
- se $\varphi \in FM$ e x è una variabile qualsiasi, $\forall x\varphi, \exists x\varphi \in FM$.

Assiomi e regole

Il sistema **HML** è un sistema modale basato sugli assiomi di **S5**. Esso ammette la quantificazione su variabili di ogni tipo finito e, avendo a che fare con termini sia intensionali che estensionali, necessita di due differenti assiomi di estensionalità per confrontare i termini dell'uno e dell'altro genere.
Assiomi logici. Gli assiomi logici di **HML** sono i seguenti:

TAUT ogni tautologia proposizionale classica;

Q1 $\forall x^\tau \varphi(x^\tau) \to \varphi(t^\tau)$, dove t è libero per x in φ;

Q2 $\varphi(t^\tau) \to \exists x^\tau \varphi(x^\tau)$, dove t è libero per x in φ.

Identità. Assumiamo i cosiddetti principi di identità degli indiscernibili e di indiscernibilità degli identici nella seguente forma:

LEIB $\forall x^\tau \forall y^\tau ((x^\tau = y^\tau) \leftrightarrow \forall z(z(x) \leftrightarrow z(y)))$.

Assiomi modali. Come anticipato sopra, assumiamo gli assiomi caratteristici del sistema modale normale **S5**, cioè:

K $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;

T $\Box\varphi \to \varphi$;

E $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$.

Astrazione. Assumiamo un principio di astrazione che ci garantisce che per ogni formula φ esiste un termine intensionale che rappresenta la proprietà astratta espressa da tale formula. Ossia:

AP Per ogni formula φ del linguaggio di **HML**:

$$\exists y^\tau \forall y_1^{\tau_1} ... \forall y_n^{\tau_n} (y y_1 ... y_n \leftrightarrow \varphi)$$

dove $\tau = \uparrow \langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle$.

Estensionalità. Muovendoci in un contesto modale e intensionale, nulla ci garantisce che, data l'identità estensionale di due termini intensionali, questa identità attuale si conservi in ogni mondo possibile. Dovremo quindi assumere un principio di estensionalità EXT per termini estensionali ed inoltre un principio di estensionalità I-EXT per termini intensionali. In simboli avremo:

EXT Per ogni tipo estensionale τ:

$$\forall x^\tau \forall y^\tau (\forall z_1 ... \forall z_n (x(z_1, ..., z_n) \leftrightarrow y(z_1, ..., z_n)) \to x = y).$$

I-EXT Per ogni tipo intensionale $\tau = \uparrow \langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle$:

$$\forall x^\tau \forall y^\tau (\Box(\downarrow x = \downarrow y) \to x = y),$$

dove, dato un termine t di tipo intensionale, indichiamo con $\downarrow t$ la *chiusura estensionale* di t ossia, intuitivamente, la collezione degli oggetti del mondo attuale che godono della proprietà espressa da t.

Regole di inferenza. Assumiamo infine le seguenti regole di inferenza:

mp $\varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \psi$;

gp $\varphi \to \psi(x^\tau) \Rightarrow \varphi \to \forall x^\tau \psi(x^\tau)$, dove x^τ non occorre libera in φ;

pa $\varphi(x^\tau) \to \psi \Rightarrow \exists x^\tau \varphi(x) \to \psi$, dove x^τ non occorre libera in ψ;

nec $\varphi \Rightarrow \Box\varphi$.

4.5.2. Il sistema OA

Il sistema formale modale **OA** si ottiene estendendo il sistema **HML** con sei definizioni D1-D6 e cinque assiomi specifici G1-G5. Nel resto di questo capitolo per semplificare l'esposizione assumeremo, salvo eccezioni, le seguenti notazioni. Useremo le variabili:
$x, y, z, ...$ come abbreviazioni di $x_0^0, x_1^0, x_2^0, ...$;
$X, Y, Z, ...$ come abbreviazioni di $x_0^{\uparrow\langle 0 \rangle}, x_1^{\uparrow\langle 0 \rangle}, x_2^{\uparrow\langle 0 \rangle}, ...$;
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, ...$ come abbreviazioni di $x_0^{\uparrow\langle\uparrow\langle 0 \rangle\rangle}, x_1^{\uparrow\langle\uparrow\langle 0 \rangle\rangle}, x_2^{\uparrow\langle\uparrow\langle 0 \rangle\rangle}, ...$

Definizioni.

D1. $\mathcal{P}(X)$ sta per "X è una proprietà positiva"

$\mathcal{P}$ è un termine intensionale di tipo $\uparrow \langle \uparrow \langle 0 \rangle \rangle$ cioè una proprietà di proprietà.

D2. $G(x) \leftrightarrow \forall X(\mathcal{P}(X) \to X(x))$

G è il termine intensionale $\lambda x.\forall X(\mathcal{P}(X) \to X(x))$ di tipo $\uparrow \langle 0 \rangle$ che, intuitivamente, esprime la proprietà "essere un oggetto divino".

D3. $$\mathcal{E}(Y,x) \leftrightarrow Y(x) \wedge \forall Z(Z(x) \rightarrow \Box\forall z(Y(z) \rightarrow Z(z)))$$

$\mathcal{E}$ è il termine intensionale $\lambda Y \lambda x.Y(x) \wedge \forall Z(Z(x) \rightarrow \Box\forall z(Y(z) \rightarrow Z(z)))$ di tipo $\uparrow \langle\uparrow \langle 0\rangle, 0\rangle$ che esprime la relazione "Y è un'essenza di x". Intuitivamente: un'essenza di x è una proprietà *di* x che implica necessariamente ogni proprietà di x.

D4. $$N(x) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{E}(Y,x) \rightarrow \Box\exists z Y(z))$$

N è il termine intensionale $\lambda Y.\forall Y(\mathcal{E}(Y,x) \rightarrow \Box\exists z Y(z))$ di tipo $\uparrow \langle 0\rangle$ che esprime la proprietà dell'esistenza necessaria.

D5. $$pos(\mathcal{Z}) \leftrightarrow \forall X(\mathcal{Z}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X))$$

pos è il termine intensionale $\lambda X.\forall X(\mathcal{Z}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X))$ di tipo $\uparrow \langle\uparrow \langle 0\rangle\rangle$. Abbiamo così una nuova nozione (dovuta a *Anderson 1990*), quella di "proprietà di proprietà positive" o, più intuitivamente, di "collezione di proprietà positive". L'idea è che se vale $pos(\mathcal{Z})$ allora $\mathcal{Z}$ è una proprietà che sussume solo proprietà positive.

D6. $$int(X,\mathcal{Z}) \leftrightarrow \Box\forall z(X(z) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{Z}(Y) \rightarrow Y(z)))$$

int è il termine intensionale $\lambda X \lambda \mathcal{Z}.\Box\forall z(X(z) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{Z}(Y) \rightarrow Y(z)))$ di tipo $\uparrow \langle\uparrow \langle 0\rangle, \uparrow \langle\uparrow \langle 0\rangle\rangle\rangle$. Intuitivamente $int(X,\mathcal{Z})$ indica il fatto che la proprietà X rappresenta l'"intersezione" di tutte le proprietà sussunte da $\mathcal{Z}$.

Assiomi.

G1.1. $$\forall X(\mathcal{P}(\neg X) \rightarrow \neg\mathcal{P}(X))$$

G1.2. $$\forall X(\neg\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\neg X))$$

Il significato intuitivo di questi due assiomi è il seguente: di una proprietà X e della sua negazione $\neg X$ *esattamente* una è positiva.

G2. $$\forall X \forall Y(\mathcal{P}(X) \wedge \Box\forall z(X(z) \rightarrow Y(z)) \rightarrow \mathcal{P}(Y))$$

Questo secondo assioma costituisce una precisazione del (12) di Gödel ed esprime il fatto che ogni proprietà "inclusa" in una proprietà positiva è positiva.

G3. $$\forall \mathcal{Z}(pos(\mathcal{Z}) \rightarrow \forall X(int(X,\mathcal{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(X)))$$

Questo terzo assioma è un rafforzamento e generalizzazione di quello di Gödel secondo cui l'intersezione di due perfezioni è una proprietà positiva.

G4. $$\forall X(\mathcal{P}(X) \rightarrow \Box\mathcal{P}(X))$$

Questo assioma, come già detto, indica che le proprietà positive sono “rigide” o “stabili” (cioè invarianti da mondo a mondo). Come sottolineato da Marco Forti e Furio Honsell[137] questa nozione modale della “rigidità” o “stabilità” è analoga alla nozione insiemistica dell'assolutezza.

G5. $$\mathcal{P}(N)$$

Questo quinto ed ultimo assioma codifica un'assunzione tipica di molti argomenti ontologici tradizionali (lo troviamo ad esempio in Anselmo e in Cartesio).

4.5.3. Alcuni risultati

Dimostriamo ora alcuni fatti significativi all'interno del sistema **OA**.

Proposizione 1. Se c'è una proprietà positiva, allora la proprietà $\lambda x.x = x$ è positiva. In simboli:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists X\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda x.x = x).$$

Dimostrazione. Sappiamo che per ogni proprietà X:

$$\Box\forall x(X(x) \rightarrow x = x).$$

Per l'assioma G2:

$$\forall X(\mathcal{P}(X) \wedge \Box\forall x(X(x) \rightarrow x = x) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda x.x = x))$$

e quindi, per TAUT e logica dei quantificatori:

$$\exists X\mathcal{P}(X) \rightarrow (\Box\forall x(X(x) \rightarrow x = x) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda x.x = x)).$$

Dunque per TAUT (scambio di premesse) si ottiene:

$$\Box\forall x(X(x) \rightarrow x = x) \rightarrow (\exists X\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda x.x = x))$$

e quindi, per mp, la conclusione. ■

[137] Cf. *Forti et Honsell 2000*.

Corollario 1. L'identità è una proprietà positiva. In simboli:

$$\mathcal{P}(\lambda x.x = x).$$

Segue dalla proposizione 1 per G5 e TAUT (transitività di $\rightarrow$). ■

Corollario 2. La negazione dell'identità è una proprietà negativa,

$$\mathbf{OA} \vdash \neg\mathcal{P}(\lambda x.x \neq x).$$

Poiché per definizione $(\lambda x.x \neq x) = \neg(\lambda x.x = x)$, il corollario segue dalla proposizione 1 per G1. ■

Proposizione 2. Un ente divino ha tutte e sole le proprietà positive, in simboli:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall x(G(x) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{P}(Y) \leftrightarrow Y(x))).$$

Dimostrazione. Per definizione di G, cioè per D2, se $\mathbf{OA} \vdash G(x)$, allora in $\mathbf{OA}$ si dimostra:

$$\forall Y(\mathcal{P}(Y) \rightarrow Y(x)).$$

Ci basta dimostrare il viceversa, cioè che se $\mathbf{OA} \vdash G(x)$ allora è dimostrabile anche:

$$\forall Y(Y(x) \rightarrow \mathcal{P}(Y)).$$

Assumiamo che si dimostrino $G(x)$ e $Y(x)$. Supponiamo inoltre, per assurdo, che si dimostri $\neg\mathcal{P}(Y)$. Allora, per G1.2, abbiamo $\mathcal{P}(\neg Y)$ e per D2 otteniamo inoltre $\neg Y(x)$. Ma questa è una contraddizione e quindi si ha $\mathcal{P}(Y)$. ■

Proposizione 3. Se un oggetto ha una proprietà essenziale, allora questa è unica, cioè:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall X \forall Y \forall z(\mathcal{E}(X,z) \wedge \mathcal{E}(Y,z) \rightarrow \Box\forall w(X(w) \leftrightarrow Y(w))).$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che in $\mathbf{OA}$ si dimostrino $\mathcal{E}(X,z)$, $\mathcal{E}(Y,z)$ ed esista un w tale che $X(w)$ e $\neg Y(w)$. Per definizione di $\mathcal{E}$ cioè per D3:

$$X(z) \wedge \forall Y(Y(z) \rightarrow \Box\forall w(X(w) \rightarrow Y(w))).$$

Ma chiaramente $\mathcal{E}(Y,z)$ implica $Y(z)$ e quindi si ha:

$$\Box\forall w(X(w) \rightarrow Y(w)).$$

Dunque otteniamo $Y(w)$, ma questo è assurdo. Quindi:

$$\Box\forall w(X(w) \leftrightarrow Y(w)).$$ ■

Proposizione 4. Se una proprietà Y è l'essenza di un certo oggetto x, allora x è l'unico oggetto che gode della proprietà Y. In breve:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall Y \forall x(\mathcal{E}(Y, x) \to \Box \forall z(Y(z) \to x = z)).$$

Dimostrazione. Per LEIB (identità degli indiscernibili) sappiamo che:

$$\forall Z(Z(x) \leftrightarrow Z(y)) \to x = y$$

e quindi per TAUT (contrapposizione):

$$x \neq y \to \exists Z \neg(Z(x) \leftrightarrow Z(y))$$

e dunque, se assumiamo per assurdo $\mathcal{E}(Y, x), Y(y)$ e $x \neq y$, otteniamo:

$$\exists Z((Z(x) \wedge \neg Z(y)) \vee (Z(y) \wedge \neg Z(x))).$$

Supponiamo che:

$$\exists Z(Z(x) \wedge \neg Z(y)). \tag{*}$$

Per $\mathsf{D3}$ e per l'assunzione $\mathcal{E}(Y, x)$ si ha:

$$\forall Z(Z(x) \to \Box \forall w(Y(w) \to Z(w)))$$

e dunque:

$$Z(x) \to (Y(w) \to Z(w)).$$

Per TAUT (scambio di premesse) e gp:

$$\forall w(Y(w) \to (Z(x) \to Z(w)))$$

e in particolare:

$$Y(y) \to (Z(x) \to Z(y)).$$

Per l'assunzione $Y(y)$, mp e gp abbiamo quindi:

$$\forall Z(Z(x) \to Z(y))$$

e cioè, per definizione di $\forall$ in termini di $\exists$ abbiamo:

$$\neg \exists Z(Z(x) \wedge \neg Z(y)).$$

Ma questo è assurdo per (*). Analogamente si procede supponendo che $\exists Z(Z(y) \wedge \neg Z(x))$. ∎

4.5.4. L'argomento ontologico in OA

Come già visto la struttura dell'argomento ontologico *à la* Gödel consta di due premesse fondamentali:

$$\Diamond\exists x G(x) \tag{i}$$

e

$$\Diamond\exists x G(x) \rightarrow \Box\exists x G(x). \tag{ii}$$

Procediamo quindi con la dimostrazione del teorema fondamentale $\Box\exists x G(x)$ passando attraverso cinque lemmi ausiliari due dei quali affermano proprio la dimostrabilità nel sistema formale **OA** delle due premesse (i) e (ii) dell'argomento gödeliano.

La strategia dimostrativa che seguiremo è dovuta in gran parte a Melvin Fitting.[138]

Lemma 1. Ogni proprietà positiva può essere esemplificata. Cioè:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall X(\mathcal{P}(X) \rightarrow \Diamond\exists y X(y)).$$

Dimostrazione. Supponiamo infatti che in **OA** si dimostri $\mathcal{P}(X)$. Allora per $\mathsf{G1}$:

$$\mathbf{OA} \vdash \neg\mathcal{P}(\neg X).$$

Dunque per $\mathsf{G2}$:

$$\mathbf{OA} \vdash \neg\Box\forall y(X(y) \rightarrow \neg X(y))$$

cioè, per definizione di $\Diamond$:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists y\neg(X(y) \rightarrow \neg X(y)).$$

Dunque, per TAUT:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists y(X(y) \wedge \neg\neg X(y))$$

e perciò, ancora per TAUT:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists y X(y). \quad \blacksquare$$

Lemma 2. E' possibile che Dio esista, cioè:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists y G(y).$$

[138] Cf. *Fitting 2002*.

Dimostrazione. Per G3, abbiamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall \mathcal{Z}(pos(\mathcal{Z}) \to \forall X(int(X, \mathcal{Z}) \to \mathcal{P}(X)))$$

e quindi sostituendo $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Z}$:

$$\mathbf{OA} \vdash pos(\mathcal{P}) \to \forall X(int(X, \mathcal{P}) \to \mathcal{P}(X)).$$

Per definizione di *pos* cioè per la D5 è banale che:

$$\mathbf{OA} \vdash pos(\mathcal{P})$$

dunque per mp:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall X(int(X, \mathcal{P}) \to \mathcal{P}(X)).$$

Poiché per D2, generalizzazione e nec:

$$\mathbf{OA} \vdash \Box \forall x(G(x) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{P}(Y) \to Y(x)))$$

allora, per D6 otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash int(G, \mathcal{P})$$

e quindi per mp:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(G).$$

Ma per il lemma 1:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(G) \to \Diamond \exists y G(y).$$

Dunque ancora per mp:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond \exists y G(y). \quad \blacksquare$$

Lemma 3. Nel sistema **OA** si dimostra che l'essenza di un essere divino è quella di avere tutte (e sole) le proprietà positive. In simboli:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall x(G(x) \to \mathcal{E}(G, x)).$$

Dimostrazione. Supponiamo che $G(x)$ e $Y(x)$ siano dimostrabili in **OA**. Allora per la proposizione 2:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(Y). \qquad (*)$$

Per la D2 abbiamo che:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall z(G(z) \to \forall Z(\mathcal{P}(Z) \to Z(z))).$$

Per TAUT, $\mathsf{Q1}$ e $\mathsf{Q2}$, si ottiene che:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall z \forall Z(\mathcal{P}(Z) \to (G(z) \to Z(z))).$$

In particolare:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(Y) \to (G(z) \to Y(z))$$

e per mp, da (*):

$$\mathbf{OA} \vdash G(z) \to Y(z).$$

Per TAUT e nec:

$$\mathbf{OA} \vdash \Box \forall z(G(z) \to Y(z)).$$

Per l'assunzione $Y(x)$ e TAUT otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash Y(x) \wedge \Box \forall z(G(z) \to Y(z)).$$

Per gp e mp:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall Y(Y(x) \wedge \Box \forall z(G(z) \to Y(z)))$$

e quindi per $\mathsf{D3}$ e l'assunzione $G(x)$:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{E}(G, x). \quad \blacksquare$$

Lemma 4. Se Dio esiste attualmente, allora Dio esiste necessariamente, ossia:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists x G(x) \to \Box \exists z G(z).$$

Dimostrazione. Assumiamo che $\mathbf{OA} \vdash G(x)$ cioè che:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall X(\mathcal{P}(X) \to X(x))$$

e quindi in particolare:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(N) \to N(x).$$

Per $\mathsf{G5}$ e mp otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash N(x)$$

cioè per $\mathsf{D4}$ (la definizione di N):

$$\mathbf{OA} \vdash \forall Y(\mathcal{E}(Y, x) \to \Box \exists z Y(z))$$

e in particolare, sostituendo G a Y, abbiamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{E}(G, x) \to \Box \exists z G(z).$$

Ma, per il lemma 3, in particolare:

$$\mathbf{OA} \vdash G(x) \to \mathcal{E}(G, x)$$

quindi, per TAUT (transitività dell'implicazione):

$$\mathbf{OA} \vdash G(x) \to \Box\exists z G(z).$$

Per generalizzazione e logica dei quantificatori abbiamo quindi:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists x G(x) \to \Box\exists z G(z). \quad \blacksquare$$

Lemma 5. Nel sistema **OA** si dimostra il *principio di Anselmo*, ossia:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists x G(x) \to \Box\exists x G(x).$$

Dimostrazione. Per un cambio alfabetico dal lemma 4 sappiamo che

$$\mathbf{OA} \vdash \exists x G(x) \to \Box\exists x G(x).$$

Per nec abbiamo che:

$$\mathbf{OA} \vdash \Box(\exists x G(x) \to \Box\exists x G(x)). \tag{1}$$

La formula:

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi) \tag{2}$$

è un teorema del sistema modale **K** e, *a fortiori*, di **S5** e quindi di **OA**. Dunque per (1), (2) e mp si ha:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists x G(x) \to \Diamond\Box\exists x G(x). \tag{3}$$

La formula:

$$\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi \tag{4}$$

è un teorema del sistema **S5** e quindi anche di **OA**. Dunque, in particolare:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\Box\exists x G(x) \to \Box\exists x G(x). \tag{5}$$

Allora per TAUT (transitività) da (3) e (5) otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \Diamond\exists x G(x) \to \Box\exists x G(x). \quad \blacksquare$$

Teorema 1. Esiste necessariamente un oggetto divino:

$$\mathbf{OA} \vdash \Box\exists x G(x).$$

Dimostrazione. Per il lemma 2 sappiamo che $\Diamond\exists x G(x)$ e da ciò per il lemma 5 e mp si ha $\Box\exists x G(x)$. ■

Teorema 2. Esiste uno e un solo oggetto divino:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists x \forall y (G(y) \leftrightarrow (y = x)).$$

Dimostrazione. Sia x tale che si abbia $\mathbf{OA} \vdash G(x)$. Supponiamo che si abbia $G(y)$ e, per assurdo $y \neq x$. Per la proposizione 4 avremo che:

$$\forall X(\mathcal{P}(X) \leftrightarrow X(y)).$$

Ma se $y \neq x$ allora ci dev'essere una proprietà Z tale che:

$$Z(y) \wedge \neg Z(x) \tag{1}$$

oppure

$$Z(x) \wedge \neg Z(y). \tag{2}$$

Nel caso (1), poiché y gode di tutte (e sole) le proprietà positive, avremo che $\neg\mathcal{P}(\neg Z)$ e $\neg Z(x)$ e quindi anche che $\neg G(x)$. Assurdo.

Nel caso (2) avremo $\neg\mathcal{P}(Z)$ e $Z(x)$ e dunque $\neg G(x)$. Assurdo.

Quindi otteniamo:

$$\forall y(G(y) \leftrightarrow y = x)$$

e quindi:

$$\exists x \forall y (G(y) \leftrightarrow y = x). \quad ■$$

Abbiamo così concluso la dimostrazione del fatto che "esiste necessariamente uno ed un solo Dio" . Muovendoci nell'ambito di una logica modale che contiene $\Box\varphi \to \varphi$ come assioma avremo in particolare che nel sistema **OA** si può dimostrare che "esiste attualmente uno e un solo Dio". Se, anziché **S5** avessimo usato come logica modale di base il sistema **KD45** noto come "logica della credenza" avremmo ancora potuto dimostrare:

$$\Box\exists x G(x)$$

ma non:

$$\exists x G(x).$$

In tal senso, possiamo concludere che l'utilizzo di **S5** è davvero essenziale per svolgere l'argomento ontologico di Gödel.

4.6. Obiezioni

Come già accennato, l'argomento ontologico di Gödel rimase inedito fino al 1987. Da allora s'è formata una piccola ma continuamente crescente letteratura sul tema. Alcuni autori, come Jordan H. Sobel, hanno sollevato principalmente critiche filosofiche nei confronti del tentativo gödeliano. Altri hanno invece studiato gli assiomi e le definizioni dell'argomento da un punto di vista matematico, riuscendo a metterne in evidenza alcuni punti deboli fra cui uno davvero essenziale. Si può infatti dimostrare che le assunzioni fatte da Gödel sono "troppo forti" in un senso matematicamente preciso.

4.6.1. Determinismo

Nel suo articolo "Gödel's ontological argument" Sobel[139] avanza la critica secondo cui nel sistema gödeliano ogni verità attuale risulta essere necessaria. L'argomento di Sobel è piuttosto congetturale e sotto certi aspetti davvero debole, tuttavia, almeno sotto due prospettive esso coglie nel segno.

In primo luogo, come già osservato, l'assioma $\mathsf{G1}$ impone che ogni possibile proprietà possa essere valutata in termini di positività o negatività. Questo tipo di assunzione non lascia alcun margine di spazio a proprietà *contingenti*. Dunque Gödel descrive effettivamente un mondo che potremmo definire "deterministico".

In secondo luogo, nel sistema **OA** si può dimostrare che ogni proprietà positiva è istanziata in ogni mondo possibile, cioè si dimostra il seguente:

Teorema 3. Nel sistema **OA** si dimostra che ogni proprietà positiva è esemplificata in ogni mondo possibile. In simboli:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall X(\mathcal{P}(X) \rightarrow \Box\exists z X(z)).$$

Dimostrazione. Assumiamo che $\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(X)$. Per il teorema 1 e la $\mathsf{D2}$ otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \Box\exists z\forall Y(\mathcal{P}(Y) \rightarrow Y(z)).$$

Per T ed mp abbiamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists z\forall Y(\mathcal{P}(Y) \rightarrow Y(z))$$

e per logica dei quantificatori:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall Y\exists z(\mathcal{P}(Y) \rightarrow Y(z)).$$

[139] Cf. *Sobel 1987*.

Dunque in particolare:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists z(\mathcal{P}(X) \to X(z))$$

e per nec, l'assioma K e mp si ottiene:

$$\mathbf{OA} \vdash \Box\mathcal{P}(X) \to \Box\exists z X(z).$$

Per l'assioma G4 e TAUT (transitività) abbiamo quindi:

$$\mathbf{OA} \vdash \mathcal{P}(X) \to \Box\exists z X(z)$$

e dunque, per generalizzazione:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall X(\mathcal{P}(X) \to \Box\exists z X(z)). \quad \blacksquare$$

L'unica possibile risposta ad un'obiezione di questo genere sembrerebbe consistere nell'indebolimento dell'assioma G1. Così è stato fatto in *Anderson 1990* e in *Forti et Honsell 2000*, mantenendo comunque la dimostrabilità del teorema 1.

4.6.2. Una "petitio principii"

Vari autori fra cui Sobel,[140] Magari[141] e Fitting,[142] hanno criticato l'argomento gödeliano in quanto farebbe assunzioni così forti da sembrare equivalenti alla conclusione.

In realtà le assunzioni fatte da Gödel nella versione del 1970 del suo argomento non hanno questo difetto e tuttavia hanno lo svantaggio (forse anche maggiore) di non essere sufficienti ad ottenere la conclusione voluta. Infatti l'assioma $\mathcal{P}(X) \wedge \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X \wedge Y)$ di Gödel, all'interno di un sistema formale che non ammetta congiunzioni infinite di formule, non basta a dimostrare $\mathcal{P}(G)$ e quindi nemmeno ad ottenere la dimostrazione del teorema 1. Occorre dunque rimpiazzare quell'assunzione con $\mathcal{P}(G)$ stessa oppure con G3 come fatto da Anderson,[143] Hájek[144] e Fitting.[145]

Dal momento che, assumere $\mathcal{P}(G)$ sembra davvero un modo per banalizzare tutto l'argomento, apparentemente la soluzione di assumere G3 sembra la migliore. Tuttavia non è così, infatti si può dimostrare il seguente:

---

[140] Cf. *Sobel 1987.*

[141] Cf. *Magari 1988.*

[142] Cf. *Fitting 2002.*

[143] Cf. *Anderson 1990.*

[144] Cf. *Hájek 1996.*

[145] Cf. *Fitting 2002.*

Teorema 4. Le proposizioni:

(1) $\forall \mathcal{Z}(pos(\mathcal{Z}) \rightarrow \forall X(int(X, \mathcal{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(X)))$

(2) $\mathcal{P}(G)$

(3) $\Diamond \exists x G(x)$

sono a due a due fra loro equivalenti.

Dimostrazione. (Schizzo)
(1) → (2). E' una conseguenza quasi immediata del lemma 2.
(2) → (3). Segue banalmente dal lemma 1.
(3) → (1). Si supponga che esista un modello generale di Henkin $\mathcal{M}$ che soddisfi gli assiomi G1, G2, G4, G5 ma non (3) → (1). Avremo cioè che:

$$\mathcal{M} \Vdash \Diamond \exists x G(x)$$

e

$$\mathcal{M} \nVdash \forall \mathcal{Z}(pos(\mathcal{Z}) \rightarrow \forall X(int(X, \mathcal{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(X))).$$

Svolgendo le definizioni si arriva a una contraddizione. Dunque ogni modello generale di Henkin che soddisfi gli assiomi G1, G2, G4 e G5 soddisfa anche l'implicazione (3) → (1). ■

Forse la migliore risposta a questa obiezione consiste nell'assumere l'assioma di Gödel $\mathcal{P}(X) \wedge \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X \wedge Y)$ e una logica di base infinitaria. In questo modo si ottiene il risultato voluto senza cadere in alcuna "petitio principi" e facendo un'assunzione che non è molto più forte di quella di assumere un sistema formale basato su una logica intensionale modale di ordine superiore. Di fatto un'obiezione incontestabile, ma non decisiva, a questo tipo di formalizzazione dell'argomento ontologico, è proprio quella di dover necessariamente fare ricorso a strumenti logici molto forti.[146]

4.6.3. Eliminazione delle modalità

La terza e più importante obiezione che è stata formulata rispetto all'argomento di Gödel consiste nella dimostrazione del fatto che gli assiomi del sistema **OA** e persino quelli del sistema originale del '70 portano al cosiddetto "collasso delle modalità" cioè al fatto che possibilità, necessità e verità attuale diventano fra loro equivalenti e che quindi, a rigor di termini,

[146]Cf. al riguardo *Magari 1988.*

non è neppure più possibile parlare di un sistema modale. Il primo ad aver scoperto questo difetto del sistema di Gödel fu Sobel.[147] Noi ne diamo una dimostrazione le cui idee di fondo sono dovute a Fitting.[148]

Teorema 5. Data una formula chiusa φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **OA**:

$$\mathbf{OA} \vdash \varphi \to \Box\varphi.$$

Dimostrazione. Sia φ una formula chiusa di $\mathcal{L}$. Per il Lemma 3:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall x(G(x) \to \mathcal{E}(G, x))$$

cioè, per $\mathsf{D3}$:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall x(G(x) \to \forall Y(Y(x) \to \Box\forall z(G(z) \to Y(z))))$$

e per logica dei quantificatori:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall Y \forall x(G(x) \to (Y(x) \to \Box\forall z(G(z) \to Y(z)))).$$

Consideriamo il termine $\lambda y.\varphi$. In particolare avremo:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall x(G(x) \to (\lambda y.\varphi(x) \to \Box\forall z(G(z) \to \lambda y.\varphi(z))))$$

Ma chiaramente $\lambda y.\varphi(x) \leftrightarrow \varphi \leftrightarrow \lambda y.\varphi(z)$ e quindi:

$$\mathbf{OA} \vdash \forall x(G(x) \to (\varphi \to \Box\forall z(G(z) \to \varphi))).$$

Dunque, per logica dei quantificatori otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \exists x G(x) \to (\varphi \to \Box(\exists z G(z) \to \varphi)).$$

Dal teorema 1 segue $\exists x G(x)$ dunque per mp si ha:

$$\mathbf{OA} \vdash \varphi \to \Box(\exists z G(z) \to \varphi)$$

per l'assioma modale K e TAUT (transitività di $\to$) si ottiene:

$$\mathbf{OA} \vdash \varphi \to (\Box\exists z G(z) \to \Box\varphi)$$

e quindi ancora per TAUT (scambio di premesse):

$$\mathbf{OA} \vdash \Box\exists z G(z) \to (\varphi \to \Box\varphi).$$

Dunque, per il teorema 1 e mp otteniamo:

$$\mathbf{OA} \vdash \varphi \to \Box\varphi. \quad \blacksquare$$

[147] Cf. *Sobel 1987*.
[148] Cf. *Fitting 2002*.

Vari autori, vista la gravità di questa obiezione, hanno studiato possibili modifiche del sistema **OA** che evitassero il collasso delle modalità.

La prima soluzione, e forse la più interessante dal punto di vista concettuale, è dovuta ad Anderson il quale, nel suo articolo "Some emendations to Gödel's ontological proof" (1990), propone un sistema alternativo a quello di Gödel ottenuto sopprimendo l'assioma G1.2 cioè l'assunzione problematica secondo cui di una proprietà e del suo complemento almeno una è positiva, ed inoltre modificando le definizioni delle nozioni di "oggetto divino", "essenza" ed "esistenza necessaria" come segue:

$\mathsf{D2}_A$ $\quad G_A(x) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{P}(Y) \leftrightarrow \Box Y(x))$,

$\mathsf{D3}_A$ $\quad \mathcal{E}_A(Y, x) \leftrightarrow \forall Z(\Box Z(x) \leftrightarrow \Box\forall z(Y(z) \rightarrow Z(z)))$,

$\mathsf{D4}_A$ $\quad N_A(x) \leftrightarrow \forall Y(\mathcal{E}_A(Y, x) \rightarrow \Box\exists z Y(z))$.

Il sistema $\mathbf{OA}_A$ così ottenuto non solo evita il collasso delle modalità, ma ha anche il gran pregio di sottrarsi alla critica relativa al determinismo di **OA** vista sopra.

Una seconda risposta all'ultima obiezione è stata fornita da Petr Hájek nel suo articolo intitolato "Magari and others on Gödel's ontological proof" (1996). La proposta di Hájek parte dalla considerazione del fatto che nell'argomento ontologico di Gödel si fa uso implicito di uno schema di comprensione piena, CA, sulla base del quale per ogni formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$ di **OA** esiste la proprietà Y goduta da tutti e soli gli oggetti x tali che $\varphi(x)$. Secondo Hájek questo principio è troppo forte e nella fattispecie è responsabile del collasso delle modalità. Sarebbe quindi opportuno indebolire il sistema di Gödel sostituendo a CA il seguente schema di "comprensione cauta":

CC $\quad$ Per ogni formula φ di $\mathcal{L}$:

$$\forall x(G(x) \rightarrow (\Box\varphi(x) \vee \Box\neg\varphi(x))) \rightarrow \exists Y\Box\forall z(Y(z) \leftrightarrow \varphi(z)).$$

Anche il sistema $\mathbf{OA}_H$ così ottenuto evita il collasso delle modalità mantenendo gli stessi risultati di quello di Gödel, tuttavia non sembrerebbe avere il grado di intuitività di quello di Anderson. Di fatto, lo stesso Hájek sempre in *1996* ha dimostrato che "in un certo senso" i due sistemi $\mathbf{OA}_A$ e $\mathbf{OA}_H$ sono fra loro equivalenti. Si può infatti definire un'interpretazione * delle formule del linguaggio di $\mathbf{OA}_H$ nelle formule del linguaggio di $\mathbf{OA}_A$ tale che, per ogni formula φ di $\mathbf{OA}_H$, se $\mathbf{OA}_H \vdash \varphi$, allora $\mathbf{OA}_A \vdash \varphi^*$. Questa interpretazione è fedele e quindi si ha anche la direzione opposta, cioè, per ogni formula φ di $\mathbf{OA}_H$:

$$\mathbf{OA}_H \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{OA}_A \vdash \varphi^*.$$

4.7. Considerazioni conclusive.

Con questo capitolo dedicato all'argomento ontologico abbiamo potuto apprezzare come Gödel sia riuscito a utilizzare degli strumenti propri della moderna logica matematica per tentare di affrontare un problema appartenente alla tradizione filosofica.

Come abbiamo visto, si possono muovere numerose critiche all'argomento gödeliano e, tuttavia, è anche possibile trovare risposte, più o meno decisive, a tali obiezioni.

La cosa davvero importante, a nostro parere, resta comunque il tentativo dell'autore di affrontare con strumenti matematici o per lo meno formali, una questione ontologica e metafisica. Come vedremo, l'idea di cercare di dare un fondamento rigoroso ad una tesi filosofica forte dal punto di vista ontologico sarà uno degli elementi caratterizzanti le riflessioni gödeliane in particolare negli anni Cinquanta e Sessanta.

Seconda Parte
Teoria degli insiemi

Introduzione

Il luogo in cui meglio si può apprezzare il punto di vista gödeliano sull'ontologia della matematica sembra essere la teoria degli insiemi, dove la nozione di numero ordinale, una nozione in qualche modo "costitutiva" di tutta quanta la disciplina, sembra inevitabilmente legata a qualche procedura definitoria impredicativa.[149]

Un altro elemento di forte impredicatività della teoria degli insiemi consiste nella presenza (in tutte le più importanti assiomatizzazioni) di un'operazione, quella di "insieme potenza" o "insieme delle parti", che consente di passare in modo del tutto non-costruttivo, da un insieme dato all'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi.

Il modello degli insiemi costruibili, proposto e usato da Gödel alla fine degli anni Trenta per dimostrare la noncontraddittorietà dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di scelta, servirà proprio a limitare al massimo l'impredicatività presente nella nozione di insieme potenza, introducendo una condizione sul tipo di sottoinsiemi che si ammettono quando si passa da un insieme al suo insieme delle parti.

Gödel stesso non considerò il suo tentativo come un'eliminazione dell'impredicatività, bensì come un'applicazione di una strategia costruttiva ad una teoria essenzialmente non-costruttiva. Proprio per questa ragione ci è sembrato opportuno dedicare a questo tema la parte centrale del nostro lavoro.

Nel capitolo 5 presenteremo una breve cronologia del percorso intellettuale gödeliano nell'ambito della teoria degli insiemi ed in particolare daremo una panoramica di tutti i suoi scritti sul tema.

Nel capitolo 6 esporremo i due principi di riferimento per comprendere i risultati e le riflessioni gödeliane nell'ambito della teoria degli insiemi: l'assioma di scelta (AC) e l'ipotesi del continuo (CH). Ci soffermeremo anche su alcune interessanti affermazioni di Gödel sull'assioma di scelta, rinviando invece l'ampia discussione gödeliana del problema del continuo di Cantor al capitolo 11.

Nel capitolo 7 vedremo il sistema assiomatico per la teoria degli insiemi formulato da Gödel nel 1940 e lo confronteremo con altri sistemi formali come ad esempio **ZFC**, il sistema di von Neumann e quello di Bernays.

[149] Si pensi alla definizione neumanniana di "numero ordinale", ed in particolare quella di "ordinale limite".

Nei capitoli 8, 9 e 10 parleremo dei modelli per la teoria degli insiemi proposti da Gödel nel 1938 e nel 1946: il modello degli insiemi *costruibili* e quello degli insiemi *definibili in termini di ordinali*. In particolare vedremo le linee essenziali della dimostrazione gödeliana di noncontraddittorietà dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo.

Infine nell'undicesimo capitolo presenteremo il cosiddetto "programma di Gödel" per nuovi assiomi della teoria degli insiemi ed in particolare la proposta gödeliana del 1970 dei cosiddetti "assiomi quadrati" per una soluzione definitiva del problema del continuo.

5. Gödel e la teoria degli insiemi

5.1. Una breve cronologia

Secondo una serie di testimonianze raccolte da Dawson[150] sembrerebbe che Gödel abbia iniziato a studiare teoria degli insiemi già all'università di Vienna (probabilmente sotto la guida di Hahn) e che abbia cominciato a riflettere e a lavorare sul primo problema di Hilbert (per l'appunto l'ipotesi del continuo) più o meno nello stesso periodo in cui affrontò il secondo[151] (plausibilmente fra il 1928 e il 1929).

Nel 1928 (e poi di nuovo nel 1930) egli richiese alla biblioteca dell'università di Vienna l'articolo di Skolem intitolato "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" (1923). L'importanza di questa lettura per i successivi lavori insiemistici di Gödel sembra essere stata davvero notevole. In quest'articolo il logico norvegese affrontava varie questioni relative all'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, alcune delle quali sembrano aver pesato molto sui lavori gödeliani sulla costruibilità.

Nel 1930 Gödel richiese inoltre la *Einleitung in die Mengenlehre*[152] di Abraham A. Fraenkel, e i volumi dei *Mathematische Annalen* e della *Mathematische Zeitschrift* in cui erano contenuti i due articoli di John von Neumann intitolati rispettivamente "Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre" (1928) e "Die Axiomatisierung der Mengenlehre" (1925) ed infine il volume delle *Göttingen Nachrichten* in cui era stato pubblicato "Mathematische Probleme". Sempre nel corso di quest'anno, secondo una testimonianza diretta raccolta da Hao Wang,[153] Gödel sentì parlare per la prima volta della dimostrazione del "teorema del continuo" delineata in *Hilbert 1926*.

Nel 1931 il nostro autore richiese un prolungato prestito dell'articolo di Fraenkel (pubblicato nel 1922) intitolato "Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms". Probabilmente in questo stesso anno[154] Gödel partecipò ad un seminario di Hahn dedicato alla teoria degli insiemi.

Nel 1932 egli visitò Göttingen dove conobbe Gentzen e probabilmente anche Zermelo. Sembra plausibile che in quest'occasione (se non prima)

[150] Cf. *Dawson 1997*, cap. 6.
[151] Dimostrare la noncontraddittorietà dell'analisi.
[152] Plausibilmente si trattava della terza edizione pubblicata nel 1929.
[153] Cf. *Wang 1981*.
[154] Cf. *Wang 1981*.

Gödel abbia avuto l'opportunità di leggere l'articolo "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche"[155] di Zermelo e di conseguenza di approfondire lo studio della gerarchia cumulativa (per altro già presente, almeno embrionalmente negli articoli del '28 di von Neumann) che avrebbe poi rappresentato la pietra di paragone da cui partire nel definire la gerarchia degli insiemi costruibili.

Nel 1933 Gödel fece un breve viaggio negli Stati Uniti per visitare lo IAS di Princeton. Nel corso di questo suo primo periodo di permanenza negli Stati Uniti tenne la lezione intitolata "The present situation in the foundations of mathematics" a Cambridge.

Secondo Dawson fu proprio nel periodo che intercorse fra il primo ed il secondo viaggio a Princeton (1935) che Gödel concepì l'idea della gerarchia L degli insiemi costruibili e comprese il fatto che questa classe possiede un buonordinamento definibile. In tal modo è assai probabile che già nel 1935 egli avesse ottenuto la dimostrazione di noncontraddittorietà dell'assioma di scelta e sembra verosimile che non abbia pubblicato subito questo risultato in quanto il suo reale obiettivo era una dimostrazione di noncontraddittorietà per CH e per $\neg\mathsf{CH}$.

Soltanto nel 1937 Gödel presentò in pubblico il suo risultato sull'assioma di scelta. In quello stesso anno tenne anche un corso intitolato *Axiomatik der Mengenlehre* testimoniato dalle note manoscritte di Gödel e da Andrzej Mostowski che fu uno degli studenti. Sulla base delle note e della testimonianza diretta di Mostowski risulterebbe che in quella sede Gödel non fece menzione dell'assioma di costruibilità.[156] In realtà fu proprio in questo periodo che l'autore fece il progresso decisivo nella dimostrazione di noncontraddittorietà dell'ipotesi del continuo tanto è vero che nel luglio di quell'anno comunicò il suo successo prima a von Neumann[157] ed in seguito a Karl Menger. Fu probabilmente questo l'anno in cui Gödel lavorò più intensamente al problema del continuo tanto è vero che il *Nachlass* contiene tre quaderni di appunti risalenti alla seconda metà del '37 in cui sorprendentemente non si trovano i dettagli della dimostrazione di noncontraddittorietà di CH, bensì vari tentativi di estendere ulteriormente questo risultato.[158] In una lettera a Menger

[155] Cf. *Zermelo 1930*.

[156] Secondo il quale: tutti gli insiemi sono costruibili (cioè sono definibili "predicativamente" in un senso opportunamente ampliato della parola).

[157] Che immediatamente propose la pubblicazione almeno del risultato sull'assioma di scelta negli *Annals of Mathematics*.

[158] Plausibilmente nel senso di ottenere una dimostrazione di noncontraddittorietà anche della negazione di CH e cioè una dimostrazione dell'*indipendenza* di CH.

del 15 dicembre 1937 leggiamo infatti:[159]

> L'estate scorsa ho continuato il mio lavoro sul problema del continuo e alla fine sono riuscito a dimostrarne la noncontraddittorietà (persino dell'ipotesi generalizzata del continuo $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$) con la teoria degli insiemi ... *Al momento sto tentando di dimostrare anche l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, ma non so ancora se ci riuscirò.*[160]

Nel 1938 Gödel lavorò ancora al problema del continuo tanto che, sulla base di una lettera a von Neumann,[161] è possibile stabilire come entro l'autunno di quell'anno egli avesse terminato la stesura di un articolo dettagliato sulla sua dimostrazione di noncontraddittorietà. In autunno egli intraprese un terzo viaggio a Princeton.[162] Poco dopo il suo arrivo negli Stati Uniti spedì un annuncio dei suoi risultati di noncontraddittorietà ai *Proceedings of the National Academy of Science* che fu poi pubblicato col titolo "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis".[163] In quello stesso anno egli tenne un corso di teoria degli insiemi presso l'I.A.S. per il quale redasse dettagliate note manoscritte che più tardi furono rielaborate e pubblicate nella celebre monografia del 1940.

Del 1939 sono un ulteriore annuncio dei suoi risultati spedito al *Bulletin of the American Mathematical Society*, pubblicato col titolo "The consistency of the generalized continuum hypothesis"[164] e l'articolo "Consistency for the generalized continuum hypothesis"[165] che rappresenta il punto di riferimento per la cosiddetta "dimostrazione semantica" della noncontraddittorietà di CH. Sempre di quest'anno è una lezione inedita sulla dimostrazione di noncontraddittorietà tenuta a Göttingen.[166]

Del 1940, oltre alla già menzionata monografia,[167] è un'altra lezione inedita[168] (sempre sulla dimostrazione di noncontraddittorietà) tenuta alla Brown

[159]Cf. *Gödel 2003a*, pag. 114.

[160]Il corsivo è mio.

[161]Cf. *Gödel 2003a*, pag. 361.

[162]Sempre su invito di von Neumann.

[163]Cf. *Gödel 1938*.

[164]Cf. *Gödel 1939*.

[165]Cf. *Gödel 1939a*.

[166]Pubblicata postuma solo nel terzo volume dei *Collected works* nel 1995 col titolo di "Vortrag Göttingen". D'ora in poi ci riferiremo ad essa come a *Gödel *1939b*.

[167]Cf. *Gödel 1940*.

[168]Anch'essa pubblicata postuma in *Gödel 1995* col titolo di "Brown University lecture". Nel seguito ci riferiremo ad essa come a *Gödel *1940a*.

University. L'interesse di questa fonte sta nel fatto di richiamarsi esplicitamente al tentativo di dimostrazione delineato in *Hilbert 1926*.

Anche se dopo il 1940 manca una documentazione scritta di ulteriori sviluppi delle ricerche gödeliane sulla teoria degli insiemi, secondo Dawson e Wang, egli continuò a lavorare (anche se sempre meno intensamente) al problema del continuo nel tentativo di dimostrare l'indipendenza di CH. Pur non avendo avuto successo in questo suo obiettivo egli riuscì a dimostrare l'indipendenza dell'assioma di scelta. A riprova del fatto che Gödel continuò a lavorare sul tema è l'articolo del 1946 intitolato "Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics" in cui viene introdotta la nozione di "ordinal-definability".

E' comunque cosa certa[169] che a partire dalla metà circa degli anni Quaranta Gödel cominciò a nutrire una certa insofferenza per una questione (l'indipendenza di CH) che restava ancora irrisolta nonostante un lavoro di ricerca di quasi un decennio. Questo fatto, unito ad un progressivo spostamento dei suoi interessi verso la filosofia, fecero sì che, a partire dal 1946[170] Gödel abbia almeno temporaneamente abbandonato il suo impegno attivo come insiemista.[171]

Negli anni Cinquanta egli tornò, in vari scritti rimasti inediti fino al 1995, su questioni insiemistiche discusse da un punto di vista prettamente filosofico.

E' invece molto probabile che, nel corso degli anni Sessanta, l'interesse di Gödel sia tornato con un certo vigore su questioni insiemistiche, anche da un punto di vista tecnico, da un lato, perchè ebbe un ruolo decisivo nel far accettare i lavori di Paul Cohen alla comunità dei logici[172] e, dall'altro, perché proprio alla fine degli anni Sessanta fece una proposta per la soluzione del problema del continuo che denotava fino a che punto il suo interesse fosse rimasto alto su questo tema.

[169] Si vedano al riguardo *Wang 1981* e *1996*.

[170] Con la stesura del suo articolo filosofico sul problema del continuo.

[171] Sebbene non il suo interesse per la teoria degli insiemi e per una sua caratterizzazione assiomatica più precisa.

[172] Cf. al riguardo *Moore 1988*.

5.2. Una panoramica delle fonti

5.2.1. I testi pubblicati

Fra i lavori pubblicati da Gödel sul problema del continuo di Cantor ve ne sono quattro di natura tecnica e due[173] di carattere prettamente espositivo e critico.

Riferimenti tecnici

Gödel 1938 costituisce la prima comunicazione ufficiale dei risultati di noncontraddittorietà. Qui viene formulato il teorema secondo cui l'ipotesi generalizzata del continuo (GCH), l'assioma di scelta (AC), e due proposizioni di teoria descrittiva degli insiemi sono noncontraddittorie[174] rispetto alla teoria assiomatica degli insiemi di von Neumann[175] oppure rispetto al sistema di teoria dei tipi dei *Principia Mathematica*[176] oppure ancora rispetto al sistema di Zermelo-Fraenkel.[177] Gödel afferma che la dimostrazione da lui proposta è costruttiva in quanto se si ottenesse una contraddizione dal sistema assiomatico esteso con le quattro proposizioni in questione, allora tale contraddizione sarebbe ottenibile di già nel sistema non esteso. Al tempo stesso la dimostrazione non può esser considerata tanto costruttiva da essere finitaria. Essa consta infatti della costruzione di un modello che verifica tutti gli assiomi del sistema assiomatico di base ed inoltre le quattro proposizioni di cui sopra. Dal momento che il modello viene costruito sulla base delle stesse nozioni e quindi degli stessi assiomi del sistema assiomatico di base, la sua definizione presuppone un'assunzione transfinita[178] e cioè la postulazione della noncontraddittorietà del sistema non esteso.

Già in questa prima comunicazione Gödel si richiama a Bertrand Russell dicendo che gli insiemi costruibili si ottengono estendendo la gerarchia ramificata dei tipi di Russell in modo da includere anche gli ordini transfiniti.

[173] Di fatto due versioni differenti di uno stesso articolo.

[174] Si tratta delle due seguenti proposizioni: a) esistono insiemi lineari non misurabili tali che sia essi che i loro complementi sono proiezioni biettive di complementi bidimensionali di insiemi analitici; b) esistono complementi lineari di insiemi analitici della potenza del continuo i quali non contengono alcun sottoinsieme perfetto.

[175] Esposta in *von Neumann 1929.*

[176] Vedi *Whitehead et Russell 1910.*

[177] Vedi *Fraenkel 1925.*

[178] Cioè non finitariamente verificabile.

Nel suo *1938* Gödel introduce l'assioma di costruibilità (denotato col simbolo A) "ogni insieme è costruibile" e fa un interessante commento che testimonia una posizione filosofica molto diversa di quella degli anni seguenti. L'autore osserva infatti che l'assioma di costruibilità costituisce un "completamento naturale" della teoria degli insiemi nel senso che esso fornisce una convincente precisazione del concetto di insieme infinito.

Gödel 1939, come detto sopra, costituisce un'altra brevissima comunicazione in questo caso però riguardante più che altro la noncontraddittorietà (relativa) di GCH (e solo in seconda battuta dell'assioma di scelta). Qui troviamo la prima definizione del modello degli insiemi costruibili formulata in termini di una recursione transfinita[179] sull'esempio della "gerarchia cumulativa". In questo breve articolo si sottolinea il fatto che sebbene il modello in questione sia un modello interno (ossia definito dentro il sistema assiomatico non esteso), l'approccio utilizzato per la dimostrazione è fortemente "semantico";[180] infatti vi si afferma che opportuni livelli transfiniti della gerarchia costruibile costituiscono due modelli per uno dei sistemi assiomatici per la teoria degli insiemi e soddisfano anche GCH.

In *Gödel 1939a* troviamo la prima dimostrazione dettagliata (anche se ancora a livello non formalizzato) della noncontraddittorietà relativa di GCH e di AC. In esso viene specificato il sistema assiomatico di riferimento, e cioè il sistema di Zermelo del 1908 in cui venga opportunamente precisata la nozione di "definite Eigenschaft" in termini di "funzione proposizionale sul sistema di tutti gli insiemi".

In *Gödel 1940* troviamo l'unica dimostrazione del risultato di noncontraddittorietà che l'autore abbia svolto in tutti i dettagli. La monografia è suddivisa in otto capitoli. Nel primo vengono dati gli assiomi del sistema formale di riferimento.[181] Nel quinto capitolo viene data una nuova caratterizzazione che potremmo definire "sintattica" o "finitaria" della classe degli insiemi costruibili. Nei capitoli sesto e settimo si dimostra, rispettivamente, che il modello degli insiemi e delle classi costruibili costituisce un modello degli assiomi gödeliani per la teoria degli insiemi e dell'assioma di costruibilità. L'ultimo capitolo, in linea con *Gödel 1939a* anche se in modo molto

[179]In cui si specifica qual è il livello 0 della gerarchia costruibile, qual è il livello $\alpha + 1$ se è dato il livello α della gerarchia, ed infine qual è il livello ξ della gerarchia se ξ è un ordinale limite.

[180]Cioè implica un notevole impegno ontologico.

[181]Quattro gruppi più l'assioma di scelta.

più dettagliato e formale, presenta la dimostrazione del fatto che l'assioma di costruibilità implica AC e GCH.

Riferimenti filosofici

Gödel pubblicò un solo articolo filosofico ed espositivo interamente dedicato alla teoria degli insiemi. Si tratta del celebre "What is Cantor's Continuum Problem?" pubblicato per la prima volta nel 1947 e poi nuovamente in una versione rivista ed ampliata nel 1964. Nel 1945 l'allora editore dell'*American Mathematical Monthly* chiese a Gödel di scrivere un articolo introduttivo ed espositivo sul problema del continuo. Egli, seppur con qualche esitazione, accettò l'incarico e verso la metà del 1946 comunicò all'editore che, pur avendo terminato la stesura del lavoro, desiderava ancora un po' di tempo per qualche modifica. Soltanto nel maggio dell'anno successivo Gödel spedì l'articolo all'editore che lo fece pubblicare immediatamente.

Questo saggio consta di quattro sezioni dedicate rispettivamente al concetto di numero cardinale, ad una panoramica dei risultati più rilevanti ottenuti fino a quel momento circa la cardinalità del continuo, ad una possibile riformulazione del problema del continuo ed infine ad una proposta per una soluzione del problema.

Nel 1963 Paul Benacerraf e Hilary Putnam chiesero a Gödel di poter ristampare questo suo saggio nella loro antologia di scritti di filosofia della matematica. In quella circostanza il nostro autore esitò molto prima di concedere questo permesso temendo possibili strumentalizzazioni antipositivistiche del suo articolo. Benacerraf gli assicurò che gli avrebbe sottoposto l'introduzione dell'antologia e che gli editori intendevano dare una panoramica di contributi, senza fare particolari assunzioni filosofiche. A questo punto il nostro concesse il permesso di ristampa purché si trattasse di una versione opportunamente rivista ed ampliata. La revisione fu fatta in parte in collaborazione con lo stesso Benacerraf ed alla fine furono apportate un centinaio di modifiche[182] e vennero aggiunti un ampio supplemento in cui si discutevano alcuni nuovi risultati ritenuti di grande importanza ed un breve poscritto relativo alla dimostrazione di indipendenza di Cohen.[183]

L'importanza di questo articolo sembra difficilmente sovrastimabile. Innanzitutto esso presenta l'esposizione più chiara e accessibile data da Gödel del problema del continuo di Cantor e dell'ipotesi del continuo. In secondo

[182] Moltissime stilistiche.

[183] Si veda al riguardo *Moore 1990*.

luogo l'analisi dello "status quaestionis" del problema del continuo ne mette in evidenza in maniera estremamente efficace la portata matematica (insiemistica) ed epistemologica. Infine il fatto di poter disporre di due versioni così distanti nel tempo e così profondamente diverse fra loro ci permette di valutare il mutato punto di vista filosofico del nostro autore negli anni Sessanta rispetto agli anni Quaranta.

5.2.2. Gli inediti

Il terzo volume dei *Collected works* ci ha messo a disposizione cinque contributi inediti sul problema del continuo: due lezioni illustrative di due differenti strategie per dimostrare la noncontraddittorietà relativa di GCH e tre brevi annotazioni in cui si discute una possibile estensione assiomatica della teoria degli insiemi che permetta di risolvere il problema del continuo.

Due strategie dimostrative

*Gödel *1939b* costituisce probabilmente la più chiara esposizione della dimostrazione di noncontraddittorietà dell'ipotesi del continuo nella forma semantica. Si tratta di una lezione accessibile ad un pubblico di non addetti ai lavori che al tempo stesso chiarisce alcuni particolari della dimostrazione esposta in *Gödel 1939a*. Noi ci serviremo proprio di questa fonte inedita quando, nel capitolo 8, daremo le linee essenziali della dimostrazione semantica di noncontraddittorietà. In questa lezione Gödel si richiama a *Hilbert 1926* ricordando che il programma hilbertiano per la dimostrazione del teorema del continuo consisteva:

1. nell'isolare l'insieme delle funzioni definibili per recursione;

2. nel dimostrare che tale insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con la seconda classe numerica cantoriana;

3. nel dimostrare che si può assumere consistentemente che le altre funzioni matematiche "non conducono al di fuori del dominio delle funzioni definibili ricorsivamente".[184]

In modo del tutto analogo, spiega Gödel, la sua dimostrazione di noncontraddittorietà relativa consiste:

[184]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 128.

1* nell'isolare una certa classe di insiemi, gli insiemi costruibili;

2* nel dimostrare che l'insieme di tutti gli insiemi costruibili di numeri naturali può essere messo in corrispondenza biunivoca con la seconda classe numerica cantoriana;

3* nel dimostrare che si può assumere consistentemente che gli altri metodi definitori matematici "non conducono al di fuori del dominio degli insiemi costruibili".[185]

Come si vede, Hilbert ebbe una grande influenza anche sui lavori insiemistici di Gödel, un'influenza le cui espressioni più chiare furono la dimostrazione sintattica contenuta in *Gödel 1940* ma soprattutto la lezione inedita tenuta alla Brown University sempre nel 1940.

*Gödel *1940a* presenta almeno due grosse novità rispetto alle fonti considerate fino ad ora:

i. vi si trova un primo accenno alla cosiddetta "ordinal-definability", la cui introduzione viene normalmente attribuita a *Gödel 1946*;

ii. viene delineata una dimostrazione di noncontraddittorietà che si allontana sia da quella semantica che da quella sintattica e recupera invece il tentativo di dimostrazione di Hilbert non solo genericamente, ma anche in alcuni dettagli della strategia dimostrativa.

Quanto al primo punto Gödel osserva che il punto di partenza della sua dimostrazione sta nella costruzione di un buonordinamento di tipo d'ordine ω_1, non tanto di $\mathbb{R}$, bensì delle possibili definizioni di $\mathbb{R}$, seguendo quindi la strategia delineata da Hilbert nel suo *1926*. A tal fine, aggiunge Gödel, sembra necessario presupporre i numeri ordinali e così, anziché considerare la collezione di tutti i numeri reali definibili, si andrà a considerare l'insieme di tutti i numeri reali "definibili in termini di ordinali".[186] Come osserva Solovay in *1995*, sebbene queste considerazioni euristiche poste all'inizio della lezione diano l'impressione che Gödel confonda le due nozioni di "ordinal-definability" e di "costruibilità", di fatto in un'osservazione successiva esse vengono nettamente distinte.

Veniamo ora al secondo punto rilevante di *Gödel *1940a*. A pagina 15 di questa lezione vengono proposte due definizioni della nozione di "insieme

[185]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 130.
[186]Cf. *Gödel *1940a* in *Gödel 1995*, pag. 175.

costruibile": la prima è la solita definizione che fa riferimento alla gerarchia ramificata di Russell, mentre la seconda fa riferimento a *Hilbert 1926* ed è anche stata soprannominata[187] "Gödel-ricorsività". Si tratta di una nozione di costruibilità secondo la quale un insieme si dice costruibile se è definibile ricorsivamente in termini di numeri ordinali.

Gli assiomi quadrati

Nel 1970 Gödel scrisse un breve articolo intitolato "Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$"[188] che intendeva pubblicare sui *Proceedings of the National Academy of Science*. In questa nota proponeva quattro assiomi (poi soprannominati "assiomi quadrati di Gödel") dai quali sarebbe stato possibile derivare la proposizione:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Probabilmente incerto della correttezza della sua dimostrazione, egli spedì l'articolo a Tarski il quale a sua volta lo sottopose a Solovay. Dall'analisi fatta da Solovay risultò che la proposizione $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ non era derivabile dagli assiomi quadrati e di conseguenza che la dimostrazione di Gödel doveva contenere qualche errore.[189] Dunque l'articolo restò inedito e tuttavia l'autore non si perse d'animo e poco dopo aver ricevuto la risposta di Tarski ne schizzò una seconda versione intitolandola "A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth".[190] Questo inedito costituisce un'improvvisa inversione di tendenza rispetto all'opinione espressa da Gödel negli anni Quaranta e Sessanta secondo la quale CH sarebbe stata falsa.[191] Qui infatti l'autore sostiene che, sulla base degli assiomi quadrati da lui proposti, sembra possibile argomentare in modo convincente a favore della "verità dell'ipotesi del continuo".[192]

Sempre nel 1970 Gödel scrisse una seconda lettera (mai spedita) a Tarski che costituisce una terza versione dell'articolo[193] la quale ritorna su posizio-

[187] Cf. *Solovay 1995*.

[188] Cf. *Gödel *1970a*.

[189] Anche se, vista la parziale indecifrabilità dell'articolo, non era dato di sapere dove si trovassero gli errori.

[190] Cf. *Gödel *1970b*.

[191] Cf. *Gödel 1947* e *Gödel 1964*.

[192] Cf. *Gödel *1970b* in *Gödel 1995*, pag. 422.

[193] Cf. *Gödel *1970c*.

ni simili a quelle sostenute nella prima versione pur manifestando qualche perplessità circa l'ultimo dei quattro assiomi proposti inizialmente.

6. Due grandi questioni aperte

Nel presente capitolo cercheremo di caratterizzare brevemente i due problemi insiemistici cui Gödel prestò particolare attenzione non solo nei suoi lavori tecnici di teoria degli insiemi ma anche in quelli più filosofici.

6.1. L'assioma di scelta

La storia dell'assioma di scelta costituisce un paradigma per comprendere, da una lato, la storia della teoria degli insiemi e, dall'altro, la grande disputa che dalla seconda metà dell'Ottocento fino ad oggi ha diviso i matematici fra costruttivisti e platonisti. Questa vicenda del progressivo emergere di un nuovo principio matematico e delle reazioni contrastanti che lo accompagnarono è stata magistralmente descritta da Gregory H. Moore nella monografia intitolata *Zermelo's axiom of choice*. Con riferimento a quest'opera e all'articolo di Thomas Jech "About the axiom of choice"[194] cercheremo qui di seguito di delineare alcuni tratti della storia di questo discusso principio fino al 1935 anno in cui con tutta probabiltà Gödel dimostrò la noncontraddittorietà relativa dell'assioma di scelta rispetto al sistema per la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, **ZF**.

Modificando lievemente una cronologia dovuta a Moore, è possibile distinguere cinque periodi nella storia dell'assioma di scelta, dalla nascita della teoria degli insiemi fino ad oggi. Un primo periodo, dal 1877 al 1904, riguarda la "preistoria" dell'assioma, cioè quella fase in cui alcuni matematici, primo fra tutti Georg Cantor, fecero uso implicito dell'assioma di scelta o di principi insiemistici equivalenti ad esso.

Il secondo periodo, dal 1904 al 1917, inaugurato con la prima formulazione esplicita di AC da parte di Zermelo, fu caratterizzato dalle aperte critiche di molti matematici (fra cui Borel, Baire e Lebesgue) e dall'uso esplicito e consapevole da parte di altri (come Zermelo, Hilbert e Hadamard).

Una terza fase iniziò nel 1918 col celebre articolo di Wacław Sierpiński sulle applicazioni di AC in analisi e nella teoria degli insiemi e si concluse con la formulazione di uno degli equivalenti matematicamente più rilevanti di AC: il lemma di Zorn.

[194]Pubblicato in *Barwise 1977*, pagg. 345-370.

Il quarto periodo, dal 1938 al 1962, fu caratterizzato dalla definitiva integrazione di AC in quasi tutte le discipline matematiche. Questa fase fu avviata dalla dimostrazione, pubblicata da Gödel nel 1938, della dimostrazione della non contraddittorietà di AC rispetto agli altri assiomi della teoria degli insiemi e si chiuse con la formulazione di un interessante principio combinatorio che contraddiceva AC: l'assioma di determinatezza (AD).

La quinta ed ultima fase, dal 1963 ad oggi, fu inaugurata dalla dimostrazione di Cohen dell'indipendenza di AC rispetto agli altri assiomi della teoria degli insiemi, da una rinnovata attenzione per gli equivalenti del principio di Zermelo ma anche da un'inedita epoca di studio sui principi alternativi ad AC (come AD) e di principi (come gli assiomi dei grandi cardinali) che implicano AC o $\neg\mathsf{AC}$.

6.1.1. Infinite scelte arbitrarie

A partire dagli anni Settanta dell'Ottocento, con la creazione da parte di Cantor della teoria degli insiemi, cominciò a diffondersi in maniera sotterranea l'uso di uno strumento deduttivo nuovo. Si trattava di un'estensione a domini infiniti in atto del principio combinatorio secondo cui: *data una famiglia finita F di insiemi finiti non-vuoti, esiste sempre un insieme che contiene esattamente un elemento per ogni insieme $M \in F$.* Senza dubbio la stragrande maggioranza degli usi impliciti dell'assioma di scelta occorrono nelle opere di Cantor principalmente nella forma di un principio che Cantor negli anni Settanta e Ottanta dell'Ottocento considerava una "legge del pensiero", il principio del buonordinamento ossia:

WOP Ogni insieme può essere ben-ordinato.

Un'altra forma equivalente di AC sovente usata da Cantor fu il cosiddetto principio di tricotomia dei numeri cardinali:

TRIC Dati due numeri cardinali κ, λ finiti o infiniti:

$$\kappa < \lambda \quad \text{o} \quad \lambda < \kappa \quad \text{o} \quad \kappa = \lambda.$$

Fra i teoremi che Cantor dimostrò facendo un uso implicito (ed essenziale) dell'assioma di scelta, vanno citati almeno i seguenti tre:

- L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile (teorema dell'unione).

- Ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile.

- Se un insieme M è suddiviso in una famiglia F di insiemi non-vuoti e disgiunti, allora F è equipotente a un sottoinsieme (anche improprio) di M (principio di partizione).

I primi due risultati elencati richiedevano solo una forma debole di AC, il cosiddetto assioma di scelta numerabile[195] (AC^{ω}), mentre il terzo richiedeva AC in tutta la sua forza deduttiva.

Anche in Dedekind troviamo un uso implicito di AC nella dimostrazione, del 1888, del teorema di tricotomia dei cardinali, in cui veniva fatto uso esplicito del principio del buonordinamento.

La cosa più interessante di questa prima fase della storia dell'assioma di scelta fu l'uso implicito che ne fecero alcuni dei matematici che divennero poi acerrimi nemici del principio di Zermelo e talvolta di tutta quanta la teoria degli insiemi. Fra questi occorre menzionare per lo meno Borel, Baire e Lebesgue. I tre matematici francesi dopo la pubblicazione del teorema del buonordinamento di Zermelo intrapresero una vera e propria crociata contro l'uso di infinite scelte e più in generale dell'infinito attuale in matematica delineando così quell'approccio ai fondamenti della matematica (successivamente abbracciato anche da Poincaré e da Hermann Weyl) che prese il nome di predicativismo o di semi-intuizionismo.

I molteplici utilizzi impliciti di AC e WOP da parte di Cantor in teoria degli insiemi e in topologia degli insiemi di punti ebbe due importanti conseguenze: da un lato, creò un corpus di risultati matematici che facevano uso essenziale di AC, cominciando così a diffondere fra i matematici dell'epoca una nuova forma di ragionamento matematico consistente in sostanza nella trasposizione all'infinito di principi riguardanti il finito.[196] D'altro canto, Cantor modificò il significato della parola "esistenza" in matematica.

Va però notato che, oltre a molti esempi di uso indiscriminato di AC, verso la fine dell'Ottocento ci furono anche matematici che, dopo aver mes-

[195] Cioè il principio secondo cui: data una famiglia *numerabile* F di insiemi a due a due disgiunti e non-vuoti, esiste un insieme che contiene esattamente un elemento di ogni elemento di F.

[196] Ogni insieme finito può essere ben-ordinato; i numeri naturali sono sempre confrontabili; su ogni famiglia finita di insiemi finiti e non-vuoti si può sempre definire una funzione di scelta.

so in evidenza la possibilità di introdurre infinite scelte nelle dimostrazioni matematiche ne negarono decisamente la validità e legittimità.[197]

6.1.2. L'assioma di Zermelo

Nel celebre articolo del 1904 "Beweis dass jede Mengen wohlgeordnet werden kann" pubblicato sui *Mathematische Annalen* Ernst Zermelo scriveva:[198]

> Ad ogni sottoinsieme M$'$ di un dato insieme M si associa un elemento m_1' che occorre in M$'$ stesso e che può essere detto l'elemento "distinto" di M$'$.

Si tratta probabilmente della prima formulazione esplicita di AC nella letteratura matematica. Dunque la prima formulazione dell'assioma di scelta affermava l'esistenza, per ogni famiglia di insiemi non-vuoti, di una *funzione di scelta*, che facesse corrispondere ad ogni insieme M della famiglia, uno ed un solo membro di M. La forma più generale di questo principio, dimostrabilmente equivalente a quella di Zermelo è la seguente:

AC^f Per ogni insieme M esiste una funzione f che associa ad ogni elemento non-vuoto m di M un unico membro $f(m) \in m$.

Dopo aver elencato le principali conseguenze del teorema del buonordinamento (fra cui il cosiddetto teorema dell'aleph e il principio di tricotomia dei cardinali) Zermelo osservava come la sua dimostrazione fosse basata sull'assunzione dell'esistenza, in generale, di funzioni di scelta persino per famiglie infinite di insiemi non-vuoti. Egli notava inoltre come in matematica questa assunzione venisse usata "senza esitazioni" come un principio logico irriducibile ad altri e indimostrabile. Zermelo sembrava quindi voler giustificare AC sulla base del dato di fatto che questo principio fosse già molto usato in matematica ed in particolare venisse usato per dimostrare risultati ampiamente condivisi dai matematici. Di fatto questo tentativo di legittimazione di AC nel 1904 fu il presagio delle critiche che caratterizzarono gli anni successivi e cui Zermelo tentò di porre rimedio coi due articoli del 1908 in cui dava una nuova dimostrazione del teorema del buonordinamento e, rispettivamente, la prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi, il cosiddetto sistema **Z**.[199] Nel 1908 Zermelo formulava AC come segue:[200]

---

[197] Fra questi vanno menzionati: Giuseppe Peano, Rodolfo Bettazzi e Beppo Levi.

[198] Cf. *Zermelo 1904*, pag. 514 oppure in *van Heijenoort 1967*, pagg. 139-140.

[199] Che includeva gli assiomi di estensionalità, separazione, insiemi elementari, potenza, unione, infinito e scelta.

[200] Cf. *Zermelo 1908*, pag. 110 oppure in *van Heijenoort 1967*, pag. 186.

> Un insieme S che possa essere scomposto in un insieme di parti disgiunte A,B,C,... ciascuno contenente almeno un elemento, possiede almeno un sottoinsieme S_1 che abbia esattamente un elemento in comune con ciascuna delle parti A,B,C,... considerate.

Detto altrimenti:

AC Se un insieme S è ripartito in una famiglia F di insiemi non-vuoti e a due a due disgiunti, allora esiste almeno un sottoinsieme T di S che ha esattamente un membro in comune con ogni membro di F.

Si tratta di una formulazione del cosiddetto *assioma moltiplicativo* di Russell e secondo Zermelo questa forma di AC, a differenza di quella funzionale del 1904, avrebbe dovuto evidenziarne meglio il "carattere puramente oggettivo". Richiamandosi agli utilizzi di AC fatti da Dedekind, Cantor, Schoenflies e König, egli sosteneva che questa situazione potesse essere spiegata solo sulla base dell'"autoevidenza" di tale principio ed in tal senso notava che pur trattandosi di un criterio soggettivo, quello dell'autoevidenza avesse un importante ruolo in matematica, per lo meno come fonte di nuovi principi. In queste osservazioni di Zermelo troviamo due tratti che caratterizzano la fase più matura del platonismo gödeliano: la fiducia nell'intuizione matematica come strumento euristico e la critica di ogni tentativo di trascurare l'esistenza di tale intuizione.[201]

Come già nel 1904, anche nel suo *1908*, Zermelo cercava di giustificare AC con una lista di risultati "importanti" che lo richiedevano per essere dimostrati.[202] Egli portava esempi tratti dalla teoria degli insiemi, dall'algebra e dall'analisi probabilmente per mettere in evidenza il fatto che l'uso essenziale di questo principio non costituiva solo un'anomalia insiemistica.

I due articoli di Zermelo del 1908 non sortirono effetti positivi. Molti matematici in Francia, Germania, Inghilterra e Italia rimasero su posizioni fortemente critiche tanto più che negli anni successivi fu fatta una scoperta che sembrò mettere irrimediabilmente in crisi lo statuto dell'assioma di scelta.

[201]In Zermelo si trova inoltre l'idea che i risultati accettati dalla comunità dei matematici vanno legittimati anche con strumenti e principi nuovi apparentemente discutibili e incerti.

[202]Zermelo cita i seguenti teoremi: 1. Ogni insieme Dedekind-finito è finito; 2. Le rispettive unioni di due famiglie di insiemi disgiunti, equipotenti, sono ancora equipotenti; 3. Se M è un insieme disgiunto di insiemi, l'insieme $\mathrm{M}^{\times} = \left\{ S \subseteq \bigcup M : \overline{\overline{M \cap S}} = 1 \right\}$ è vuoto se e solo se uno degli elementi di M è vuoto; 4. Esiste una classe di Hamel; 5. Esistono funzioni reali discontinue f tali che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni x, y; 6. Il teorema dell'unione; 7. Il principio di partizione.

Nel 1914 Felix Hausdorff pubblicò un articolo in cui dimostrava, facendo uso essenziale di AC, il seguente:

Teorema. Una sfera S può essere scomposta in quattro insiemi disgiunti $S = A \cup B \cup C \cup Q$ tali che:

(i) gli insiemi A, B, C sono fra loro congruenti;

(ii) l'insieme $B \cup C$ è congruente a ciascuno degli insiemi A, B, C;

(iii) Q è numerabile.

Il punto (ii) risultava paradossale, nel senso che $B \cup C$ si dimostrava essere congruente ad una sua sottoparte propria; si aveva infatti la seguente conseguenza del teorema di Hausdorff:

Corollario. Esiste una scomposizione di una sfera tale che la metà della sfera risulta essere congruente ad un terzo della stessa sfera.

Questa conseguenza paradossale del teorema di Hausdorff fu messa in evidenza da Borel il quale nella seconda edizione delle sue *Leçons sur la théorie des fonctions* (1914) attribuiva l'origine del paradosso proprio all'applicazione dell'assioma di scelta.

In realtà questo paradosso può essere spiegato in due modi molto differenti. Come osserva Moore nel suo *1982* la fonte del paradosso di Hausdorff può essere indivituata sì nell'uso dell'assioma di scelta, ma anche nell'esistenza di una soluzione per il problema della misura di Lebesgue. In altre parole, la paradossalità del corollario visto sopra scompare non appena si osserva il fatto che i sottoinsiemi di S devono essere non-misurabili.

6.1.3. Lo studio "neutrale" di AC

La terza fase della storia recente dell'assioma di scelta cominciò con la pubblicazione da parte di Wacław Sierpiński del lungo articolo intitolato "L'axiome de M.Zermelo et son rôle dans le théorie des ensembles et l'analyse" (1918). Questo periodo fu caratterizzato dal completamento dell'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, mediante la formulazione da parte di Fraenkel e Skolem dell'assioma di rimpiazzamento e con la precisazione da parte di Skolem della nozione di "definite Eigenschaft" in termini di "formula predicativa del prim'ordine".

L'elemento distintivo di questa terza fase fu lo studio sistematico di equivalenti e conseguenze di AC da parte degli esponenti della scuola di Varsavia fondata da Sierpiński e il tentativo di determinare la relazione deduttiva sussistente fra AC e gli altri assiomi della teoria degli insiemi da parte di Fraenkel.

Nei primi anni Venti Fraenkel tentò infatti di dimostrare l'indipendenza di AC rispetto agli altri assiomi sfruttando però dei modelli in cui si assumeva in modo essenziale l'esistenza di un'infinità di atomi o Urelmente. Si trattava dei cosiddetti modelli di permutazioni di Fraenkel che furono poi ripresi e approfonditi negli anni Trenta da Lindenbaum e Mostowski.

Nel 1924 Banach e Tarski analizzarono in profondità il significato e le conseguenze del teorema di Hausdorff formulando il celebre *paradosso di Banach-Tarski* nella seguente forma:

Teorema. Una sfera chiusa U può essere scomposta in due insiemi disgiunti $U = X \cup Y$ tali che $X \approx U$ e $Y \approx U$, dove $\approx$ indica la relazione di equivalenza che sussiste fra due insiemi A, B quando esiste una scomposizione di A in insiemi disgiunti $A = A_1 \cup ... \cup A_n$ e una scomposizione di B nello stesso numero di insiemi disgiunti $B = B_1 \cup ... \cup B_n$ tale che A_i è congruente a B_i per ogni $i \in \{1, ..., n\}$.

Va notato che, come Hausdorff non considerò paradossale il suo risultato, così Banach e Tarski non videro nel loro teorema un fatto screditante la validità dell'assioma di scelta. Infatti nel loro articolo del 1924 i due matematici osservarono che senza AC non si sapeva neppure come dimostrare la seguente:

Proposizione. Due poligoni inclusi propriamente l'uno nell'altro non sono equivalenti per scomposizione finita.

Con ciò essi volevano sottolineare il fatto che se l'assunzione di AC può avere delle *conseguenze* paradossali, il fatto di non assumere l'assioma sembra implicare delle *lacune teoriche* altrettanto paradossali.

Nella seconda metà degli anni Venti von Neumann propose una nuova assiomatizzazione della teoria degli insiemi e formulò per la prima volta l'assioma di fondazione (AF) che evitava l'autoappartenenza e l'esistenza di insiemi "abissali" come le catene di Mirimanoff. Anche von Neumann, come Fraenkel, usò tecniche modellistiche per dimostrare l'indipendenza di AF dagli altri assiomi del suo sistema. L'elemento importante per quanto riguarda AC, fu l'introduzione da parte di von Neumann di un principio di "limitazione di grandezza" che implicava, oltre all'assioma di separazione e all'assioma di rimpiazzamento, una forma forte dell'assioma di scelta talvolta detta *assioma di scelta universale*. Il principio in questione era il seguente:

VN Una classe è propria (cioè non è un insieme) se e solo se è equipotente alla classe totale V.

L'assioma di scelta universale che ne seguiva era il seguente:

AC^V Esiste una funzione F che associa ad ogni insieme $m \in V$ uno ed un solo elemento $F(m) \in m$.

Nel 1940 Gödel dimostrò proprio la noncontraddittorietà di questo principio forte di scelta fornendo un buonordinamento definibile dell'universo V.

Come accennato sopra questa terza fase si concluse con la formulazione da parte di Max Zorn di un principio di massimalità scoperto da Hausdorff e, indipendentemente, da Kuratowski, che divenne poi noto come *lemma di Zorn*, ossia:

ZL Sia P un insieme non-vuoto, parzialmente ordinato tale che ogni suo sottoinsieme linearmente ordinato abbia un confine superiore. Allora P ha un elemento massimale.

Anche se a rigor di termini questo equivalente di AC non fu scoperto da Zorn, egli fu però il primo a considerarlo come un assioma (anziché un teorema come fecero Hausdorff e Kuratowski) con la deliberata intenzione di sostituire l'assioma di scelta e il teorema del buonordinamento con un principio algebricamente più perspicuo e ampiamente condivisibile in particolare nell'ambito della teoria degli anelli e della teoria dei campi. Di fatto dopo la pubblicazione dell'articolo di Zorn "A remark on method in transfinite algebra" (1934) questo principio, per altro già presente nella letteratura, cominciò ad essere sempre più utilizzato dagli algebristi e non solo.

6.1.4. La posizione di Hilbert sull'assioma di scelta

La posizione di Hilbert a proposito dell'assioma di scelta mostra notevoli somiglianze con quella di Gödel ed anche con quella di Zermelo.

Hilbert sostenne la dimostrazione zermeliana del teorema del buonordinamento prima solo privatamente (fra il 1904 e il 1908), poi anche pubblicamente. Di fatto, essendo stato Zermelo un allievo di Hilbert, è naturale che la sua prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi, esposta in *Zermelo 1908a*, abbia risentito in qualche misura delle idee hilbertiane ed in particolare delle *Grundlagen der Geometrie* pubblicate del 1899.

Già nel 1900 Hilbert aveva sollevato il problema di dimostrare un caso particolare del teorema del buonordinamento, cioè quello relativo all'insieme dei numeri reali. Nel celebre "Mathematische Probleme" egli scriveva infatti:[203]

> Fatemi menzionare un'altra notevole asserzione di Cantor che ha una strettissima relazione con la proposizione precedente [il cosiddetto teorema delle due classi] e può fornire la chiave della dimostrazione di quella proposizione: l'esistenza di un buonordinamento dell'insieme dei numeri reali ...

e aggiungeva poco dopo:[204]

> Mi sembra altrettanto desiderabile ottenere una dimostrazione diretta di questa notevole asserzione di Cantor, magari descrivendo effettivamente un ordinamento per i numeri reali, tale che in ogni sottoinsieme [di $\mathbb{R}$] possa essere esibito un numero minimo.

Nel 1904, in una lettera ad Adolf Hurwitz, Hilbert esprimeva il suo giudizio sulla dimostrazione del teorema del buonordinamento di Zermelo osservando che le obiezioni di Shoenflies contro quella dimostrazione non fossero "più valide" di quelle avanzate da Bernstein in suo favore.

Nell'importante articolo "Die logische Grundlagen der Mathematik" (1923) Hilbert si pronunciava chiaramente in favore di AC dicendo che l'idea alla base di tale assioma costituisce un "principio logico generale" indispensabile persino per le parti elementari dell'inferenza matematica. Quest'opinione fu sostenuta successivamente anche da Zermelo il quale, nel 1930, non inserì AC fra gli assiomi specifici della teoria degli insiemi, affermando che esso era un principio logico generale del sistema. Sempre nel suo *1923* Hilbert affermava inoltre che l'assioma di scelta fosse in qualche modo ottenibile mediante la sua teoria della dimostrazione. In tal senso sembrerebbe che Hilbert considerasse AC come un principio valido ma che necessitasse di essere fondato metamatematicamente.

Nel suo *1926* Hilbert assumeva un assioma di scelta fra i principi del sistema logico lì presentato e sosteneva che gli assiomi relativi ai quantificatori potessero essere derivati da tale assioma.[205]

[203]Cf. *Hilbert 1900* in *Hilbert 1978*, pag. 155.

[204]Cf. *Hilbert 1900* in *Hilbert 1978*, pag. 155.

[205]Si trattava dell'assioma $\varphi(a) \to \varphi(\epsilon(\varphi))$ dove ϵ indicava la "funzione transfinita di scelta".

6.1.5. Considerazioni gödeliane sull'assioma di scelta

A. Come abbiamo visto nel capitolo 1, Gödel non solo non esitò ad usare un principio debole di scelta nella dimostrazione del teorema di completezza ma, nell'introduzione all'articolo del 1930, affermò esplicitamente di non aver neppure tentato di evitarne l'uso, dal momento che il problema della completezza dal suo punto di vista costituiva una questione matematica ancor prima che fondazionale.

Da questa affermazione possiamo desumere che già verso la fine degli anni Venti Gödel considerava l'assioma di Zermelo come uno strumento matematico valido anche se forse non ancora legittimato da un punto di vista fondazionale.

Questo atteggiamento gödeliano richiama in qualche modo quello di Skolem, il quale nel 1920 diede una nuova dimostrazione del teorema di Löwenheim usando AC, mentre nel 1922, dal momento che stava discutendo questioni relative ai fondamenti della teoria degli insiemi, evitò di proposito l'uso di questo principio.

B. Nella conferenza inedita del 1933 "The present situation in the foundation of mathematics" Gödel annoverava l'assioma di scelta, assieme alla nozione di esistenza non-costruttiva e alle definizioni impredicative, come uno dei punti deboli della teoria degli insiemi in quanto formalismo capace di esprimere tutta la matematica. In quella sede egli dedicava ampio spazio alla discussione della nozione non-costruttiva di esistenza e delle definizioni impredicative, mentre inspiegabilmente liquidava il problema dell'assioma di scelta dicendo che:[206]

> ... esso è di minore importanza per lo sviluppo della matematica.

Una tale affermazione è piuttosto sorprendente dal momento che all'epoca il principio di Zermelo era invece già ampiamente utilizzato non solo nella teoria degli insiemi, ma anche in algebra e analisi e, d'altro canto, non era affatto universalmente accettato dalla comunità dei matematici. Solomon Feferman[207] ha cercato di spiegare questa affermazione dicendo che forse all'epoca Gödel aveva già intravisto la possibilità di dimostrare la noncontraddittorietà relativa di AC. D'altro canto è oggi ben noto che la dimostrazione di noncontraddittorietà per l'assioma di scelta fu scoperta solo due anni più

[206] Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 50.
[207] Cf. *Feferman 1995*.

tardi ed inoltre già negli anni Venti Fraenkel aveva dato una risposta parziale al problema dell'indipendenza di AC.

Questa conferenza costituisce di fatto un punto di discontinuità all'interno dell'opera gödeliana anche per l'affermazione fortemente critica a proposito del platonismo in matematica che vi troviamo. In tal senso possiamo forse affermare che la posizione gödeliana a proposito dell'assioma di scelta sia stata fortemente legata alla sua filosofia della matematica.

C. Nella seconda metà degli anni Quaranta il nostro autore assunse una posizione filosofica marcatamente realista. In *Gödel 1947* egli afferma, a proposito del teorema del buonordinamento, che la dimostrazione di questo risultato necessita di AC ma che ciò non è problematico dal momento che questo principio risulta essere "altrettanto ben-fondato" degli altri assiomi per la teoria degli insiemi. Secondo l'autore AC sarebbe addirittura dotato dello stesso grado di evidenza degli altri assiomi insiemistici.

Gödel si esprime negli stessi termini anche nel suo *1964* sebbene nel 1963 Cohen avesse dimostrato l'indipendenza di AC rispetto agli assiomi della teoria degli insiemi. In tal senso si comprende che il punto di vista gödeliano sull'assioma di scelta era motivato, più che dalla sua noncontraddittorietà relativa, dal suo alto grado di evidenza e dal suo statuto aletico oltre che probabilmente dalla ricchezza di conseguenze e di applicazioni un po' per tutta la matematica.

6.2. L'ipotesi del continuo

Analogamente a quanto fatto sopra per l'assioma di scelta, tenteremo ora di ricostruire una parte della storia dell'ipotesi del continuo di Cantor. A tal fine ci rifaremo in generale a *Moore 1988* ed in particolare ai classici *Skolem 1923a*, *Hilbert 1926* e *Sierpiński 1934*.

6.2.1. Il problema del continuo di Cantor

Nel 1878 Georg Cantor, nell'articolo intitolato "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", si pose la questione di quante cardinalità esistono fra i sottoinsiemi infiniti dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. All'epoca lo stesso Cantor era a conoscenza soltanto di due cardinalità infinite distinte, quella di $\mathbb{R}$

e quella dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.[208] Sempre nel suo *1878* Cantor propose una soluzione che oggi è talvolta detta *ipotesi debole del continuo* ossia:

WCH Ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ è numerabile o ha la cardinalità di $\mathbb{R}$ stesso.[209]

In una lettera del 1882 Cantor considerò (forse per la prima volta) come una sola collezione la totalità dei numeri ordinali con un numero finito o infinito numerabile di predecessori.[210] Egli sosteneva che quella collezione, oggi nota come *la seconda classe cantoriana* e denotata dal simbolo ω_1, avesse una cardinalità maggiore di quella di $\mathbb{N}$ ed in particolare quella immediatamente maggiore. Di fatto egli dimostrò il teorema secondo cui: "Ogni sottoinsieme infinito di ω_1 è numerabile o ha la potenza di ω_1". In quella stessa lettera Cantor affermava di poter dimostrare che l'insieme dei numeri reali può essere messo in corrispondenza biunivoca con ω_1.

Si trattava della prima formulazione rigorosa della celebre *ipotesi del continuo* ossia dell'ipotesi secondo la quale:

CH $$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Cantor credette in più occasioni di aver dimostrato la validità di quest'ipotesi ma ogni volta si scopriva qualche errore nella dimostrazione.[211]

Negli anni che seguirono le grandi scoperte di Cantor molti matematici, fra i quali Paul Tannery, Felix Bernstein, Charles S. Peirce, Felix Hausdorff, Arthur Schoenflies, Julius König e David Hilbert tentarono di dimostrare CH. Fra le varie strategie utilizzate nel corso del Novecento per tentare di risolvere il problema del continuo meritano di essere ricordate almeno le seguenti.

Il primo e forse più ingenuo fu quello di tentare direttamente di dimostrare o di refutare CH.[212] Un secondo metodo fu quello di dimostrare CH per una certa classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.[213]

[208] Lui stesso aveva dimostrato questo fatto nell'articolo "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" pubblicato nel 1874.

[209] Si tenga presente che nel 1878 Cantor non considerava quest'asserzione come un'ipotesi bensì come un teorema.

[210] Detto altrimenti, egli considerava come un'unica collezione (come un insieme) la totalità degli insiemi numerabili.

[211] Di fatto nel 1884 Cantor credette di aver refutato CH e di aver dimostrato che la cardinalità del continuo non è un $\aleph$ cioè non è la potenza di un numero ordinale.

[212] In questa direzione hanno lavorato Cantor, Tannery, Bernstein e Hilbert.

[213] Al riguardo vanno considerati soprattutto i lavori di teoria descrittiva degli insiemi.

Un terzo approccio fu quello di tentare di trovare generalizzazioni di CH spostando poi l'attenzione su queste ultime. Questo metodo di ricerca fu perseguito soprattutto dopo che Felix Hausdorff, nel 1908, formulò la cosiddetta *ipotesi generalizzata del continuo* ossia la proposizione secondo cui per qualsiasi ordinale α:

$$\mathsf{GCH} \qquad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Un'altro filone di ricerche, iniziato soltanto nel 1917 da Nikolai Luzin e poi continuato e approfondito per ben tre decenni da Wacław Sierpiński, fu quello di studiare in ampio dettaglio le conseguenze di $\mathsf{(G)CH}$ e i suoi equivalenti (per poi valutarne plausibilità o paradossalità).[214]

Un approccio isolato e circoscritto anche temporalmente agli inizi degli anni Trenta fu quello di Zermelo il quale tentò di valutare CH anziché con la logica del prim'ordine con quella del second'ordine. Nel 1932 Zermelo ottenne anche un parziale successo, avendo dimostrato che: *o* CH *è vera in tutti i modelli di* $\mathbf{ZF_2}$[215] *oppure essa è falsa in tutti i modelli di* $\mathbf{ZF_2}$. Ovvero: al second'ordine l'ipotesi del continuo è decidibile anche se non ci è dato di sapere come.

A partire dal 1935 circa, Gödel iniziò un indirizzo di ricerca completamente nuovo volto a dimostrare l'indecidibilità di CH nella teoria assiomatica degli insiemi al prim'ordine. Come vedremo nel seguito egli riuscì a fare solo metà di quanto si era proposto: dimostrò infatti che gli assiomi di **ZF** non possono refutare CH, ma non riuscì a dimostrare che quegli stessi assiomi di **ZF** non possono nemmeno dimostrare CH.

Quest'ultimo risultato (l'indipendenza di CH) fu ottenuto soltanto nel 1963 da Cohen il quale introdusse un vero e proprio metodo sistematico per affrontare problemi insiemistici analoghi a quello del continuo.

Nel 1947 Gödel fece una proposta per risolvere il problema del continuo che tuttora viene abbracciato come approccio da numerosi insiemisti: si tratterebbe di dedurre o di refutare CH attraverso un assioma non compreso fra quelli di **ZF**, ma "in un certo senso" altrettanto "naturale" e "intuitivo" degli assiomi già noti.

[214] Proprio Gödel utilizzò i lavori di Sierpiński per tentare di dare una valutazione complessiva dello "status quaestionis" del problema del continuo.

[215] La teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel al second'ordine.

6.2.2. Il primo problema di Hilbert

David Hilbert nel già citato “Mathematische Probleme” pose la dimostrazione di quello che lui chiamava “il teorema del continuo” in testa ad una lista di ventitrè problemi fondamentali per lo sviluppo della matematica del Ventesimo secolo. In quel contributo Hilbert osservava come le indagini di Cantor avessero reso “molto verosimile” il teorema secondo cui “ogni insieme infinito di punti è equivalente o all’insieme dei numeri naturali o al continuo”. Hilbert notava inoltre come da quel teorema seguisse che la cardinalità del continuo risulta essere la più piccola cardinalità più-che-numerabile. Secondo l’autore, il problema del continuo si riassumerebbe nella constatazione del fatto che $\mathbb{R}$, a differenza di $\mathbb{N}$, non è dotato di un buonordinamento naturale. Una sua soluzione dovrebbe perciò consistere nella determinazione e definizione esplicita di un buonordinamento di $\mathbb{R}$.

Lo stesso Hilbert in “Über das Unendliche” scriveva:[216]

> Appena Cantor scoprì i suoi primi numeri transfiniti, i cosiddetti numeri della seconda classe, sorse il problema se mediante questa conta transfinita si potessero davvero contare anche gli insiemi ... che non sono numerabili nel senso ordinario. Fra questi insiemi fu preso in considerazione, in prima istanza, il segmento di punti. La questione se i punti di un segmento (cioè i numeri reali) possano essere contati mediante i numeri [della seconda classe cantoriana] è il famoso problema posto ma non risolto da Cantor...

E concludeva quindi:[217]

> Il problema del continuo si distingue per la sua originalità e per la sua intrinseca bellezza e, rispetto ad altri problemi, ha poi anche il vantaggio di unire in sè due qualità: la sua soluzione richiede nuove vie poiché con esso i vecchi metodi non funzionano e d’altro canto la sua soluzione è anche in sè e per sè di sommo interesse ...

Nel seguito dell’articolo Hilbert delineava le linee essenziali di una dimostrazione del “teorema del continuo” che si rivelò errata e nell’immediato non ebbe alcun seguito, ma che fu poi recuperata e rivalutata, anche se in una prospettiva del tutto nuova, proprio da Gödel.

Le formulazioni di Hilbert sono notevoli sia per la chiarezza con cui presentano il problema del continuo sia soprattutto per l’influenza che ebbero su molti matematici fra i quali lo stesso Gödel. L’ultima affermazione da

[216] Cf. *Hilbert 1926* in *Hilbert 1978*, pag. 255.
[217] Cf. *Hilbert 1926* in *Hilbert 1978*, pag. 255.

noi citata è particolarmente profetica: di fatto pochi problemi matematici hanno stimolato una ricerca di così vasta portata e la scoperta di metodi così innovativi ed efficaci come il problema del continuo.

Nell'ultima riga della seconda citazione relativa a *Hilbert 1926*, il grande matematico tedesco osservava come il problema del continuo meritasse di essere studiato di per se stesso, un'affermazione sicuramente memore degli sforzi fatti in tal senso per più di un decennio da Cantor, ma anche una constatazione che andrebbe approfondita nelle sue intrinseche ragioni. Perché mai un solo problema, prescindendo completamente dalla sua possibile fecondità matematica, meriterebbe di essere studiato e risolto? Detto in altri termini, quale sarebbe la rilevanza matematica e concettuale del problema del continuo?

Per ora limitiamoci a dire che questo problema ha una rilevanza matematica evidente che è poi quella di determinare se esista o meno un ordinamento e quindi una possibilità di contare l'insieme dei numeri reali (se vogliamo uno dei due insiemi più "importanti" per la matematica). D'altro canto esso possiede anche una notevolissima portata concettuale e più in generale filosofica relativa alla possibilità di "misurare" o di "stabilire l'ordine di grandezza" della collezione di tutti i sottoinsiemi di un insieme infinito dato. In termini filosofici il problema del continuo riguarda la possibilità di "contare" e di disporre su di una struttura ordinata le possibili proprietà di una collezione infinita di oggetti. In ultima istanza la soluzione di questo problema significherebbe un decisivo passo avanti nel tentativo di capire *che cos'è un insieme*.

6.2.3. Considerazioni di Skolem sul problema del continuo

Sembra molto probabile che l'articolo di Skolem "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" (*1923a*) possa essere stato un importante punto di riferimento per l'approccio gödeliano rispetto al problema del continuo di Cantor e soprattutto rispetto alla convinzione di Gödel secondo cui l'ipotesi del continuo sarebbe stata indipendente dagli assiomi per la teoria degli insiemi individuati nei primi trent'anni del Novecento.

In particolare, sembrerebbe che almeno quattro delle tematiche e questioni affrontate da Skolem in quell'articolo possano aver influito in modo importante sui lavori insiemistici di Gödel e soprattutto sui contributi gödeliani relativi alla costruibilità.

La prima tematica consisterebbe nel *teorema di Löwenheim* di cui Skolem dava una nuova dimostrazione e che Gödel utilizzò nella dimostrazione di noncontraddittorietà di CH. Come abbiamo visto nel capitolo 1, i lavori skolemiani ebbero una grande influenza sulla dimostrazione gödeliana del teorema di completezza e di fatto Gödel usò in modo essenziale la nozione di forma normale anche nella "Dialectica interpretation".

La seconda questione riguarderebbe il cosiddetto *paradosso di Skolem* che veniva lì risolto affermando che, per ogni nozione insiemistica, andrebbe distinto un utilizzo assoluto (secondo Skolem alla base del paradosso) ed un utilizzo relativo ad un certo modello.

La terza questione notevole sarebbe quella relativa agli *assiomi forti dell'infinito* che Skolem risolveva introducendo l'assioma di rimpiazzamento. Vedremo poi che importanza decisiva ebbe per Gödel la possibilità di introdurre nuovi assiomi dell'infinito allo scopo di "completare" in modo "naturale" l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi.

La quarta questione per noi rilevante sarebbe infine l'analisi della *non-categoricità* degli assiomi del 1908 di Zermelo cioè del sistema $\mathbf{Z}$. Skolem constatava il fatto che è possibile definire vari modelli di $\mathbf{Z}$ che sono sottoinsiemi di un dato modello di partenza. In una nota al testo, l'autore faceva un'osservazione che Gödel non poteva non aver presente quando intraprese il suo tentativo di dimostrare l'indipendenza dell'ipotesi del continuo. Egli notava come, dal momento che gli assiomi di Zermelo non determinano in modo univoco il modello inteso della teoria degli insiemi, sarebbe molto improbabile che essi possano decidere tutti i problemi insiemistici relativi alle cardinalità. In particolare Skolem riteneva assai poco plausibile che gli assiomi di Zermelo potessero decidere il problema del continuo.

6.2.4. Equivalenti dell'ipotesi del continuo

Nel 1934 Wacław Sierpiński pubblicò un importante monografia intitolata *Hypothèse du continu* in cui studiava l'ipotesi del continuo, proprio come nel caso dell'assioma di scelta, con un approccio neutrale volto a determinare equivalenti e conseguenze più o meno paradossali di questo discusso principio cantoriano.

Fra le proposizioni *dimostrabilmente equivalenti* a CH troviamo ad esempio, le seguenti:

- il piano è somma di un'infinità numerabile di curve;

- lo spazio a tre dimensioni è somma di un infinità numerabile di curve;

- l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è dato dalla somma (unione) di una successione di insiemi crescenti numerabili;

- nessun insieme di cardinalità $\aleph_1$ è somma di più di $\aleph_1$ insiemi infiniti aventi a due a due un numero finito di elementi comuni.

Fra le proposizioni che *seguono* da CH troviamo ad esempio:

- data una famiglia F di cardinalità $\leq 2^{\aleph_0}$ di funzioni in una variabile reale, esiste una funzione $g(x)$ in una variabile reale tale che per ogni funzione $f(x) \in F$ l'insieme degli x reali che soddisfano l'equazione $f(x) = g(x)$ è al massimo numerabile;

- esiste una funzione in una variabile reale che è discontinua su ogni insieme di cardinalità $2^{\aleph_0}$;

- esiste una funzione in una variabile reale che è discontinua su ogni insieme non-numerabile;

- esiste una famiglia di cardinalità $2^{2^{\aleph_0}}$ di insiemi crescenti di numeri reali.

Infine, nella sua monografia, Sierpiński determinava anche una serie di proposizioni che seguono dalla negazione dell'ipotesi del continuo. Fra queste citiamo solo la seguente:

- esiste una famiglia di cardinalità maggiore di $2^{\aleph_0}$ di insiemi crescenti di numeri reali.

Questi risultati apparentemente poco informativi e puramente descrittivi di equivalenti e conseguenze di CH, furono ben presenti a Gödel quando, a più riprese, manifestò i suoi dubbi sulla validità dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di costruibilità. In *Gödel 1947* e in *Gödel 1964* egli portò infatti una serie di conseguenze controintuitive dell'ipotesi del continuo facendo riferimento proprio all'*Hypothèse du continu*.

7. Teoria assiomatica degli insiemi

Nella celebre monografia del 1940 dedicata alla trattazione assiomatica della dimostrazione di noncontraddittorietà relativa dell'ipotesi (generalizzata) del continuo Gödel propose un nuovo sistema formale per la teoria degli insiemi e delle classi ispirato direttamente e dichiaratamente al sistema che Paul Bernays cominciò a pubblicare sul *Journal of symbolic logic* a partire dal 1937 con una serie di articoli. Gödel aveva potuto studiare questo sistema molto tempo prima della pubblicazione grazie ad una lettera speditagli il 3 maggio 1931 dallo stesso Bernays in cui si delineavano brevemente i tratti essenziali di quel sistema formale. In realtà il primo tentativo di assiomatizzare sia la nozione di insieme che quella di classe fu quello intrapreso da von Neumann a partire dal 1925. Nei prossimi due paragrafi cercheremo di illustrare a grandi linee i due sistemi formali di von Neumann e di Bernays per poter poi meglio apprezzare i caratteri di quello gödeliano.

7.1. Il sistema di von Neumann

L'idea sulla quale si basava il sistema assiomatico proposto da von Neumann nell'articolo "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" (1925) era una chiara distinzione fra estensioni di predicati e oggetti matematici. Secondo von Neumann, pur essendo ammissibile che ogni predicato possieda un'estensione, non è invece possibile affermare che ogni estensione di un predicato sia un oggetto matematico. Se si ammette un principio di comprensione senza restrizione si ricade nel rischio delle antinomie insiemistiche (come il paradosso di Russell e il paradosso di Burali-Forti). Il sistema di von Neumann, in breve **VNC**, considera quindi, da un lato, le estensioni di predicati, in breve le *classi*, e in questo ampio universo di discorso ritaglia il sottodominio degli oggetti matematici in senso stretto, gli *insiemi*.

Von Neumann, tuttavia, non parla di insiemi e classi, come faranno Bernays e Gödel, ma di oggetti del primo e del secondo tipo. La nozione primitiva di **VNC** non è quella di *collezione* come nel caso di **Z** e **ZF**, ma quella di *funzione*. Gli oggetti del secondo tipo di **VNC** sono intuitivamente funzioni che non sono argomenti di altre funzioni; gli oggetti del primo tipo sono invece da intendere come argomenti di funzioni. Vengono poi ammessi anche oggetti che sono sia del primo che del secondo tipo, da intendere come funzioni che possono esse stesse essere argomento di altre funzioni.

Dal punto di vista assiomatico il sistema **VNC** consta di sei gruppi di assiomi. Per facilitare il confronto col sistema di Gödel, anziché riportare gli assiomi nella forma originale, li riformuleremo in termini di insiemi come se stessimo procedendo in **ZF**. Indichiamo con $\mathcal{A}$ il predicato "essere un argomento", con $\mathcal{AF}$ il predicato "essere un argomento e una funzione", con $\mathcal{F}$ il predicato "essere una funzione". Abbreviamo le formule $\exists x(\mathcal{F}(x) \wedge \varphi)$, $\exists x(\mathcal{A}(x) \wedge \varphi)$, $\exists x(\mathcal{AF}(x) \wedge \varphi)$ con $\exists x^{\mathcal{F}}\varphi$, $\exists x^{\mathcal{A}}\varphi$, $\exists x^{\mathcal{AF}}\varphi$, rispettivamente, e le formule $\forall x(\mathcal{F}(x) \rightarrow \varphi)$, $\forall x(\mathcal{A}(x) \rightarrow \varphi)$, $\forall x(\mathcal{AF}(x) \rightarrow \varphi)$ con $\forall x^{\mathcal{F}}\varphi$, $\forall x^{\mathcal{A}}\varphi$, $\forall x^{\mathcal{AF}}\varphi$, rispettivamente.

D'ora in avanti con l'espressione $x`y$ indichiamo il *valore* della funzione x per l'argomento y e con l'espressione $x``y$ l'*immagine* di y tramite x. Indichiamo inoltre con TM la collezione dei termini del linguaggio di **VNC** e con FM la collezione delle formule del linguaggio di **VNC**.

I gruppo: assiomi introduttivi

Il primo dei quattro assiomi introduttivi del sistema **VNC** garantisce l'esistenza di due argomenti speciali 0 e 1. Il secondo riguarda l'operazione di applicazione di una funzione ad un argomento. Il terzo spiega le condizioni di applicabilità dell'operazione di coppia ordinata. L'ultimo è un assioma di estensionalità relativo alle funzioni.

1. $\mathcal{A}(0) \wedge \mathcal{A}(1)$
2. $(x`y) \in TM \Leftrightarrow \mathcal{A}(y) \wedge \mathcal{F}(x)$
3. $\langle x, y\rangle \in TM \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{A}(y)$
4. $\forall x^{\mathcal{F}}\forall y^{\mathcal{F}}(\forall z^{\mathcal{A}}(x`z = y`z) \rightarrow x = y)$.

II gruppo: assiomi aritmetici di costruzione

I sette assiomi di questo secondo gruppo garantiscono l'esistenza di una serie di funzioni: l'identità, le funzioni costanti, le proiezioni destra e sinistra di una coppia ordinata, la funzione applicazione, la funzione concatenazione di due funzione ed infine la composizione di funzioni.

1. $\exists x^{\mathcal{F}}\forall y^{\mathcal{A}}(x`y = y)$
2. $\forall w^{\mathcal{A}}\exists x^{\mathcal{F}}\forall y^{\mathcal{A}}(x`y = w)$
3. $\exists x^{\mathcal{F}}\forall y^{\mathcal{A}}\forall z^{\mathcal{A}}(x` \langle y, z\rangle = y)$

4. $\exists x^{\mathcal{F}} \forall y^{\mathcal{A}} \forall z^{\mathcal{A}} (x` \langle y, z \rangle = z)$
5. $\exists x^{\mathcal{F}} \forall y^{\mathcal{AF}} \forall z^{\mathcal{A}} (x` \langle y, z \rangle = y`z)$
6. $\forall x^{\mathcal{F}} \forall y^{\mathcal{F}} \exists z^{\mathcal{F}} \forall w^{\mathcal{A}} (z`w = \langle x`w, y`w \rangle)$
7. $\forall x^{\mathcal{F}} \forall y^{\mathcal{F}} \exists z^{\mathcal{F}} \forall w^{\mathcal{A}} (z`w = x`y`w)$.

III gruppo: assiomi logici di costruzione

Il primo dei tre assiomi di questo gruppo afferma l'esistenza della classe identità. Il secondo asserisce l'esistenza del complemento del dominio di una data funzione. Infine il terzo assioma stabilisce la chiusura del sistema rispetto ai predicati univoci a destra. Introduciamo i predicati $\in$, $\notin$ definiti rispettivamente come $x \in y := (y`x = 0)$, $x \notin y := (y`x = 1)$.

1. $\exists x^{\mathcal{F}} \forall y \forall z (\langle y, z \rangle \in x \leftrightarrow y = z)$
2. $\forall x^{\mathcal{F}} \exists y^{\mathcal{F}} \forall z^{\mathcal{A}} (z \in y \leftrightarrow \forall v^{\mathcal{A}} (\langle z, v \rangle \notin x))$
3. $\forall x^{\mathcal{F}} \exists y^{\mathcal{F}} \forall z^{\mathcal{A}} (\exists! v (\langle z, v \rangle \in x) \rightarrow y`z = v))$.[218]

IV gruppo: assiomi degli argomenti-funzione

Questo gruppo di assiomi garantisce l'esistenza della classe universale e stabilisce che una classe X è una classe propria se e solo se esiste una funzione f tale che ogni elemento x della classe universale è immagine tramite f di qualche elemento di X. Il secondo assioma di questo gruppo è uno dei tratti più caratteristici e una delle assunzioni più forti del sistema **VNC**; intuitivamente esso asserisce che: una classe è propria (cioè non è un insieme) se e solo se è rappresentabile sulla classe universale.

1. $\exists x^{\mathcal{F}} \forall y^{\mathcal{F}} (\mathcal{A}(y) \leftrightarrow y \in x)$
2. $\forall x^{\mathcal{F}} (\neg \mathcal{AF}(x) \leftrightarrow \exists y^{\mathcal{F}} \forall z^{\mathcal{A}} \exists v^{\mathcal{A}} (v \in x \wedge y`v = z))$.

[218] Come al solito $\exists! x \varphi$ sta per "esiste esattamente un x tale che φ".

V gruppo: assiomi dell'infinito

I tre assiomi di questo gruppo sono analoghi di quelli che normalmente vengono detti assiomi dell'infinito, dell'unione e della potenza per insiemi.[219]

1. $\exists x^{\mathcal{AF}}(\exists y^{\mathcal{AF}}(y \in x) \wedge \forall z^{\mathcal{AF}}(z \in x \rightarrow \exists v^{\mathcal{AF}}(v \in x \wedge z \subset v)))$
2. $\forall x^{\mathcal{AF}} \exists y^{\mathcal{AF}} \forall z^{\mathcal{AF}}(\exists v^{\mathcal{AF}}(z \in v \wedge v \in x) \rightarrow z \in y))$
3. $\forall x^{\mathcal{AF}} \exists y^{\mathcal{AF}} \forall z^{\mathcal{AF}}(z \subseteq x \rightarrow \exists w^{\mathcal{AF}}(z = w \wedge w \in y))$.

VI gruppo: assiomi di categoricità

Il primo dei seguenti assiomi stabilisce che nel sistema **VNC** non ci sono *atomi* o *Urelemente* ossia che ogni argomento è anche funzione. Il secondo definisce gli elementi $0, 1$ in termini di insieme vuoto. Il terzo definisce la coppia ordinata in termini di insiemi. Infine l'ultimo assioma è la prima formulazione dell'assioma di fondazione: in questa forma esso stabilisce esplicitamente che non esistono catene discendenti infinite di insiemi cioè che non esistono insiemi "abissali".[220]

1. $\forall x^{\mathcal{A}} \mathcal{AF}(x)$
2. $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$
3. $\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$
4. $\neg \exists x^{\mathcal{AF}} \forall y^{\mathcal{A}} \in \omega(x`s`y \in x`y)$, dove $s`y := y \cup \{y\}$.

Come si sarà notato nel sistema **VNC** mancano due assiomi fondamentali di **ZF** ossia lo schema di separazione e lo schema di rimpiazzamento. Tuttavia l'assioma 2 del gruppo IV è così forte da implicare gli assiomi di separazione, di rimpiazzamento e di scelta universale.

[219] Come al solito, $x \subseteq y$ sta per $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ e $x \subset y$ sta per $x \subseteq y \wedge x \neq y$.

[220] Come al solito indichiamo con ω l'insieme degli ordinali finiti, con $\emptyset$ l'insieme vuoto e con $\cup$ l'operazione binaria di unione.

7.2. Il sistema di Bernays

Come anticipato sopra, il 3 maggio del 1931 Paul Bernays scrisse una lettera a Gödel[221] delineando un sistema di assiomi per la teoria degli insiemi e delle classi la cui versione definitiva fu poi pubblicata a partire dal 1937. Nella lettera del '31 e nel celebre articolo "A system of axiomatic set theory" Bernays distingueva nettamente la nozione *logica* di classe da quella *matematica* di insieme, non solo concettualmente come aveva fatto von Neumann mediante l'assioma 2 del IV gruppo, ma anche ontologicamente.

Nel seguito illustreremo il sistema esposto da Bernays nella lettera del '31 dal momento che probabilmente Gödel lavorò anche su questo sistema oltre che su quello del 1937 nell'elaborare il suo sistema assiomatico ed inoltre perché si tratta di una fonte inedita. Si tenga però presente che nella monografia del '40 in cui Gödel espose il suo sistema viene citato solo *Bernays 1937* (in breve $\mathbf{BSC}^*$).[222]

Bernays si propone di parlare di un *sistema di cose* contenente due generi di oggetti: insiemi e classi. Formalmente quindi egli usa due sorta di variabili: x, y, z per insiemi e X, Y, Z per classi. Anche la relazione fondamentale di appartenenza viene sdoppiata. Avremo che la formula:

$$x \in y$$

indica che l'insieme x appartiene all'insieme y, mentre la formula:

$$x \eta Y$$

indica che l'insieme x appartiene alla classe Y.

Le due nozioni di insieme e classe, seppur eterogenee, risultano connesse dalla relazione di "rappresentazione" Rp nel senso che certe classi possono essere rappresentate da opportuni insiemi, altre, le classi proprie, no. Avremo dunque che la classe Y è rappresentata dall'insieme x se e solo se gli elementi di x coincidono con quelli di Y, in simboli:

$$Rp(x, Y) \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \eta Y).$$

Il sistema delineato da Bernays nel '31, in breve **BSC**, consta di sei gruppi di assiomi. Ne proponiamo qui sotto una formalizzazione.[223]

[221] Questa lettera è oggi disponibile in *Gödel 2003*, pagg. 104-114.

[222] Cf. al riguardo *Bernays 1976*.

[223] Si noti infatti che nella lettera a Gödel, **BSC** viene solo enunciato in modo intuitivo in tedesco.

I. Identità

Gli assiomi di questo gruppo stabiliscono delle condizioni di sostitutività per insiemi uguali e per classi uguali.

1. $\forall x \forall y(x = y \rightarrow \forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z))$
2. $\forall x \forall y(x = y \rightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$
3. $\forall x \forall y(x = y \rightarrow \forall Z(x \eta Z \leftrightarrow y \eta Z))$
4. $\forall X \forall Y(X = Y \rightarrow \forall z(z \eta X \leftrightarrow z \eta Y))$.

II. Assiomi di definitezza

Questo secondo gruppo comprende l'assioma di estensionalità per insiemi e quello per classi.

1. $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$
2. $\forall z(z \eta X \leftrightarrow z \eta Y) \rightarrow X = Y$.

III. Assiomi degli insiemi elementari

Il primo di questi due assiomi stabilisce l'esistenza dell'insieme vuoto, il secondo l'esistenza dell'unione di un insieme x col singoletto di un insieme y non contenuto in x. Di fatto da questi due assiomi segue l'esistenza del singoletto di ogni insieme e della coppia (non ordinata) di due insiemi qualsiasi e quindi essi, congiuntamente presi, costituiscono un analogo dell'assioma della coppia di **ZF**.

1. $\exists x \forall y(y \notin x)$
2. $\forall x \forall y(y \notin x \rightarrow \exists z(z = x \cup \{y\}))$.

IV. Assiomi elementari per le classi

Questi assiomi, che nell'articolo del 1937, Bernays chiamerà assiomi di costruzioni di classi, sono particolarmente importanti per comprendere l'assiomatizzazione di Gödel. Il primo afferma che ogni insieme rappresenta una classe. Il secondo postula l'esistenza del complemento di ogni classe. Il terzo l'esistenza dell'intersezione di due qualsiasi classi. Il quarto afferma l'esistenza della classe identità, il quinto della classe appartenenza, il sesto della classe $X \times V$ per ogni classe X. Il settimo e l'ottavo assioma riguardano le classi di coppie ordinate: per ogni classe di coppie ordinate esiste la classe dominio ed esiste la classe inversa. Infine il nono assioma assicura l'esistenza della cosiddetta classe "terza conversa" di ogni classe di triple ordinate.

1. $\forall x \exists Y Rp(x, Y)$
2. $\forall X \exists Y \forall z (z \eta Y \leftrightarrow \neg z \eta X)$
3. $\forall X \forall Y \exists Z \forall v (v \eta Z \leftrightarrow (v \eta X \wedge v \eta Y))$
4. $\exists X \forall y (y \eta X \leftrightarrow \exists z \exists v (z = v \wedge y = \langle z, v \rangle))$
5. $\exists X \forall y (y \eta X \leftrightarrow \exists z \exists v (z \in v \wedge y = \langle z, v \rangle))$
6. $\forall X \exists Y \forall z (z \eta Y \leftrightarrow \exists v (v \eta X \wedge z = \langle v, w \rangle))$
7. $\forall X (\forall y (y \eta X \leftrightarrow \exists z \exists v (y = \langle z, v \rangle)) \rightarrow \exists Y \forall w (w \eta Y \leftrightarrow \exists u (\langle w, u \rangle \, \eta X)))$
8. $\forall X (\forall x (x \eta X \leftrightarrow \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle)) \rightarrow$
   $\rightarrow \exists Y \forall v (v \eta Y \leftrightarrow \exists w \exists u (\langle w, u \rangle \, \eta X \wedge v = \langle u, w \rangle)))$
9. $\forall X (\forall x (x \eta X \leftrightarrow \exists y \exists z \exists v (x = \langle y, \langle z, v \rangle \rangle)) \rightarrow$
   $\rightarrow \exists Y \forall w (w \eta Y \leftrightarrow \exists p \exists q \exists r \, \langle p, \langle q, r \rangle \rangle \, \eta X \wedge w = \langle p, \langle r, q \rangle \rangle)))$.

V. Assiomi fondamentali della teoria generale degli insiemi

Questo gruppo di assiomi riguarda gli insiemi e comprende, nell'ordine, analoghi di quelli che in **ZF** sono gli assiomi di separazione, rimpiazzamento, scelta e fondazione. Di qui in avanti abbrevieremo con $fun(Y)$ la formula:

$$\forall x (x \in Y \leftrightarrow \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle) \wedge \forall u \forall v \forall w (\langle u, v \rangle \in Y \wedge \langle u, w \rangle \in Y \rightarrow v = w)).$$

Indicheremo inoltre con $dom(Y)$ il dominio di Y e con $cod(Y)$ il codominio di Y (indipendentemente dal fatto che Y sia una classe di coppie ordinate). Indichiamo infine con $\overline{\overline{X}}$ la cardinalità di X.[224]

[224] La cardinalità di un insieme x vien definita come al solito in termini della relazione di equipotenza $\asymp$ e della nozione di ordinale iniziale. La cardinalità di x, se x è un insieme ben-ordinato, sarà allora l'unico ordinale iniziale equipotente a x.

1. $\forall X \forall Y (X \subseteq Y \land \exists y Rp(y, Y) \to \exists x Rp(x, X))$

2. $\forall X \forall Y (\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \land \exists y Rp(y, Y) \to \exists x Rp(x, X))$

3. $\forall X (\forall x (x \eta X \leftrightarrow \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle)) \to \exists Y (fun(Y) \land dom(Y) = dom(X)))$

4. $\forall X (\exists x (x \eta X) \to \exists y (y \eta X \land \neg \exists v (v \in y \land v \eta X)))$.

VI. Assiomi superiori per gli insiemi

Quest'ultimo gruppo contiene quelli che von Neumann chiamava "assiomi dell'infinito" e comprende, nell'ordine analoghi degli assiomi dell'infinito, dell'insieme potenza e dell'unione. Indichiamo con $\wp$ l'operazione di insieme potenza e con $\bigcup$ quella di riunione o unione generalizzata.

1. $\exists x (\emptyset \in x \land \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$

2. $\forall x \exists y Rp(y, \wp(x))$

3. $\forall x \exists y Rp(y, \bigcup x)$.

Nel sistema pubblicato da Bernays nel 1937, **BSC***, gli assiomi di scelta, infinito e fondazione vengono formulati in modo differente, ma soprattutto costituiscono ciascuno un gruppo a sè stante. Come vedremo, anche Gödel isolerà gli assiomi di scelta e di fondazione in due gruppi distinti, quasi a volerne mettere in evidenza il carattere peculiare.

7.3. Il sistema formale di Gödel

Nella monografia del 1940 Gödel presentò un sistema formale, che qui indicheremo come **GDC**, il quale, sebbene formalmente ispirato a quello di Bernays, da un punto di vista concettuale sembra recuperare una distinzione fra insiemi e classi meno radicale di quella bernaysiana e più vicina a quella neumanniana. Tuttavia, mentre la distinzione di von Neumann si basava su una forte ipotesi di limitazione di grandezza, quella di Gödel viene ottenuta in modo più debole e concettualmente più banale: una classe è un insieme se appartiene a qualche classe.

Da un punto di vista filosofico e concettuale il sistema **GDC** può apparire quindi meno pregnante e perspicuo sia di **VNC** che di **BSC**, tuttavia dal punto di vista tecnico **GDC** rappresenta un passo avanti ed una notevole semplificazione dei due sistemi precedenti. Il sistema di Gödel sembra infatti coniugare la grande semplicità e immediatezza matematica di **ZF** con l'impostazione più ampia e concettualmente comprensiva dei sistemi per le classi alla von Neumann-Bernays.

A differenza di Bernays, Gödel assume un unico predicato di appartenenza per insiemi e classi $\in$. Come Bernays e a differenza di von Neumann, l'autore usa le lettere latine minuscole x, y, z come variabili per insiemi e le lettere latine maiuscole X, Y, Z per classi. Tuttavia nel sistema gödeliano in realtà c'è una sola sorta di variabili, tanto è vero che vengono anche introdotti due predicati $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M}$ da leggersi intuitivamente come "essere una classe" ed "essere un insieme". Consideriamo ora gli assiomi di **GDC**.

Gruppo A.

Questo primo gruppo contiene gli assiomi che stabiliscono le relazioni fondamentali fra insiemi e classi, l'estensionalità per classi e l'esistenza della coppia. Come si vedrà, nel sistema di Gödel manca la relazione di rappresentazione usata da Bernays per stabilire un termine di confronto fra insiemi e classi. Per Gödel tutto è classe e certe particolari classi sono insiemi. In tal senso mentre quella di Bernays è una teoria degli insiemi e delle classi, quella di Gödel può essere definita semplicemente come una teoria delle classi. Per comodità anche noi useremo due sorta di variabili.

A1. Ogni insieme è una classe, ossia:

$$\forall x \mathcal{C}(x).$$

A2. Ogni classe che appartiene ad una classe è un insieme, in simboli:

$$\forall X \forall Y (X \in Y \rightarrow \mathcal{M}(X)).$$

A3. Se due classi hanno gli stessi elementi allora sono uguali:

$$\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y.$$

A4. Dati due insiemi esiste l'insieme coppia (non-ordinata) di questi due insiemi, ossia:

$$\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \leftrightarrow (v = x \vee v = y)).$$

Gruppo B.

Il secondo gruppo di assiomi di **GDC** stabilisce la chiusura del sistema sotto otto operazioni combinatorie su classi. Come si vedrà gli assiomi di questo gruppo corrispondono grosso modo a quelli del IV gruppo di Bernays, tuttavia le formulazioni di Gödel si distinguono per la maggiore generalità. Si pensi ad esempio al fatto che la classe inversa (o conversa) qui non viene definita solo per il ristretto dominio delle classi di coppie ordinate, ma per tutte le classi. L'idea è che, data una classe X, la classe inversa Y di X contiene tutte le inverse delle sue coppie ordinate; sugli elementi di X che non sono coppie ordinate non si dice niente. Quindi, queste operazioni su classi vengono definite da Gödel facendo il minor numero possibile di ipotesi.

B1. Esiste la classe $E = \{\langle x, y\rangle : x \in y\}$ cioè l'estensione della *relazione di appartenenza* $\in$, in simboli:

$$\exists X \forall y \forall z(\langle y, z\rangle \in X \leftrightarrow y \in z).$$

B2. Il sistema è chiuso rispetto l'operazione $\cap$ di *intersezione*:

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall v(v \in Z \leftrightarrow (v \in X \wedge v \in Y)).$$

B3. Il sistema è chiuso rispetto all'operazione $-$ di *complemento*, in simboli:

$$\forall X \exists Y \forall z(z \in Y \leftrightarrow z \notin X).$$

B4. Il sistema è chiuso rispetto all'operazione *dom* di *dominio* ossia per ogni classe X, esiste la classe dei primi elementi delle coppie ordinate in X:

$$\forall X \exists Y \forall z(z \in Y \leftrightarrow \exists v(\langle z, v\rangle \in X)).$$

B5. Il sistema è chiuso rispetto all'operazione di *prodotto cartesiano* di una classe per la classe universale V:

$$\forall X \exists Y \forall z \forall v(\langle z, v\rangle \in Y \leftrightarrow z \in X).$$

B6. Il sistema è chiuso rispetto all'operazione di *inverso*, cioè per ogni classe X esiste la classe inversa X^{-1}, in simboli:

$$\forall X \exists Y \forall z \forall v(\langle z, v\rangle \in Y \leftrightarrow \langle v, z\rangle \in X).$$

B7. Il sistema è chiuso rispetto all'operazione cnv_2 di *seconda conversa*, cioè:
$$\forall X \exists Y \forall z \forall v \forall w(\langle z, \langle v, w\rangle\rangle \in Y \leftrightarrow \langle w, \langle z, v\rangle\rangle \in X).$$

B8. Il sistema è chiuso rispetto all'operazione cnv_3 di *terza conversa*, cioè:
$$\forall X \exists Y \forall z \forall v \forall w(\langle z, \langle v, w\rangle\rangle \in Y \leftrightarrow \langle z, \langle w, v\rangle\rangle \in X).$$

Gruppo C.

Il terzo gruppo del sistema di Gödel contiene quattro assiomi relativi agli insiemi, cioè analoghi di quelli che in **ZF** sono l'assioma dell'infinito, l'assioma dell'unione, l'assioma dell potenza e lo schema di rimpiazzamento. Si noti però che qui il rimpiazzamento non è dato come schema bensì come assioma. Di conseguenza, dato che in **GDC** non si assume neppure lo schema di separazione, questo sistema risulta essere finitamente assiomatizzato. Nel seguito abbrevieremo la formula $\forall x \forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in Y \wedge \langle x, z\rangle \in Y \rightarrow y = z)$ con $Un(Y)$.[225]

C1. Esiste un insieme infinito, ossia:
$$\exists x(\exists y(y \in x) \wedge \forall z(z \in x \rightarrow \exists v(v \in x \wedge z \subset v))).$$

C2. Per ogni insieme x esiste un insieme contenente gli elementi degli elementi di x:
$$\forall x \exists y \forall z \forall v(z \in v \wedge v \in x \rightarrow z \in y).$$

C3. Per ogni insieme x esiste un insieme contenente tutti i sottoinsiemi di x:
$$\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

C4. Per ogni insieme x e classe univoca a destra Y esiste l'insieme delle immagini di x tramite Y, in simboli:
$$\forall x \forall Y(Un(Y) \rightarrow \exists z \forall v(v \in z \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge \langle w, v\rangle \in Y))).$$

[225]Intuitivamente: la classe Y è univoca a destra.

Assioma D.

Si tratta dell'assioma di fondazione che fu introdotto per la prima volta in *von Neumann 1925* e dimostrato noncontraddittorio in *von Neumann 1929.* Come osservò lo stesso Gödel in una nota al testo aggiunta nel 1951, il primo ad aver formulato l'assioma nella forma da lui presentata e sotto il nome di "Fundierungsaxiom" fu Zermelo nel suo articolo del 1930. L'autore commenta questo assioma dicendo che esso pur non essendo indispensabile, semplifica notevolmente il lavoro. Si noti che qui Gödel formula un assioma di fondazione più generale di AF il quale si riferisce solo a insiemi. Indichiamo con $\cap$ l'operazione binaria di intersezione fra classi.

D. Ogni classe non vuota X contiene un elemento con nessun membro in comune con X, in simboli:

$$\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists z(z \in X \wedge (z \cap X = \emptyset))).$$

Assioma E.

Quello che Gödel enuncia per ultimo è una forma generale dell'assioma di scelta e in particolare di quello che noi abbiamo chiamato assioma di scelta universale, AC^V. Come osserva l'autore, si tratta di una forma molto forte dell'assioma di scelta, infatti "essa fornisce la scelta simultanea, mediante una singola relazione, di un elemento da ogni insieme dell'universo in considerazione".[226] Gödel fa altre due importanti considerazioni sull'assioma E: esso implica che l'universo può essere ben-ordinato ed inoltre se esso è noncontraddittorio rispetto agli altri assiomi allora anche AC, l'usuale forma dell'assioma di scelta, lo è.

E. Esiste una classe univoca a destra che associa ad ogni insieme non vuoto y un suo elemento, in simboli:

$$\exists X(Un(X) \wedge \forall y(y \neq \emptyset \rightarrow \exists z(z \in y \wedge \langle y, z\rangle \in X)))$$

o, equivalentemente:

$$\exists X(Un(X) \wedge \forall y(y \neq \emptyset \rightarrow X\text{`}y \in y)).$$

[226] Cf. *Gödel 1940*, pag. 39.

Nella nota 9 di *Gödel 1940* l'autore spiega quelle che lui ritiene le principali differenze fra il suo sistema e quello di Bernays dal quale ha tratto spunto. Secondo l'autore le principali differenze fra **GDC** e **BSC***, cioè il sistema di Bernays nella formulazione del '37, starebbero nel fatto che:

1. in **BSC***, a differenza di **GDC**, non vengono identificati insiemi e classi che hanno la stessa estensione;

2. in **BSC*** si assume un assioma che postula l'esistenza della classe di tutti i singoletti il quale consente di rimpiazzare B1 e B8 con un solo assioma.

D'ora in avanti indicheremo con **GDC** il sistema individuato dai gruppi A, B, C, D, E di assiomi e con **GD** il sistema ottenuto da **GDC** tralasciando l'assioma di scelta universale cioè l'assioma E.

7.4. Il teorema delle classi

Nel secondo capitolo della monografia del '40, Gödel dimostra un risultato fondamentale che ci assicura la chiusura del sistema **GD** rispetto ad un principio di comprensione predicativa. Si tratta del cosiddetto teorema delle classi dovuto a von Neumann e a Bernays. In *Bernays 1937* troviamo infatti il seguente risultato:

> Sia $\alpha(x_1, ..., x_n)$ un'espressione ottenuta a partire da espressioni atomiche della forma $x \in y$, $x\eta Y$ e $x = y$ mediante i connettivi proposizionali e i quantificatori su variabili insiemistiche, la quale contiene libere le variabili $x_1, ..., x_n$. Allora, esiste una classe X tale che per ogni n-upla di insiemi $x_1, ..., x_n$ si ha:
> $$\langle x_1, ..., x_n \rangle \, \eta X \leftrightarrow \alpha(x_1, ..., x_n).$$

L'idea alla base di questo risultato è che l'estensione di ogni formula elementare del linguaggio della teoria degli insiemi possa essere ottenuta attraverso un certo numero di operazioni combinatorie su classi.

A pagina 40 di *Gödel 1940* viene introdotta la nozione di *funzione proposizionale primitiva* o più semplicemente di *formula primitiva* come segue:

1. $X \in Y, x \in y, A \in B, a \in b$ sono formule primitive;

2. se φ e ψ sono formule primitive allora $\neg\varphi$ e $\varphi \wedge \psi$ sono formule primitive;

3. se φ è una formula primitiva, allora $\exists x\varphi$ è una formula primitiva e per ogni variabile insiemistica y, $\exists y\varphi$ è una formula primitiva.

Una volta definita la nozione di formula primitiva, Gödel va ad enunciare e poi a dimostrare il teorema delle classi e cioè un metateorema sulla base del quale "l'estensione di una funzione proposizionale primitiva è rappresentata da una classe" cioè secondo cui per ogni formula predicativa elementare con n variabili libere del linguaggio $\mathcal{L}$ di **GD** esiste una classe che contiene tutte e sole le n-uple ordinate di insiemi che soddisfano la formula in questione.

Gödel definisce questo risultato come un teorema generale di esistenza e lo enuncia nei seguenti termini:[227]

> Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ è una funzione proposizionale primitiva non contenente altre variabili libere oltre a $x_1, ..., x_n$ (e non necessariamente tutte queste) allora esiste una classe A tale che per ogni insieme $x_1, ..., x_n$:
>
> $$\langle x_1, ..., x_n\rangle \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n).$$

La dimostrazione del teorema delle classi procede per induzione sulla lunghezza della formula φ e fa uso essenziale delle otto operazioni su classi postulate negli assiomi del gruppo B.

Gödel commenta il risultato[228] dicendo che il teorema delle classi, è uno schema di teoremi che stabilisce, per ogni formula primitiva del linguaggio di **GD**, come associare a tale formula una classe che ne rappresenta l'estensione. Va sottolineato il fatto che col teorema delle classi il problema della precisazione della nozione zermeliana di "definite Eigenschaft" in qualche modo riceve una sistemazione ancora migliore di quella fornita da Skolem: una proprietà è "definita" se può essere espressa mediante un numero finito di operazioni di classe a partire dalla classe vuota.

7.5. Importanza del sistema GDC

Quali sono i principali pregi del sistema formale **GDC**?
Abbiamo già detto che, rispetto ai sistemi di Bernays del 1931 e del 1937, **GDC** ha il vantaggio di usare una sola sorta di variabili ed una sola relazione di appartenenza sia per classi che per insiemi. Questa economia concettuale fornisce al sistema di Gödel maggior versatilità e semplicità soprattutto dal punto di vista tecnico.

[227]Cf. *Gödel 1940* in *Gödel 1990*, pag. 40.
[228]Cf. *Gödel 1940* in *Gödel 1990*, pag. 43.

Rispetto al sistema di von Neumann, **GDC** ha il vantaggio di essere formulata nel moderno formalismo della teoria degli insiemi anziché nel più complicato formalismo funzionale con tre sorta di variabili. D'altronde, anche se formalmente **GDC** è molto più vicina a **BSC** che non a **VNC**, da un punto di vista concettuale il sistema di Gödel è molto vicino a quello di von Neumann nel non assumere una distinzione ontologica fra insiemi e classi e nel subordinare la nozione di insieme a quella di classe.

Dal punto di vista espressivo **GDC** presenta un grande passo avanti (condiviso per altro coi sistemi di von Neumann e Bernays) rispetto a **ZFC** in quanto permette di parlare di classi all'interno del sistema.

Un altro grande vantaggio di **GDC** rispetto a **ZFC** è quello di essere un sistema finitamente assiomatizzato. Come notato sopra, il sistema di Gödel non contiene schemi d'assioma: manca l'assioma di separazione mentre quello di rimpiazzamento viene formulato per classi "funzionali" anziché per formule "funzionali". Questa differenza fra i due sistemi risulta essere *essenziale* cioè ineliminabile, dal momento che si può dimostrare che: *non esiste alcun insieme finito di assiomi di* **ZF** *che implichi tutti gli assiomi di* **ZF**. Dunque **ZF** non soltanto non è finitamente assiomatizzato, ma non è neppure finitamente assiomatizzabile.

Un altro vantaggio di **GDC** è che, attraverso gli assiomi B1-B8, in essa è possibile codificare in termini matematici la nozione zermeliana di "definite Eigenschaft" che in **ZF** ammette solo una precisazione logica (per altro del tutto rigorosa).

8. Modelli interni della teoria degli insiemi

Com'è noto la dimostrazione di noncontraddittorietà relativa di GCH, pubblicata da Gödel nel suo *1939a*, si basa essenzialmente sulla possibilità di definire una struttura, all'interno del sistema formale **ZF**, la quale risulta poi soddisfare tutti gli assiomi di **ZF**. Si è soliti quindi affermare che questa struttura costituisce un *modello interno* di **ZF** (intuitivamente un modello di **ZF** che **ZF** riesce ad esprimere al suo interno). E' possibile realizzare uno studio sistematico della nozione di modello interno[229] e distinguere due tipi fondamentali di modelli interni: quelli semantici e quelli sintattici. I primi, quelli intuitivamente più semplici, fanno riferimento a certi oggetti di natura extra-linguistica come universo di discorso e quindi definiscono una certa struttura la quale, pur essendo una sottostruttura del modello "inteso" della teoria, è a sua volta un modello della teoria. I secondi, meno intuitivi ma costruttivamente meglio fondati dei primi, assumono come universo di discorso soltanto oggetti di natura linguistica e quindi simboli di un certo linguaggio. In sostanza l'esistenza di un modello interno sintattico di una certa teoria **T** è data dalla possibilità di "mappare" la sintassi di **T** su una sottoparte propria della sintassi di **T**.

L'uso di modelli interni nelle dimostrazioni di noncontraddittorietà non nasce nell'ambito della teoria degli insiemi (né della teoria della dimostrazione) ma in quello delle geometrie non-euclidee. Il primo esempio di modello interno fu quello di Beltrami (anche noto come modello di Beltrami-Klein). Successivamente un importante esempio di modello interno delle geometrie non-euclidee fu quello di Poincaré.

8.1. Il modello di von Neumann

La prima applicazione rigorosa della nozione di modello interno semantico in teoria degli insiemi è stata realizzata da von Neumann nell'ambito della dimostrazione di noncontraddittorietà relativa dell'assioma di fondazione rispetto agli altri assiomi della teoria degli insiemi.[230] Il modello usato da von Neumann, talvolta detto "gerarchia dei combinabili", era definito per recursione transfinita mediante la seguente funzione R dalla classe di tutti

[229]Si vedano al riguardo *Shepherdson 1951, 1952, 1953* e *Dalla Chiara 1968.*

[230]Si veda *von Neumann 1929.*

gli ordinali sulla classe di tutti gli insiemi:

$$\begin{aligned} R(0) &:= \emptyset \\ R(\alpha+1) &:= \wp(R(\alpha)) \\ R(\xi) &:= \bigcup_{\beta<\xi} R(\beta), \end{aligned}$$

dove il simbolo $\wp$ indica l'operazione insiemistica di potenza, α e β ordinali qualsiasi e ξ un ordinale limite. Questo modello costituisce un po' il modello inteso della teoria degli insiemi cioè il modello ottenuto iterativamente attraverso l'operazione di potenza e soddisfa la cosiddetta ipotesi di combinabilità:

$$\forall x \exists \alpha (x \in R(\alpha))$$

cioè la proposizione "ogni insieme è combinabile" (ossia qualsiasi insieme deve trovarsi su qualche livello della gerarchia combinabile). Se ammettiamo simboli di classe nel nostro linguaggio e indichiamo con ON la classe dei numeri ordinali, allora possiamo definire la classe:

$$\mathcal{R} := \bigcup_{\alpha \in ON} R(\alpha)$$

cioè la collezione di tutti e soli gli insiemi combinabili di von Neumann. Allora l'ipotesi di combinabilità diventerà semplicemente l'equazione:

$$V = \mathcal{R}.$$

Come è noto l'ipotesi di von Neumann equivale all'assioma di fondazione, AF, e quindi la dimostrazione di noncontraddittorietà relativa di $V = \mathcal{R}$ rispetto a **ZF** fornisce di fatto la noncontraddittorietà dell'assioma di fondazione.

8.1.1. Proprietà del modello $\mathcal{R}$

Il modello dei combinabili possiede una serie di interessanti proprietà strutturali. Essendo $\mathcal{R}$ una gerarchia, è possibile fissare per ogni insieme di $\mathcal{R}$ un livello minimo della gerarchia in cui esso compare, cioè il suo *rango*. Più formalmente, diremo che: se $x \in \mathcal{R}$ allora:

$$rk(x) := min\{\alpha \in ON : x \in R(\alpha+1)\},$$

dove $rk(x)$ indica il rango dell'insieme x. Si possono quindi dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\forall\alpha(R(\alpha) \subseteq R(\alpha+1))$

2. $\forall\alpha(R(\alpha) \in R(\alpha+1))$

3. $\forall\alpha\forall\beta(\alpha \leq \beta \rightarrow (R(\alpha) \subseteq R(\beta)))$

4. $\overline{\overline{R(\omega)}} = \overline{\overline{\omega}} = \aleph_0$

5. $\forall\alpha(\overline{\overline{R(\alpha)}} < \overline{\overline{R(\alpha+1)}})$

6. $\forall n(n < \omega \wedge n \neq 0 \rightarrow \overline{\overline{R(\omega+n)}} \neq \overline{\overline{\omega+n}})$

7. Per ogni ordinale α, $R(\alpha)$ è un insieme transitivo[231]

8. $\mathcal{R}$ è una classe transitiva

9. $\forall x(x \in \mathcal{R} \leftrightarrow x \subseteq \mathcal{R})$.

Gödel diede la sua dimostrazione di noncontraddittorietà, dapprima, definendo una gerarchia strutturalmente molto simile a quella di von Neumann, utilizzando un modello interno semantico e poi, nella monografia del 1940, sfruttando invece un modello sintattico.

8.2. Gli insiemi costruibili: il modello semantico

Nel suo *1939a* Gödel definisce una struttura, la gerarchia degli insiemi costruibili o in breve la gerarchia costruibile, mediante una funzione L definita per recursione transfinita dalla classe degli ordinali sulla classe di tutti gli insiemi, come segue:

$$\begin{aligned} L(0) &:= \emptyset \\ L(\alpha+1) &:= \mathcal{D}(L(\alpha)) \\ L(\xi) &:= \bigcup_{\beta<\xi} L(\beta), \end{aligned}$$

dove α e β denotano ordinali qualsiasi, ξ denota un ordinale limite qualsiasi e $\mathcal{D}(L(\alpha))$ indica la collezione di tutti i sottoinsiemi di $L(\alpha)$ elementarmente

[231] Dove un insieme o una classe si dice *transitiva* se gli elementi dei suoi elementi sono ancora suoi elementi.

definibili in **ZF**, con parametri in $L(\alpha)$. Come si vede, $L(0)$ e $L(\xi)$ vengono definiti esattamente come nel caso della gerarchia dei combinabili, la differenza sta tutta nella seconda clausola definitoria dove, anzichè prendere tutti i sottoinsiemi di $L(\alpha)$ si considerano soltanto i sottoinsiemi *predicativamente definibili* di $L(\alpha)$. Proprio questa clausola relativa alla predicatività delle definizioni ammesse spiega il motivo per cui in vari luoghi Gödel afferma che la gerarchia dei costruibili si ottiene a partire dalla gerarchia ramificata dei tipi di Russell se estesa ad ordini transfiniti.

Nel suo **1939b* Gödel si sofferma con particolare attenzione sull'eredità russelliana presente nella definizione della gerarachia costruibile. L'idea di base della gerarchia ramificata, spiega l'autore, è quella di definire dapprima i numeri reali nel cui *definiens* non occorrono quantificazioni sui numeri reali. Questi reali costituiranno un certo insieme $\mathbb{R}_1$. Poi si definirà l'insieme $\mathbb{R}_2$ di tutti i reali nel cui *definiens* occorrono solo quantificatori limitati a $\mathbb{R}_1$, e così via. Per ottenere gli insiemi costruibili, prosegue Gödel, occorre estendere la procedura russelliana dal finito al transfinito e dalla considerazione dei soli numeri reali a quella di insiemi qualsiasi.

La gerarchia degli insiemi costruibili presenta, da un lato, un carattere decisamente costruttivo, il fatto di basarsi su di un'operazione di "potenza predicativa" in analogia con la gerarchia dei tipi ramificati di Russell, e, dall'altro, un elemento altrettanto marcatamente non-costruttivo, il fatto di ammettere livelli transfiniti arbitrariamente alti.

8.2.1. Proprietà della gerarchia dei costruibili

Dopo aver introdotto la gerarchia come indicato sopra, Gödel ne esplora le caratteristiche fondamentali, enunciando le seguenti proprietà:[232]

1. $\forall\alpha(L(\alpha) \subseteq L(\alpha+1))$
2. $\forall\alpha(L(\alpha) \in L(\alpha+1))$
3. $\forall\alpha\forall\beta(\alpha < \beta \rightarrow L(\alpha) \subset L(\beta)$
4. $\forall\alpha(L(\alpha) \subseteq R(\alpha))$
5. Se α è un ordinale infinito, allora $\overline{\overline{L(\alpha+1)}} = \overline{\overline{L(\alpha)}}$

[232]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pagg. 139-140.

6. Se α è un ordinale infinito, allora $\overline{\overline{L(\alpha)}} = \overline{\overline{\alpha}}$.

Le prime tre proposizioni rivelano caratteri di grande somiglianza strutturale fra la gerarchia costruibile e quella di von Neumann. D'altro canto le proposizioni 6 e 7 mettono altrettanto bene in evidenza il fatto che la linea di confine che distingue nettamente le due gerarchie è fornita dalla considerazione delle cardinalità.

La prima proposizione dice che i livelli della gerarchia costruibile costituiscono una catena non-decrescente rispetto alla relazione $\subseteq$. Ciò è dovuto al fatto che ogni elemento $a \in L(\alpha)$ può esser definito mediante la formula:

$$x \in L(\alpha)$$

che, chiaramente, è elementarmente definibile su $L(\alpha + 1)$.

Il secondo risultato afferma che i livelli della gerarchia sono ordinati linearmente dalla relazione $\in$. Questo è dimostrabile considerando che $L(\alpha)$ è elementarmente definito su $L(\alpha + 1)$ dalla formula:

$$x = x.$$

La terza proposizione, secondo cui la gerarchia costruibile è ordinata linearmente dalla relazione di inclusione stretta $\subset$, segue dalle prime due.

La quinta proposizione dice che nel passaggio da un livello infinito a quello immediatamente superiore la cardinalità non cambia. Questa asserzione stabilisce una distinzione molto forte fra la gerarchia costruibile e quella combinabile dove la cardinalità di un livello transfinito $R(\alpha)$, in virtù del teorema di Cantor è strettamente inferiore a quella del livello transfinito immediatamente superiore. La dimostrazione di questa asserzione dipende dal fatto che il numero degli elementi di $L(\alpha)$ è minore o uguale al numero delle formule elementarmente definibili su $L(\alpha)$, e dal fatto che ci sono tante formule elementarmente definibili su $L(\alpha)$ quanti sono gli elementi di $L(\alpha)$.[233]

Dall'ultima parte dell'argomento precedente segue la proposizione 6 e dalla proposizione 5 segue facilmente la 4. Dalla proposizione 6 segue poi che il primo livello non-numerabile della gerarchia costruibile è $L(\omega_1)$.

[233] Ciò a sua volta segue dal fatto che ogni formula elementarmente definibile su $L(\alpha)$ è una combinazione finita di simboli per elementi di $L(\alpha)$ e di un numero finito di altri simboli (logici, descrittivi, ausiliari) e che il numero di queste combinazioni è uguale al numero degli elementi combinati cioè a $\overline{\overline{L(\alpha)}}$.

8.2.2. Definizioni

Le definizioni fondamentali delle due nozioni di “insieme costruibile” e di “ordine di un dato insieme costruibile” presenti in *Gödel *1939b* sono le stesse date in *Gödel 1939a*, tuttavia nella lezione di Göttigen esse vengono spiegate molto più esaustivamente.

a) Un insieme x si dice *costruibile* se esiste un ordinale α (arbitrariamente grande) tale che:
$$x \in L\left(\alpha\right).$$

b) Dato un insieme x il più piccolo α tale che $x \in L\left(\alpha\right)$ deve avere la forma $\beta + 1$. Chiamiamo β *l'ordine* di x, in simboli:
$$\beta = od(x).$$

Gödel aggiunge due importanti osservazioni, che sono poi due corollari della definizione b):

1) $L\left(\alpha\right)$ è l'insieme degli insiemi costruibili di ordine strettamente minore di α:
$$L(\alpha) = \left\{x \in L(\gamma) : \gamma \in ON \wedge od(x) < \alpha\right\}.$$

2) L'insieme degli insiemi costruibili di ordine esattamente α è dato da:
$$L\left(\alpha + 1\right) - L\left(\alpha\right).$$

La spiegazione di questa seconda osservazione è particolarmente interessante:[234]

> In breve, essi [gli insiemi costruibili di ordine α] sono gli insiemi che vengono aggiunti, come nuovi, all'α-esimo passo. Come si può vedere immediatamente, questi insiemi aggiunti come nuovi hanno al massimo tipo α, poiché $L \subset \mathcal{R}$. Ma fra essi occorreranno anche insiemi di tipo inferiore che possono essere definiti soltanto mediante insiemi di tipo superiore.

[234]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 141.

8.2.3. $L(\omega_\omega)$ e $L(\iota)$ sono modelli di ZC e ZFC

Di tutti gli articoli dedicati al modello semantico degli insiemi costruibili solo in *Gödel 1939a* viene brevemente affrontata la verifica del fatto che gli insiemi costruibili soddisfano gli assiomi della teoria degli insiemi. Qui Gödel stabilisce che già il livello ω_ω della gerarchia costruibile soddisfa gli assiomi di **ZC**, il sistema di *Zermelo 1908a* più l'assioma di scelta. Per ottenere anche un modello di **ZFC** l'autore considera il livello ι della gerarchia costruibile dove ι è il primo cardinale inaccessibile. Ossia, egli enuncia il seguente:

Teorema. La classe $L(\iota)$ è un modello di **ZFC**.

Il fatto che $L(\iota)$ soddisfi gli assiomi di estensionalità e di fondazione è una banale conseguenza del fatto che $L(\iota)$ è una classe transitiva e ben-fondata. L'assioma dell'infinito è soddisfatto per il semplice fatto che $\omega \in L(\iota)$. Gli assiomi della coppia, dell'unione e della potenza si verificano facilmente utilizzando la funzione ordine *od*. Le principali difficoltà si presentano nella verifica del fatto che $L(\iota)$ soddisfa gli assiomi di separazione e di rimpiazzamento, ma si tratta di particolari tecnici, tanto è vero che Gödel sorvola su queste due verifiche affermando che esse si risolvono in modo analogo ai casi di coppia, unione e potenza.[235]

8.2.4. L'assioma di costruibilità

Come, nel caso della gerarchia dei combinabili di von Neumann, si ipotizzava che tutti gli insiemi fossero combinabili, così, l'ipotesi che Gödel intende avanzare per il modello dei costruibili è che tutti gli insiemi siano costruibili. Si tratta di un *principio di minimalità* sulla base del quale per ogni insieme x esiste un certo livello α della gerarchia costruibile cui x appartiene, ossia esiste una formula elementare con parametri in $L(\alpha)$ che definisce x. In un sistema come **ZF**, l'assioma avrà la seguente forma:

$$\forall x \exists \alpha (x \in L(\alpha)).$$

Analogamente all'ipotesi di combinabilità, in un sistema formale come **GD** in cui è possibile parlare di classi, avremo che l'universo di tutti gli insiemi

[235] Per uno svolgimento completo della dimostrazione di questo teorema di vedano *Cohen 1966*, *Krivine 1971* e *Jech 1978*. Per alcune considerazioni introduttive si veda *Solovay 1990*.

costruibili sarà esprimibile come la classe:

$$L := \bigcup_{\alpha \in ON} L(\alpha)$$

e di conseguenza l'assioma di costruibilità assumerà la semplice forma della seguente equazione:

$$V = L.$$

In *Gödel 1938* l'autore introduce l'assioma di costruibilità dicendo che il modello degli insiemi costruibili consta di tutti gli insiemi matematicamente costruibili in modo predicativo. In tale modello, spiega Gödel, è soddisfatta la proposizione "ogni insieme è costruibile". In questa sede egli aggiunge che l'assioma di costruibilità costituisce un "naturale completamento" di **ZF** in quanto "determina in modo definito la vaga nozione di insieme infinito arbitrario".[236] Come si vede, nella prima comunicazione dei suoi risultati di noncontraddittorietà, Gödel esprime nei confronti dell'assioma di costruibilità una posizione simile a quella che nel 1928 von Neumann aveva assunto rispetto all'assioma di fondazione. Di fatto, da un punto di vista storico la noncontraddittorietà relativa di AF è sempre stata interpretata in modo del tutto differente dalla noncontraddittorietà dell'assioma di costruibilità infatti l'assioma di fondazione è stato visto per lo più come un'ipotesi intuitivamente facile da accettare in quanto capace di eliminare certe forme di "circolarità" insiemistica. Lo stesso Gödel, come osservato sopra, cambierà diametralmente idea a proposito dello statuto aletico dell'assioma di costruibilità tanto è vero che in *Gödel 1947* e poi in *Gödel 1964* questo principio viene considerato "falso" e in generale inadeguato come possibile completamento della teoria assiomatica degli insiemi.

In *Gödel 1939a* l'assioma di costruibilità viene introdotto senza commenti[237] come la proposizione "non esiste alcun insieme non-costruibile".

In *Gödel *1939b* troviamo alcune interessanti considerazioni sull'assioma di costruibilità che ne mettono molto bene in evidenza significato e rilevanza. L'autore osserva[238] che la nozione di costruibilità, come ogni altra nozione insiemistica, deve essere relativizzata a un certo modello della teoria degli insiemi. Come la numerabilità di un dato insieme può essere valutata solo

[236]Cf. *Gödel 1938* in *Gödel 1990*, pag. 27.
[237]E senza prese di posizione rispetto al suo statuto epistemologico e aletico.
[238]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 133.

all'interno di un dato modello, così anche la sua costruibilità è valutabile solo relativamente a un certo modello della teoria degli insiemi.

Gödel spiega quindi che, come dal fatto che un insieme sia numerabile in un dato modello non segue che quell'insieme sia *attualmente* numerabile, così, in linea di principio, dal fatto che un insieme sia costruibile in un certo modello non si ha necessariamente che quell'insieme sia perciò *attualmente* costruibile. Tuttavia, aggiunge l'autore, di fatto "il concetto di costruibilità ha una certa proprietà di invarianza".[239]

In particolare, spiega Gödel, il concetto di costruibilità non cambia se relativizzato al modello degli insiemi costruibili e di conseguenza si ha che gli insiemi costruibili dentro il modello degli insiemi costruibili e gli insiemi *attualmente* costruibili sono gli stessi. Da ciò segue anche che nel modello degli insiemi costruibili vale l'assioma di costruibilità.

Nelle ultime righe di questa conferenza Gödel fa un'interessante osservazione che mette in evidenza un cambiamento di prospettiva rispetto all'articolo del 1938. L'autore afferma che l'assioma di costruibilità sembra essere intrinsecamente interessante dal momento che potrebbe trattarsi di una proposizione "assolutamente indecidibile".[240] Per Gödel questo assioma potrebbe cioè giocare un ruolo analogo a quello del quinto postulato di Euclide, creando una biforcazione della teoria degli insiemi in due sistemi. Questa posizione è anche molto diversa da quella espressa in *Gödel 1947* e in *Gödel 1964* dove la situazione epistemologica della teoria degli insiemi viene esplicitamente distinta da quella delle geometrie. Di fatto, a partire per lo meno dalla seconda metà degli anni Quaranta, Gödel assumerà una posizione marcatamente realista e fondazionalista rispetto alla teoria degli insiemi, sulla base della quale l'assioma di costruibilità *non può* essere "assolutamente indecidibile". Il punto di vista dell'autore sull'assioma di costruibilità dopo il 1945 contemplerà esclusivamente la possibilità di verificarne la verità o falsità sulla base di un opportuno completamento assiomatico della teoria degli insiemi.

Anche in *Gödel *1940a* troviamo un'interessante osservazione relativa alla nozione di costruibilità che Gödel vuole distinguere da quella di definibilità dal momento che essa "non coincide completamente col significato intuitivo della definibilità".[241] L'autore nota come l'assioma di costruibilità possa

[239]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 133.
[240]Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 155.
[241]Cf. *Gödel *1940a*, pag. 176.

sembrare problematico rispetto agli altri assiomi della teoria degli insiemi in quanto contenente la nozione metamatematica di costruibilità. Con implicito riferimento alla gödelizzazione, Gödel afferma che si è mostrato come "proposizioni metamatematiche possano essere tradotte in proposizioni matematiche"[242] e che di conseguenza l'assioma di costruibilità e la sua noncontraddittorietà rispetto agli assiomi della teoria degli insiemi possono essere considerate come proposizioni matematicamente sensate.

Come in *Gödel *1939b* anche nella lezione inedita del '40 viene proposta una caratterizzazione informale della nozione di assolutezza che troverà una precisazione formale solo nella monografia del 1940. L'autore osserva che,[243] sebbene ci si possa aspettare che l'assioma di costruibilità sia valido nel modello degli insiemi costruibili, ciò non è affatto banale: come un dato insieme che sia numerabile in un modello $\mathcal{M}_1$ può risultare essere non-numerabile in un altro modello $\mathcal{M}_2$, così un un insieme costruibile in V potrebbe non esserlo in L. In tal senso, spiega Gödel, uno dei passaggi fondamentali della dimostrazione di noncontraddittorietà dell'assioma di costruibilità consisterà nel far vedere che la nozione di costruibilità "ha una certa proprietà di invarianza rispetto a differenti modelli".[244]

8.3. $L(\iota)$ è un modello di GCH: la strategia semantica

In *Gödel *1939b*[245] l'autore affronta la dimostrazione di noncontraddittorietà dell'ipotesi generalizzata del continuo, limitandosi dapprima a discutere il problema della soddisfacibilità dell'ipotesi (semplice) del continuo nel modello semantico $L(\iota)$.

A tal fine egli porta l'esempio del livello $L(\omega)$ della gerarchia costruibile. Gödel si chiede quanti siano i sottoinsiemi costruibili di $L(\omega)$ e osserva che sicuramente gli elementi di $L(\omega+1)$ sono tutti sottoinsiemi costruibili di $L(\omega)$. Egli nota che anche gli elementi di $L(\omega + 2)$ possono, in linea di principio, essere sottoinsiemi costruibili di $L(\omega)$ e che quindi in generale è possibile che esistano sottoinsiemi costruibili di $L(\omega)$ di ordine arbitrariamente alto.

Di fatto, aggiunge l'autore, si può verificare che l'ordine dei sottoinsiemi di $L(\omega)$ non è arbitrariamente alto, ma ha un ben preciso confine superiore. E' infatti possibile dimostrare il seguente:

[242] Cf. *Gödel *1940a* in *Gödel 1995*, pag. 170.
[243] Cf. *Gödel *1940a* in *Gödel 1995*, pag. 177.
[244] Cf. *Gödel *1940a* in *Gödel 1995*, pag. 177.
[245] Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pagg. 141-143.

Teorema fondamentale. L'ordine di ogni sottoinsieme costruibile di $L(\omega)$ è un ordinale della seconda classe, cioè è un ordinale minore di ω_1.

Intuitivamente questo risultato, che a detta dello stesso Gödel è il punto cruciale di tutta la dimostrazione di noncontraddittorietà,[246] significa che se la costruzione dei livelli della gerarchia costruibile prosegue oltre $L(\omega_1)$ non troviamo più in essa nuovi sottoinsiemi costruibili di $L(\omega)$. Con questo teorema la nozione di insieme costruibile trova la sua completa precisazione tanto è vero che, come osserva l'autore, esso può essere letto così: "Un sottoinsieme x di $L(\omega)$ è costruibile se c'è un numero α della seconda classe numerica tale che $x \in L(\alpha)$".[247] Dal teorema fondamentale segue immediatamente il seguente:

Corollario. Esistono *al massimo* $\aleph_1$ insiemi costruibili di numeri naturali.

Per l'assioma di costruibilità si ha che la classe $L(\iota)$ è ben-ordinata e quindi ogni cardinale minore di ι sarà un $\aleph$. Dunque per il teorema di Cantor avremo la seguente:

Proposizione. Esistono *almeno* $\aleph_1$ insiemi costruibili di numeri naturali.

Dalla proposizione e dal corollario segue che nel modello interno di **ZF** costituito dalla classe $L(\iota)$ vale l'ipotesi del continuo e di conseguenza che CH *è noncontraddittoria rispetto agli assiomi di* **ZF**.

Dal momento che il teorema fondamentale è dimostrabile anche nella forma generalizzata a tipi superiori avremo inoltre che *ogni sottoinsieme costruibile di $L(\omega_\alpha)$ ha ordine minore di $\omega_{\alpha+1}$*. Dunque anche l'ipotesi generalizzata del continuo è soddisfatta in $L(\iota)$ e perciò GCH *è noncontraddittoria rispetto agli assiomi di* **ZF**.

La dimostrazione del teorema fondamentale in *Gödel *1939b* ripercorre fedelmente, anche se in maniera più dettagliata, la dimostrazione svolta in *Gödel 1939a*.

L'idea di base è la seguente. Consideriamo un sottoinsieme m di $L(\omega)$ che sia costruibile, cioè tale che esista un ordinale α per cui $m \in L(\alpha)$. In linea di principio l'ordinale α può essere arbitrariamente alto. Ora, se vogliamo che l'ordine di m sia minore di ω_1 deve essere possibile individuare un insieme K che contenga m, sia numerabile ed inoltre sia isomorfo ad un segmento

[246] E costituisce un analogo dell'assioma di riducibilità di Russell.

[247] Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 143.

iniziale degli insiemi costruibili. Formalmente parlando dobbiamo dimostrare l'esistenza di un insieme K tale che:

(i) $\overline{\overline{K}} = \aleph_0$,

(ii) esistano un ordinale η e una funzione h da K su $L(\eta)$ tali che h sia un isomorfismo di K e $L(\eta)$ rispetto alla relazione di appartenenza,

(iii) $m \in K$ e $L(\omega) \subseteq K$.

Come spiega l'autore a pagina 147 del *Vortrag Göttingen*, l'insieme m, essendo costruibile per ipotesi, dovrà comparire in qualche livello della gerarchia L. In linea di principio esso potrebbe comparire per la prima volta in un livello $L(\alpha)$ per α molto grande cioè "la costruzione di m potrebbe basarsi su un numero molto grande di predecessori da definirsi prima che m possa essere definito".[248] Tuttavia, aggiunge Gödel, di fatto è possibile dimostrare che dalla totalità dei "predecessori di m" si può isolare un insieme K che gode delle proprietà (i)-(iii) di cui sopra. Chiaramente, osserva l'autore, dall'esistenza di un tale insieme K segue che m ha ordine minore di ω_1.

La dimostrazione consterà essenzialmente di tre passaggi.
Per prima cosa vengono introdotte le *nozioni* di formula definitoria $\varphi_\alpha(x)$ di un dato insieme costruibile m, di forma normale skolemiana $\forall u \exists v M(u, v, x)$ di tale formula[249] ed infine di funzione di Skolem designata $f_{\varphi_\alpha, x}$ per tale formula.

In secondo luogo si dimostra che, *se* esiste una classe K con le tre proprietà di cui sopra, *allora* l'ordine di m è minore di ω_1. L'argomento di Gödel procede come segue. Per la clausola (iii), $m \in K$. Per la clausola (ii), m viene associato, tramite l'isomorfismo h ad un certo elemento $h(m) \in L(\eta)$. Naturalmente $od(h(m)) < \omega_1$ infatti, per (i) e (ii), si ha che:

$$\overline{\overline{L(\beta)}} = \aleph_0$$

e quindi $\eta < \omega_1$. Poiché, per (iii), $L(\omega) \subseteq K$ e chiaramente $L(\omega) \subseteq L(\eta)$ avremo che per ogni $x \in L(\omega)$, $h(x) = x$ e quindi per ogni $x \in L(\omega)$:

$$x \in h(m) \leftrightarrow x \in m.$$

Dunque il sottoinsieme m deve avere ordine minore di ω_1.

[248] Cf. *Gödel *1939b* in *Gödel 1995*, pag. 147.

[249] Dove $M(u, v, x)$ è priva di quantificatori.

Infine, e questa è la parte più complessa della dimostrazione, si mostra *l'esistenza* della classe K con le tre proprietà richieste. A tal fine si definiscono simultaneamente tre classi: K, O (intuitivamente: la classe di ordinali costituita da tutti gli ordini degli elementi di K) e F (intuitivamente: una certa classe di funzioni di Skolem). Formalmente $K \cup O \cup F$ viene definito come il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti proprietà di chiusura:

1. $m \in K$ e $L(\omega) \subseteq K$;

2. se $x \in K$, allora l'ordine di x appartiene a O, ossia:
$$x \in K \Rightarrow od\,(x) \in O;$$

3. se $x \in K$, allora le costanti occorrenti nella definizione $\varphi_\alpha(x)$ di x, in breve $cost(\varphi_\alpha(x))$, appartengono a K, ossia:
$$x \in K \;\;\Rightarrow\;\; cost(\varphi_\alpha(x)) \in K;$$

4. se $\alpha \in O$ e le costanti occorrenti in $\varphi_\alpha\,(x)$ appartengono a K, allora $x \in K$, in simboli:
$$\alpha \in O,\; cost(\varphi_\alpha(x)) \in K \;\;\Rightarrow\;\; x \in K;$$

5. se $\alpha \in O$, le costanti occorrenti in $\varphi_\alpha\,(x)$ appartengono a K e $y \in K$, allora le funzioni di Skolem designate di $\varphi_\alpha\,(y)$ appartengono ad F, in simboli:
$$\alpha \in O,\; cost(\varphi_\alpha(x)) \in K,\; y \in K \;\;\Rightarrow\;\; \overrightarrow{f}_{\varphi_\alpha, y} \in F;$$

6. se $h \in F$ e $x_1, ..., x_n \in K$, allora $h\,(x_1, ..., x_n) \in K$;

7. se $x, y \in K$ e $x - y$ è non-vuoto, allora il primo (cioè il più piccolo) elemento di $x - y$ appartiene a K, ossia:
$$x, y \in K,\; x - y \neq \emptyset \;\;\Rightarrow\;\; min(x - y) \in K.$$

Gödel considera quindi l'insieme $K \cup O \cup F$: ciascuna delle condizioni 2-7 dice che questo insieme è chiuso sotto una certa operazione. Dunque $K \cup O \cup F$ è il più piccolo insieme che include $L\,(\omega) \cup \{m\}$ ed è chiuso sotto le operazioni

2-7. Dal momento che le operazioni 2-7 sono tutte valutate su domini al massimo numerabili e che la chiusura di un insieme infinito di cardinalità κ sotto un numero finito di operazioni valutate al più numerabilmente è $\leq \kappa$, allora $K \cup O \cup F$ è numerabile, di conseguenza K è numerabile e quindi è soddisfatta la condizione (i) di cui sopra. K soddisfa banalmente il requisito (iii) sulla base della condizione di chiusura 1. La dimostrazione del fatto che K soddisfa anche il requisito (ii) di cui sopra è abbastanza laboriosa e riposa essenzialmente sulla possibilità di enumerare gli elementi di O consecutivamente per mezzo di un segmento iniziale della classe dei numeri ordinali.

Questa in sintesi la strategia dimostrativa utilizzata da Gödel nel *Vortrag Göttingen*. Come si sarà notato si tratta di un approccio piuttosto intuitivo, ma poco costruttivo. Probabilmente per questa ragione egli elaborò una dimostrazione "sintattica", la quale, pur perdendo parte dell'immediatezza della strategia vista sopra, presenta tuttavia un alto grado di costruttività.

9. Il modello sintattico

9.1. Le operazioni fondamentali

Nel V paragrafo di *Gödel 1940* l'autore propone una caratterizzazione della gerarchia costruibile del tutto nuova rispetto a quella che abbiamo visto nel capitolo precedente. Si tratta sempre di un modello interno della teoria degli insiemi, ma in questo caso, anziché di una struttura extralinguistica, si ha a che fare con un modello sintattico.[250] In *Gödel 1940* l'autore spiega che le classi e gli insiemi del modello costruibile **L** formano una sottofamiglia delle classi e degli insiemi di **GD** e che la relazione di appartenenza $\in$ in **L** è l'usuale operazione di appartenenza $\in$ ristretta alle classi e agli insiemi del modello **L**.

Gödel aggiunge che gli insiemi costruibili in **L** saranno definiti come gli insiemi ottenibili mediante iterate applicazioni delle operazioni espresse dagli assiomi A4 e B1-B8 del sistema **GD**. Ciò vuol dire che gli insiemi costruibili sono quelli ottenibili con iterate applicazioni delle seguenti otto operazioni fondamentali:[251]

$$\begin{aligned}
\Im_1(X,Y) &= \{X,Y\} \\
\Im_2(X,Y) &= E \cap X \\
\Im_3(X,Y) &= X - Y \\
\Im_4(X,Y) &= X \cap (V \times Y) \\
\Im_5(X,Y) &= X \cap dom(Y) \\
\Im_6(X,Y) &= X \cap Y^{-1} \\
\Im_7(X,Y) &= X \cap cnv_2 Y \\
\Im_8(X,Y) &= X \cap cnv_3 Y.
\end{aligned}$$

L'autore considera la classe $9 \times ON^2$ cioè la classe delle triple ordinate $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ dove $i < 9$ e α, β sono variabili per ordinali e su di essa definisce una relazione

[250] Per una spiegazione esaustiva del termine "sintattico" in questa sede si veda *Dalla Chiara 1968*. Di fatto questo modello potrebbe anche essere definito come il "modello algebrico" in quanto è basato sull'individuazione di un certo numero di operazioni su insiemi.

[251] E indica la relazione di appartenenza considerata estensionalmente come una collezione di coppie ordinate. Come sopra $dom(Y)$ e $cod(Y)$ indicano, rispettivamente, il dominio e il codominio di Y, ON la classe dei numeri ordinali, $-$ il complemento, $\cap$ l'intersezione, $\times$ il prodotto cartesiano, $^{-1}$ l'inverso, cnv_2 la seconda conversa, cnv_3 la terza conversa.

di buonordinamento S.[252] L'idea di Gödel è quella di ordinare tutti gli insiemi costruibili per mezzo di una sorta di "ipercubo" costituito da otto copie delle classe ON^2, assegnando ad ogni copia una delle otto operazioni fondamentali $\Im_1, ..., \Im_8$.

E' possibile dimostrare che la classe (propria) $9 \times ON^2$ è isomorfa alla classe ON rispetto alle relazioni S ed E e dunque che esiste una funzione biettiva J che mappa $9 \times ON^2$ su ON in modo tale che:[253]

$$\langle i, \alpha, \beta \rangle \, \mathrm{S} \, \langle j, \gamma, \delta \rangle \Rightarrow J` \langle i, \alpha, \beta \rangle \in J` \langle j, \gamma, \delta \rangle .$$

Si possono quindi definire le seguenti nove operazioni su ON^2:

$$\begin{array}{rcl}
J_0` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 0, \alpha, \beta \rangle \\
J_1` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 1, \alpha, \beta \rangle \\
J_2` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 2, \alpha, \beta \rangle \\
J_3` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 3, \alpha, \beta \rangle \\
J_4` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 4, \alpha, \beta \rangle \\
J_5` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 5, \alpha, \beta \rangle \\
J_6` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 6, \alpha, \beta \rangle \\
J_7` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 7, \alpha, \beta \rangle \\
J_8` \langle \alpha, \beta \rangle & = & J` \langle 8, \alpha, \beta \rangle .
\end{array}$$

Chiaramente per due interi positivi $i, j < 9$:

$$cod\,(J_i) \cap cod\,(J_j) = \emptyset$$

ed inoltre:

$$\bigcup_{0 \leq i \leq 8} cod\,(J_i) = ON.$$

Intuitivamente abbiamo quindi che i codomini delle funzioni $J_1, ..., J_8$ costituiscono una partizione di ON. Dunque è possibile definire due funzioni

[252] Dato l'usuale ordine lessicografico Le su ON^2, si definisce la *relazione quasi-lessicografica* R su ON^2 come segue: $\langle \alpha, \beta \rangle \, \mathrm{R} \, \langle \gamma, \delta \rangle$ sse $((\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}) \vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \langle \alpha, \beta \rangle \, \mathrm{Le} \, \langle \gamma, \delta \rangle))$. Si dimostra che R è un buon ordinamento di ON^2. Si definisce poi la *relazione gödeliana* S su $\left(9 \times ON^2\right)^2$ come segue: per $i, j < 9$, $\langle i, \alpha, \beta \rangle \, \mathrm{S} \, \langle j, \gamma, \delta \rangle$ sse $((\langle \alpha, \beta \rangle \, \mathrm{R} \, \langle \gamma, \delta \rangle) \vee (\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \gamma, \delta \rangle \wedge i < j)$. Si dimostra che S è un buonordinamento di $9 \times ON^2$.

[253] Come sopra $f`x$ indica il valore di f per x e $f``x$ l'immagine di x tramite f.

K_1, K_2 su ON tali che:

$$\begin{aligned} K_1`J_i` \langle \alpha, \beta \rangle &= \alpha, \\ K_2`J_i` \langle \alpha, \beta \rangle &= \beta. \end{aligned}$$

E' ora possibile definire, per recursione transfinita, una funzione F su ON in termini delle nove funzioni J_i, delle due funzioni K_1, K_2 e delle otto operazioni fondamentali $\Im_1, ..., \Im_8$ come segue:[254]

$$\begin{aligned}
\alpha \in cod\,(J_0) &\Rightarrow F\,(\alpha) = cod\,(F \upharpoonright \alpha) \\
\alpha \in cod\,(J_1) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_1\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_2) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_2\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_3) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_3\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_4) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_4\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_5) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_5\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_6) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_6\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_7) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_7\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha))) \\
\alpha \in cod\,(J_8) &\Rightarrow F\,(\alpha) = \Im_8\,(F\,(K_1\,(\alpha))\,, F\,(K_2\,(\alpha)))\,.
\end{aligned}$$

Intuitivamente abbiamo che la funzione F associa ad ogni ordinale α un certo insieme costruibile, sulla base del fatto che α appartenga ad una delle nove classi di equivalenza individuate dai codomini di $J_1, ..., J_8$.

Si può quindi dimostrare che la funzione F esiste ed è univocamente determinata. Si verifica inoltre che la funzione F riflette le otto operazioni fondamentali introdotte sopra, cioè si possono dimostrare le seguenti proposizioni:

1. $F\,(J_1`\,\langle \alpha, \beta \rangle) = \{F\,(\alpha)\,, F\,(\beta)\}$

2. $F\,(J_2`\,\langle \alpha, \beta \rangle) = E \cap F\,(\alpha)$

3. $F\,(J_3`\,\langle \alpha, \beta \rangle) = F\,(\alpha) - F\,(\beta)$

4. $F\,(J_4`\,\langle \alpha, \beta \rangle) = F\,(\alpha) \cap (V \times F\,(\beta))$

5. $F\,(J_5`\,\langle \alpha, \beta \rangle) = F\,(\alpha) \cap dom\,(F\,(\beta))$

6. $F\,(J_6`\,\langle \alpha, \beta \rangle) = F\,(\alpha) \cap F\,(\beta)^{-1}$

[254] $F \upharpoonright \alpha$ indica qui la restrizione del dominio della funzione F all'ordinale α.

7. $F\left(J_7`\langle\alpha,\beta\rangle\right) = F\left(\alpha\right) \cap cnv_2(F\left(\beta\right))$
8. $F\left(J_8`\langle\alpha,\beta\rangle\right) = F\left(\alpha\right) \cap cnv_3(F\left(\beta\right))$.

9.2. Definizioni

A questo punto, sulla base della funzione F, Gödel è in grado di riformulare in modo ancora più preciso di quanto non si potesse fare con l'approccio semantico, tutte le definizioni riguardanti il modello degli insiemi costruibili.

a) Un insieme x si dice *costruibile* se esiste un α tale che:

$$x = F\left(\alpha\right).$$

b) La classe degli insiemi costruibili, in simboli L, è la collezione delle F-immagini di ON, ossia $L = F``ON$ oppure:

$$L = cod\left(F\right).$$

c) Una classe X si dice *costruibile* se tutti i suoi elementi sono insiemi costruibili e se l'intersezione di X con un qualsiasi insieme costruibile è, a sua volta, un insieme costruibile, in simboli:

$$\mathcal{L}(X) := (X \subseteq L \wedge \forall y(y \in L \rightarrow (y \cap X \in L))).$$

d) Il più piccolo α tale che $x = F\left(\alpha\right)$ è detto l'*ordine* di x. In simboli:

$$od(x) = min\left\{\alpha \in ON : x = F(\alpha)\right\}.$$

E' possibile dimostrare che, se $x \in y$ e $x, y \in L$, allora $od(x) < od(y)$, e quindi che:

$$x \in F(\alpha) \;\;\Rightarrow\;\; od(x) < \alpha.$$

In sintesi, la gerarchia dei costruibili verrà ora definita per recursione transfinita, come segue:

$$\begin{array}{rcl} L\left(0\right) & := & \emptyset \\ L\left(\alpha+1\right) & := & F``L\left(\alpha\right) \\ L\left(\xi\right) & := & \bigcup\limits_{\beta<\xi} L\left(\beta\right), \end{array}$$

dove ξ è un ordinale limite e $F``L\left(\alpha\right)$ sta per l'immagine dell'insieme $L\left(\alpha\right)$ tramite F.

9.3. Relativizzazione e assolutezza

Come anticipato sopra, negli scritti relativi alla caratterizzazione semantica del modello degli insiemi costruibili la nozione di assolutezza viene introdotta e spiegata solo informalmente. Questo fondamentale strumento di studio modellistico della teoria degli insiemi viene invece precisato assieme alla nozione di relativizzazione in *Gödel 1940*.

Verso la fine del V capitolo Gödel spiega che nel modello **L** degli insiemi e delle classi costruibili:[255]

1. *classe* significa classe costruibile, in simboli:

$$(\mathcal{C}(X))^{\mathbf{L}} := \mathcal{L}(X);$$

2. *insieme* significa insieme costruibile, in simboli:

$$(\mathcal{M}(X))^{\mathbf{L}} := X \in L;$$

3. la *relazione di appartenenza* $\in^{\mathbf{L}}$ è la relazione $\in$ di L confinata a classi costruibili, in simboli:

$$E^{\mathbf{L}} := E \restriction L^2.$$

L'autore introduce poi nuove variabili per insiemi costruibili $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ e nuove variabili per classi costruibili $\overline{X}$,$\overline{Y}$,$\overline{Z}$. E' quindi possibile *relativizzare* (intuitivamente: tradurre) tutte le relazioni, le operazioni e le classi del sistema **GD** al modello **L** rimpiazzando nella loro definizione le variabili x, y, z con $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, le variabili X, Y, Z con $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, $\in$ con $\in^{\mathbf{L}}$, tutte le nozioni precedentemente definite con le corrispondenti *relativizzate* e lasciando invariati i simboli logici.

L'autore nota che non necessariamente la *relativizzata* di una nozione definita in **GD** deve esistere; potrebbe infatti accadere che il teorema che ne stabilisce l'esistenza e unicità non sia dimostrabile in **GD**. Se la relativizzata di una certa classe A esiste, la si denota col simbolo $A^{\mathbf{L}}$. Analogamente per operazioni, relazioni e formule.

Gödel definisce la nozione di *assolutezza* per classi, operazioni, predicati e variabili come segue:[256]

[255] Cf. *Gödel 1940* in *Gödel 1990*, pag. 68.
[256] Cf. *Gödel 1940* in *Gödel 1990*, pag. 76.

a. una *classe* A si dice assoluta se esiste la relativizzata $A^{\mathbf{L}}$ e $A^{\mathbf{L}} = A$;

b. un'*operazione* n-aria U si dice assoluta se esiste la relativizzata $U^{\mathbf{L}}$ e per ogni $\overline{X_1}, ..., \overline{X_n}$,

$$U^{\mathbf{L}}(\overline{X_1}, ..., \overline{X_n}) = U(\overline{X_1}, ..., \overline{X_n});$$

c. un *predicato* n-ario P si dice assoluto se esiste il relativizzato $P^{\mathbf{L}}$ e per ogni $\overline{X_1}, ..., \overline{X_n}$,

$$P^{\mathbf{L}}(\overline{X_1}, ..., \overline{X_n}) \leftrightarrow P(\overline{X_1}, ..., \overline{X_n});$$

d. una *variabile* v si dice assoluta se il dominio di definizione di $v^{\mathbf{L}}$ è lo stesso del dominio di definizione di v.

In sostanza l'assolutezza è quella proprietà di cui godono quelle nozioni che sono invarianti rispetto alla relativizzazzione ossia che restano immutate se si passa dall'universo ad un suo sottomodello e viceversa.

Nella monografia Gödel completa la sua analisi delle nozioni assolute del sistema **GD** osservando che non tutte le nozioni introdotte fino a quel punto sono assolute: ad esempio l'operazione di potenza $\wp$ e la classe totale V non si possono dimostrare essere assolute.

9.4. L è un modello del sistema formale GD

In *Gödel 1940*[257] l'autore spiega che, per dimostrare che **L** è un modello di **GD** e cioè che gli assiomi di **GD** valgono in **L**, occorre innanzitutto mostrare che ogni nozione e operazione che occorre negli assiomi dei gruppi A-D è assoluta e poi, servendosi di questo risultato, mostrare che in **GD** sono deducibili i relativizzati a **L** dei suoi propri assiomi (e quindi che gli assiomi di **GD** sono assoluti rispetto a **L**).

Nel capitolo V della monografia Gödel mostra attraverso una lunga successione di lemmi che tutte la nozioni che compaiono negli assiomi di **GD** sono assolute per **L** cioè invarianti da L a V. Come nota l'autore, questo facilita la verifica del fatto che **L** è un modello di **GD** dal momento che nel formulare gli assiomi di **GD** relativizzati a **L** tutte le nozioni assolute restano invariate. Di conseguenza gli assiomi di **GD** relativizzati a **L** risultano quasi

[257]Cf. *Gödel 1990*, pag. 68.

identici a quelli originali. Per fare qualche esempio avremo che (A1)$^{\mathbf{L}}$ avrà la forma:

$$\forall\overline{x}\mathcal{L}(\overline{x}).$$

L'assioma (B1)$^{\mathbf{L}}$ avrà la forma:

$$\exists\overline{X}\forall\overline{y}\forall\overline{z}(\langle\overline{y},\overline{z}\rangle\in\overline{X}\leftrightarrow\overline{y}\in\overline{z}).$$

L'assioma (C1)$^{\mathbf{L}}$ cioè l'assioma dell'infinito relativizzato a $\mathbf{L}$ sarà:

$$\exists\overline{x}(\exists\overline{y}(\overline{y}\in\overline{x})\land\forall\overline{z}(\overline{z}\in\overline{x}\rightarrow\exists\overline{v}(\overline{v}\in\overline{x}\land\overline{z}\subset\overline{v}))).$$

Infine l'assioma di fondazione relativizzato, (D)$^{\mathbf{L}}$, avrà la forma:

$$\forall\overline{X}(\overline{X}\neq\emptyset\rightarrow\exists\overline{z}(\overline{z}\in\overline{X}\land(\overline{z}\cap\overline{X}=\emptyset))).$$

Consideriamo quindi, a titolo di esempio, la verifica degli assiomi qui sopra relativizzati svolti in *Gödel 1940*.

(A1)$^{\mathbf{L}}$ segue facilmente dal fatto che la classe L è transitiva. Dunque ogni insieme costruibile è un sottoinsieme di L e dal momento che l'intersezione di due insiemi costruibili è costruibile, ogni insieme è una classe costruibile.

(B1)$^{\mathbf{L}}$ si verifica come segue. Si consideri la classe $\overline{X}=E\cap L$. $\overline{X}$ è una classe costruibile come si verifica facilmente per la transitività di L. Inoltre si ha che $\langle\overline{y},\overline{z}\rangle\in E\leftrightarrow\overline{y}\in\overline{z}$ e $\langle\overline{y},\overline{z}\rangle\in L$. Dunque come volevasi:

$$\langle\overline{y},\overline{z}\rangle\in\overline{X}\leftrightarrow\overline{y}\in\overline{z}.$$

(C1)$^{\mathbf{L}}$ è verificato per $\overline{x}=F`\omega$. In base alle definizioni delle funzioni $J_i$ si ha che per ogni ordinale $\alpha$, $\omega_\alpha\in cod(J_0)$. In particolare si ha quindi che $\omega\in cod(J_0)$ da cui si ha che $F`\omega=F``\omega$. Se $\overline{y}\in\overline{x}$ (cioè se $\overline{y}=F`n$, per $n<\omega$) sia $m>n$ un intero in $cod(J_0)$ e sia $\overline{z}=F`m$; allora si ha che $\overline{z}\in\overline{x}$ e $\overline{y}\subset\overline{z}$, dal momento che $F`m=F``m$ e $F`n\subseteq F``m$. D'altro canto $F`n\in F``m$, ma naturalmente $F`n\notin F`n$ e quindi $F`n\subset F`m$.

(D)$^{\mathbf{L}}$ segue facilmente dall'assioma D. Per D, infatti si ha che, $\forall X\exists y(y\in X\land(y\cap X=\emptyset))$ ed in particolare per una classe costruibile $\overline{X}$ avremo che $\exists y(y\in\overline{X}\land(y\cap\overline{X}=\emptyset))$. Ora, dal momento che per definizione una classe X è costruibile se $X\subseteq L$ e se inoltre $\forall y(y\in L\rightarrow(y\cap X\in L))$ allora avremo che, poiché $y\in\overline{X}$, y è costruibile. Dunque $\exists\overline{y}(\overline{y}\in\overline{X}\land(\overline{y}\cap\overline{X}=\emptyset))$.

Una volta dimostrato che tutti gli assiomi di **GD** valgono in **L** sappiamo che tutti i teoremi dimostrati nel sistema (senza usare l'assioma di scelta) sono validi, compresi i teoremi di esistenza e unicità con cui si sono definite classi e operazioni. Di conseguenza a questo punto è possibile affermare che esiste la relativizzata di ogni nozione precedentemente introdotta.

9.5. L è un modello dell'assioma di costruibilità

Com'è stato anticipato sopra, nel sistema assiomatico **GD** l'assioma di costruibilità, esprimibile in **ZF** con la formula universale:

$$\forall x \exists \alpha \, (x \in L(\alpha)) \, ,$$

può essere espresso mediante l'equazione:

$$V = L$$

dove V è la classe totale e L è la classe degli insiemi costruibili.

In **GD** si dimostra piuttosto facilmente l'equazione:

$$V^{\mathbf{L}} = L.$$

La classe $V^{\mathbf{L}}$ è infatti definita univocamente dalla formula $\forall \overline{x}(\overline{x} \in V^{\mathbf{L}})$. Questa formula è soddisfatta da **L** e quindi:

$$\forall \overline{x}(\overline{x} \in V^{\mathbf{L}} \leftrightarrow \overline{x} \in L).$$

Poiché **L** soddisfa l'assioma di estensionalità per classi e poiché L è una classe costruibile otteniamo quindi $V^{\mathbf{L}} = L$.

Dunque per dimostrare che $V = L$ vale nel modello **L**, cioè che in **GD** è derivabile la proposizione $V^{\mathbf{L}} = L^{\mathbf{L}}$,[258] basta dimostrare che la classe L è assoluta e cioè che:

$$L^{\mathbf{L}} = L.$$

A tal fine è sufficiente mostrare che tutti gli "ingredienti" usati nella costruzione di L sono assoluti. Di fatto si può dimostrare il seguente:

Teorema. Se la classe A è definita dalla proposizione φ_A e se tutte le variabili e i concetti (classi, operazioni, predicati) che compaiono in φ_A sono assoluti, allora anche A è assoluta.

Detto questo è evidente che la dimostrazione della validità dell'assioma di costruibilità in **L** si riduce ad una lunga serie di verifiche di assolutezza per le nozioni occorrenti nella definizione di L cioè, poiché $L = cod(F)$, per l'operazione *cod* e per le classi S,J, K_1, K_2, F.

Nel capitolo VII di *Gödel 1940*, viene dimostrata l'assolutezza delle seguenti nozioni:

[258] Ossia $(V = L)^{\mathbf{L}}$.

- l'operazione binaria di prodotto cartesiano $\times$;
- le relazioni $X^2, X^3, ...$ per ogni classe X;
- i predicati unari *Rel* e Rel_3 cioè "essere una relazione binaria" ed "essere una relazione ternaria";
- l'operazione unaria *dom* di dominio;
- l'operazione binaria $\cap$ di intersezione;
- le operazioni unarie cnv_2 e cnv_3 di seconda e terza conversa;
- l'operazione binaria $\upharpoonright$ di restrizione;
- l'operazione unaria *cod* di codominio;
- l'operazione binaria $X``Y$ di immagine;
- l'operazione binaria $X - Y$ di differenza;
- l'operazione binaria $\cup$ di unione;
- le operazioni binarie $\Im_1, ...\Im_8$;
- l'operazione binaria $X`Y$ di valore;
- il predicato unario Tra, "essere transitivo";
- il predicato unario Ord, "essere un ordinale";
- il predicato unario On, "essere un numero ordinale";
- il predicato unario fun, "essere una funzione";
- la classe ON dei numeri ordinali;
- le relazioni d'ordine $<$ e $\leq$ fra numeri ordinali;
- l'operazione unaria $\bigcup$ di riunione;
- il buonordinamento *quasi-lessicografico* R di ON^2;
- il buonordinamento *gödeliano* S di $9 \times ON^2$;

- l'isomorfismo J fra $9 \times ON^2$ e ON;

- le funzioni $J_0, J_1, ..., J_8$;

- le funzioni K_1 e K_2;

- la funzione F.

Dall'assolutezza di F e di *cod* si ottiene l'assolutezza di L e quindi la dimostrabilità in **GD** del relativizzato dell'assioma di costruibilità. Si ha quindi che $L^{\mathbf{L}} = L$ e di conseguenza $V^{\mathbf{L}} = L^{\mathbf{L}}$. Di fatto, ciò che Gödel dimostra è che: *se esiste un modello di* **GD**, *allora esiste anche un modello di* $\mathbf{GD} \cup \{V = L\}$. Di conseguenza si ha anche che, se fosse possibile ottenere una contraddizione da $\mathbf{GD} \cup \{V = L\}$, allora quella contraddizione sarebbe già dimostrabile in **GD**. Dunque si è ottenuto che: *se* **GD** *è noncontraddittorio, allora anche* $\mathbf{GD} \cup \{V = L\}$ *è noncontraddittorio* e quindi che $V = L$ *è noncontraddittorio relativamente agli assiomi di* **GD**.

9.6. L è un modello di AC^V e di GCH

Per dimostrare che l'assioma di scelta (universale) e l'ipotesi (generalizzata) del continuo valgono nel modello sintattico **L** degli insiemi e delle classi costruibili e di conseguenza non sono refutabili sulla base degli assiomi di **GD**, si dimostra[259] che queste due proposizioni seguono dall'assioma di costruibilità. Si tratta di verificare che:

$$\mathbf{GD} \cup \{V = L\} \vdash \mathsf{AC}^V \tag{1}$$

e che:

$$\mathbf{GD} \cup \{V = L\} \vdash \mathsf{GCH}. \tag{2}$$

9.6.1. Noncontraddittorietà dell'assioma di scelta universale

Nel capitolo VIII del suo *1940*[260] Gödel osserva che la proposizione (1) è un'immediata conseguenza del fatto che la classe L può essere benordinata mediante una funzione *as* la quale, in qualsiasi insieme costruibile x, isola

[259]Come d'altronde nella dimostrazione semantica.
[260]Cf. *Gödel 1990*, pag. 87.

l'elemento di ordine minimo. Per l'assioma di costruibilità si ha quindi che vale AC^V e in particolare AC. La funzione as viene così definita:

$$\langle x, y\rangle \in as \leftrightarrow y \in x \wedge \forall z\left((od\,(z) < od\,(y)) \rightarrow z \notin x\right).$$

Intuitivamente, per ogni x costruibile, $as(x)$ è "l'elemento designato di x" cioè "l'elemento di x di ordine minimo". A partire da as è possibile definire una funzione C su ON la quale, ad ogni ordinale α associa l'ordine dell'elemento designato di $F(\alpha)$, ossia:

$$C(\alpha) := od(as(F(\alpha))).$$

Si noti che la funzione as vista come classe di coppie ordinate è una sottoclasse di $V \times V$ che rappresenta un buon-ordinamento dell'universo V.

9.6.2. Noncontraddittorietà di GCH

La dimostrazione della proposizione (2) in *Gödel 1940* si basa sullo stesso lemma fondamentale di *Gödel *1939a* ma è molto più dettagliata e, visto l'approccio sintattico e costruttivo, viene tralasciata ogni considerazione sul significato intuitivo dei passaggi fatti. Manca inoltre qualsiasi riferimento alle funzioni di Skolem, così centrali nella dimostrazione semantica.

La dimostrazione consta di una serie di lemmi che, attraverso una catena di implicazioni, dimostrano il seguente:

Teorema fondamentale. Se si assume l'assioma di costruibilità $V = L$, allora:

$$\wp\left(F``\omega_\alpha\right) \subseteq F``\omega_{\alpha+1}.$$

Intuitivamente il teorema dice che: l'insieme di tutti i sottoinsiemi del livello ω_α della gerarchia costruibile è incluso nel livello di cardinalità immediatamente successiva. Questo teorema può forse essere espresso più semplicemente come segue: si assuma che ogni insieme sia costruibile; per ogni insieme x, se x è un sottoinsieme di $F``\omega_\alpha$, allora l'ordine di x è strettamente minore di $\omega_{\alpha+1}$.

Dal teorema fondamentale segue l'ipotesi generalizzata del continuo infatti, sappiamo che, per ogni ordinale α:

$$\overline{\overline{F``\omega_\alpha}} = \overline{\overline{\omega_\alpha}} = \aleph_\alpha$$

dunque avremo che:

$$2^{\aleph_\alpha} = \overline{\overline{\wp(\omega_\alpha)}} = \overline{\overline{\wp(F``\omega_\alpha)}} \leq \overline{\overline{F``\omega_{\alpha+1}}} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Poiché, per il teorema di Cantor, si ha che:

$$2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha,$$

si ha anche che:

$$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}.$$

Quindi si avrà che:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Il teorema fondamentale segue dalla seguente:

Proposizione. Se $m \subseteq ON$ è chiuso rispetto alle operazioni $C, K_1, K_2, J_1, ..., J_8$ e se inoltre G è un isomorfismo da m su un certo ordinale γ rispetto alla relazione $\in$, allora si ha che:

$$\forall\alpha\forall\beta(\alpha \in m \wedge \beta \in m \rightarrow (F`\alpha \in F`\beta \leftrightarrow F`G`\alpha \in F`G`\beta)).$$

Questa proposizione segue a sua volta dai seguenti tre risultati ausiliari:

Lemma 1. Se $m \subseteq ON$ è chiuso rispetto alle operazioni $K_1, K_2, J_1, ..., J_8$ e se inoltre G è un isomorfismo da m su un certo ordinale γ rispetto alla relazione $\in$, allora si ha che:

1) G è un isomorfismo per $J_1, ..., J_8$ ossia, se $\alpha, \beta \in m$ e $i < 9$, allora

$$J_i` \langle G`\alpha, G`\beta \rangle = G`J_i` \langle \alpha, \beta \rangle ;$$

2) γ è chiuso rispetto a $J_1, ..., J_8$.

Lemma 2. Se $m_1, m_2 \in ON$ sono entrambi chiusi rispetto a $K_1, K_2, J_1, ..., J_8$ e se inoltre G è un isomorfismo di m_1 su m_2 allora si ha che per $\alpha, \beta \in m_1$ e per $i < 9$:

$$J_i` \langle G`\alpha, G`\beta \rangle = G`J_i` \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Lemma 3. Se $m_1, m_2 \in ON$ sono entrambi chiusi rispetto a $C, K_1, K_2, J_1, ..., J_8$ e se inoltre G è un isomorfismo di m_1 su m_2, allora si ha che per $\alpha, \beta \in m_1$:

1) $F`\alpha \in F`\beta \leftrightarrow F`G`\alpha \in F`G`\beta$ e
2) $F`\alpha = F`\beta \leftrightarrow F`G`\alpha = F`G`\beta$.

Rimandiamo a *Gödel 1940*[261] e a *Takeuti et Zaring 1971*[262] per le dimostrazioni di questi tre lemmi e concludiamo invece questa presentazione schematica della dimostrazione di noncontraddittorietà relativa di GCH mostrando che la Proposizione implica il Teorema fondamentale.

Sia x un sottoinsieme di $F``\omega_\alpha$. Chiaramente:

$$x \in \wp(F``\omega_\alpha).$$

Per $V = L$ abbiamo che x è costruibile cioè esiste un ordinale δ tale che:

$$x = F`\delta.$$

Consideriamo ora l'insieme $\omega_\alpha \cup \{\delta\}$ e chiamiamo m la *chiusura* di $\omega_\alpha \cup \{\delta\}$ rispetto a $C, K_1, K_2, J_1, ..., J_n$ (cioè il più piccolo insieme chiuso rispetto a $C, K_1, K_2, J_1, ..., J_n$ che include $\omega_\alpha \cup \{\delta\}$ come sottoinsieme). Si può dimostrare che: *se X è un insieme infinito e $R_1, ..., R_n$ sono relazioni univoche a destra, allora la chiusura di X rispetto a $R_1, ..., R_n$ esiste, è un insieme ed ha la stessa cardinalità di X.* Dunque in particolare avremo che m è un insieme ed ha cardinalità $\aleph_\alpha$. Inoltre, essendo un insieme di ordinali, m è ben-ordinato dalla relazione di appartenenza $\in$ ed è isomorfo a qualche numero ordinale γ (si può dimostrare infatti che *ON e quindi ogni classe di numeri ordinali è ben-ordinata dalla relazione* $\in$ e che *se un insieme x è ben ordinato da $\in$ allora x è isomorfo a un ordinale rispetto a* $\in$). Indichiamo con G l'isomorfismo che sussiste fra m e γ. Avremo quindi che:

$$G``m = \gamma.$$

Poiché m e G soddisfano le ipotesi della Proposizione di cui sopra avremo che per ogni $\alpha, \beta \in m$:

$$F`\alpha \in F`\beta \ \leftrightarrow \ F`G`\alpha \in F`G`\beta.$$

Consideriamo $G`\delta$. Dal momento che, per definizione, $\delta \in m$ avremo quindi che $G`\delta \in \gamma$ cioè che $G`\delta < \gamma$. Essendo G un isomorfismo e quindi in particolare una biezione avremo che:

$$\overline{\overline{\gamma}} = \overline{\overline{m}} = \omega_\alpha.$$

[261] Pagg. 88-96.
[262] Pagg. 143-174.

Dunque avremo che $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ e quindi che:

$$G`\delta < \omega_{\alpha+1}.$$

Abbiamo inoltre che per ogni ordinale $\beta \in m$:

$$F`\beta \in F`\delta \leftrightarrow F`G`\beta \in F`G`\delta.$$

Per definizione $\omega_\alpha \subseteq m$ ed inoltre, essendo un ordinale, ω_α è transitivo. Dunque ω_α è un segmento iniziale di m. Di conseguenza ω_α viene messo in corrispondenza, tramite G, con un segmento iniziale di γ. Ora, si può dimostrare che: *ogni segmento iniziale di un ordinale è un ordinale*. Dunque, di fatto, ω_α viene messo in corrispondenza biunivoca, tramite G, con un ordinale. Poiché è noto che: *se esiste un'isomorfismo rispetto a $\in$ fra due ordinali allora questo isomorfismo è l'identità*, avremo quindi che $G \upharpoonright \omega_\alpha$ è un'applicazione isomorfa di ω_α su ω_α. Detto altrimenti abbiamo che:

$$\beta \in \omega_\alpha \rightarrow G`\beta = \beta.$$

Dunque per ogni $\beta \in \omega_\alpha$:

$$F`\beta \in F`\delta \leftrightarrow F`\beta \in F`G`\delta$$

ovvero:

$$F`\delta \cap F``\omega_\alpha = F`G`\delta \cap F``\omega_\alpha.$$

Ma per ipotesi $F`\delta = x$ e $x \subseteq F``\omega_\alpha$, dunque:

$$F`\delta = F`G`\delta \cap F``\omega_\alpha.$$

Poiché si può dimostrare che: *ogni ordinale iniziale appartiene al codominio di J_0*, allora avremo che:

$$\omega_\alpha \in cod(J_0).$$

Si può inoltre dimostrare che, per ogni ordinale β:

$$\beta \in cod(J_0) \rightarrow F`\beta = F``\beta.$$

Avremo quindi in particolare che:

$$F``\omega_\alpha = F`\omega_\alpha$$

e quindi che:

$$x = F`\delta = F`G`\delta \cap F`\omega_\alpha.$$

Chiaramente:

$$od(F``\omega_\alpha) < \omega_{\alpha+1}$$

ed essendosi mostrato sopra che $G`\delta < \omega_{\alpha+1}$ si ha anche che:

$$od(F`G`\delta) < \omega_{\alpha+1}.$$

Dunque, poichè *l'intersezione di due insiemi di ordine minore di un certo ordinale iniziale ha ancora ordine minore di quell'ordinale iniziale*:

$$od(x) < \omega_{\alpha+1}$$

e quindi come volevasi dimostrare:

$$x \in F``\omega_{\alpha+1}.$$

In una nota aggiunta nel 1951 al testo del '40 Gödel fa un'interessante commento sulla dimostrazione. Egli osserva[263] che la dimostrazione di noncontraddittorietà relativa di GCH può essere estesa a **GDC** più l'assioma dei cardinali inaccessibili o l'assioma dei cardinali di Mahlo, dal momento che ciascuno di questi due assiomi forti dell'infinito implica la propria forma relativizzata al modello dei costruibili. Con ciò l'autore sembra voler sottolineare il fatto che, anche estendendo la teoria degli insiemi con certi assiomi forti dell'infinito, la noncontraddittorietà relativa di GCH non viene a cadere.

[263]Cf. *Gödel 1940* in *Gödel 1990*, pag. 97.

10. Definibilità in termini di ordinali

Gödel discusse compiutamente la nozione di "definibilità in termini di ordinali" nella conferenza per il secondo bicentenario dell'università di Princeton del 1946, pur avendola già definita informalmente nel 1940.[264] In quel breve intervento pubblicato per la prima volta in *Davis 1965* l'autore sollevava la questione del sorprendente fatto che la nozione di Turing-calcolabilità o di ricorsività generale risulta essere indipendente dal linguaggio nel quale viene formulata, cosa che invece non si verifica nei casi altrettanto importanti di dimostrabilità e definibilità.

Nel tentativo di determinare una nozione assoluta di definibilità Gödel propone di considerare una nozione di definibilità in termini di ordinali ossia la nozione di "definibilità mediante espressioni contenenti nomi di numeri ordinali e costanti logiche, compresa la quantificazione su insiemi".[265] L'autore congettura che gli *insiemi definibili in termini di ordinali* costituiscano un modello della teoria degli insiemi, ma di fatto non è così, innanzitutto per il fatto che la classe OD degli insiemi definibili in termini di ordinali non è transitiva e quindi non soddisfa l'assioma di estensionalità.

E' tuttavia possibile considerare una sottoclasse di OD, la classe HOD degli *insiemi ereditariamente definibili in termini di ordinali*, la quale risulta essere un modello della teoria degli insiemi e non solo. Gödel non sviluppò mai i particolari tecnici della nozione di "ordinal-definability" cosa che fu invece fatta negli anni Sessanta soprattutto ad opera di Dana Scott e John Myhill.[266]

Cercheremo ora di descrivere tecnicamente le tre nozioni di *definibilità*, *definibilità in termini di ordinali* e *costruibilità* lungo una stessa linea concettuale che ne metta in rilievo le caratteristiche peculiari. Questa operazione ci consentirà inoltre di presentare in una forma più moderna e sistematica alcune nozioni, come quella di assolutezza, che fino ad ora ci siamo limitati ad estrapolare dai testi gödeliani con un approccio per lo più storico-filologico e descrittivo.

[264]Cf. *Gödel *1940a.*

[265]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 151.

[266]Cf *Myhill et Scott 1971* in *Scott 1971.*

10.1. Definibilità

Informalmente parlando possiamo dire che un insieme x è *definibile* se e solo se esiste una certa formula $\varphi(y)$ con la sola variabile libera x tale che:

$$\forall y(\varphi(y) \leftrightarrow y = x).$$

Il problema di una definizione di questo tipo è sostanzialmente il rischio di incorrere in paradossi della definibilità analoghi al celebre paradosso di Richard. A tal fine occorre specificare sempre un ambito di termini all'interno del quale un dato insieme risulta definibile, ossia occorre *relativizzare* opportunamente la definizione.

Definizione 1. Sia M una certa classe. Per qualsiasi formula φ definiamo per induzione φ^M, la *relativizzazione* di φ a M, come segue:

1.1. $(x \in y)^M := (x \in y)$
1.2. $(x = y)^M := (x = y)$
1.3. $(\varphi \wedge \psi)^M := (\varphi^M \wedge \psi^M)$
1.4. $(\varphi \vee \psi)^M := (\varphi^M \vee \psi^M)$
1.5. $(\varphi \rightarrow \psi)^M := (\varphi^M \rightarrow \psi^M)$
1.6. $(\exists x\varphi)^M := \exists x(x \in M \wedge \varphi^M)$
1.7. $(\forall x\varphi)^M := \forall x(x \in M \rightarrow \varphi^M)$.

Intuitivamente avremo che φ^M sta per "φ è vera in M".

Definizione 2. Siano M, N due classi. Sia φ una formula tale che:

$$FV(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}.$$[267]

2.1. Se $M \subseteq N$, diciamo che φ è *assoluta per M, N* se e solo se:

$$\forall x_1 \in M ... \forall x_n \in M(\varphi^M(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, ..., x_n)).$$

2.2. Diciamo che φ è *assoluta per M* se e solo se φ è assoluta per M, V o equivalentemente se e solo se:

$$\forall x_1 \in M ... \forall x_n \in M(\varphi^M(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n)).$$

[267]Dove $FV(\varphi)$ indica l'insieme delle variabili libere occorrenti nella formula φ.

In base alle due definizioni appena esposte è possibile dimostrare che: se φ è una formula priva di quantificatori, allora φ è assoluta per qualsiasi classe M.

Sulla base della nozione di relativizzazione è inoltre possibile formalizzare in modo rigoroso la nozione di definibilità. L'idea è quella di fissare il numero n delle variabili libere delle possibili formule definitorie di un dato insieme e la classe M degli oggetti all'interno della quale tali variabili andranno interpretate. Chiamiamo quindi $Df(n, M)$ la collezione dei sottoinsiemi Y di M^n tali che per qualche formula φ con n variabili libere:

$$Y = \{\langle x_1, ..., x_n \rangle : \varphi^M(x_1, ..., x_n)\}.$$

Per poter formalizzare entro **ZF** la nozione di definibilità esistono due possibili approcci. Il primo, basato sulla nozione di "definibilità elementare", necessita di due operazioni preliminari molto laboriose, cioè della gödelizzazione entro **ZF** della sintassi e della semantica di **ZF**. Queste due operazioni sono anche necessarie se si vuole svolgere nel dettaglio la verifica del fatto che il modello semantico degli insiemi costruibili soddisfa gli assiomi di **ZF** e l'assioma di costruibilità.[268]

Il secondo approccio, quello utilizzato da Gödel nella monografia del '40, consiste invece nella codifica della nozione logica di definibilità elementare in termini di un certo numero di operazioni su classi.

Qui di seguito esporremo le linee essenziali di una terza strategia dovuta a *Kunen 1980*[269] che, pur essendo equivalente al primo dei due approcci visti sopra, ha il vantaggio di essere più sintetica e maneggevole da un punto di vista tecnico. Essa consiste nel definire la collezione delle relazioni n-arie su una certa classe M definibili mediante n variabili libere relativizzate ad M, $Df(n, M)$, come il più piccolo insieme di relazioni su M contenente le relazioni:

$$\left\{\langle x, y \rangle \in M^2 : x \in y\right\}$$

e

$$\left\{\langle x, y \rangle \in M^2 : x = y\right\}$$

e chiuso rispetto alle operazioni di intersezione, complemento e proiezione. Formalmente avremo la seguente:

[268]Probabilmente il fatto che negli articoli gödeliani sulla caratterizzazione semantica della gerarchia costruibile la verifica degli assiomi venga tralasciata può derivare proprio dalla volontà di evitare questo lungo e noioso processo di codifica.

[269]Cf. in particolare i capitoli V e VI, pagg. 152-183.

Definizione 3. Siano $n \in \omega$ e $i, j < n$:

3.1. $\Pi(n, M, R) := \{x \in M^n : \exists y \in R(y \upharpoonright n = x)\}$

3.2. $\Delta_{\in}(n, i, j, M) := \{x \in M^n : p_i`x \in p_j`x\}$[270]

3.3. $\Delta_{=}(n, i, j, M) := \{x \in M^n : p_i`x = p_j`x\}$

3.4. Per recursione su $k < \omega$ definiamo $D(k, n, M)$ come:

3.4.1. $D(0, n, M) := \{\Delta_{\in}(n, i, j, M) : i, j < n\} \cup \{\Delta_{=}(n, i, j, M) : i, j < n\}$

3.4.2. $D(k+1, n, M) := D(k, n, M) \cup \{M^n - R : R \in D(k, n, M)\} \cup \{R \cap S : R, S \in D(k, n, M)\} \cup \{\Pi(n, M, R) : R \in D(k, n+1, M)\}$

3.5. $Df(n, M) := \bigcup \{D(k, n, M) : k \in \omega\}$.

Definiamo quindi una funzione di enumerazione $En(m, n, M)$ la quale, intuitivamente, associa ad ogni tripla $\langle m, n, M\rangle$, dove $m, n \in \omega$ e M è una certa classe non-vuota, un certo elemento della classe $Df(n, M)$ sulla base della scomposizione in fattori primi di m.

Definizione 4. La funzione $En(m, n, M)$ si definisce per recursione su $m \in \omega$ come segue:

4.1. Se $m = 2^i \cdot 3^j$ per $i, j < n$ allora $En(m, n, M) := \Delta_{\in}(n, i, j, M)$

4.2. Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ per $i, j < n$ allora $En(m, n, M) := \Delta_{=}(n, i, j, M)$

4.3. Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$ allora $En(m, n, M) := M^n - En(i, n, M)$

4.4. Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, allora $En(m, n, M) := En(i, n, M) \cap En(j, n, M)$

4.5. Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, allora $En(m, n, M) := \Pi(n, M, En(i, n+1, M))$

4.6. Altrimenti, $En(m, n, M) := \emptyset$.

E' possibile dimostrare che la funzione En ci permette di esprimere in **ZF** la nozione di definibilità Df formalizzata dalla definizione 3. Si dimostra infatti il seguente:

Teorema. Per ogni $n \in \omega$, per ogni classe M:

$$Df(n, M) = \{En(m, n, M) : m \in \omega\}.$$[271]

[270] Dove $p_i`x, p_j`x$ indicano, rispettivamente, l'i-esima proiezione di x e la j-esima proiezione di x.

[271] Per la dimostrazione si veda *Kunen 1980*.

Le funzioni Df e En ci consentono, fra le altre cose, di esprimere in **ZF** alcune fondamentali nozioni modellistiche come quella di *sottomodello elementare* ed *equivalenza elementare di due strutture*.

10.2. Definibilità in termini di ordinali

L'idea informale di definibilità in termini di ordinali e più brevemente di *definibilità per ordinali* è la seguente: un insieme x si dice *definibile per ordinali* se e solo se è definibile mediante una qualche successione finita di ordinali cioè se e solo se esistono una formula $\varphi(y, z_1, ..., z_n)$ e una successione di ordinali $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tali che:

$$\forall y(\varphi(y, \alpha_1, ..., \alpha_n) \leftrightarrow y = x).$$

Di conseguenza ogni ordinale sarà banalmente definibile per ordinali. Questa definizione informale necessita però di un'opportuna precisazione che di fatto è stata ottenuta in *Myhill et Scott 1971* nei seguenti termini.

Un insieme x è *definibile per ordinali* se e solo se esistono una formula $\varphi(y, z_1, ..., z_n)$, ordinali $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e un ordinale $\beta > max(rk(x), \alpha_1, ..., \alpha_n)$ tali che si abbia:

$$\forall y \in R(\beta)(\varphi(y, \alpha_1, ..., \alpha_n) \leftrightarrow y = x)^{R(\beta)}$$

dove $R(\beta)$ indica il livello β della gerarchia cumulativa.

Sfruttando la funzione Df definita sopra è possibile esprimere in **ZF** l'enunciato "x è definibile per ordinali in $R(\beta)$" proprio come, nel paragrafo precedente, abbiamo fatto per l'enunciato "x è definibile".

Definizione 1. Un insieme x è *definibile per ordinali*, in simboli, $x \in OD$ se e solo se:

$$\exists \beta > rk(x) \exists n \in \omega \exists w \in \beta^n \exists R \in Df(n+1, R(\beta)) \forall y \in R(\beta)$$

$$(\langle y \rangle * w \in R \leftrightarrow y = x),$$

dove $\langle y \rangle * w$ indica la concatenazione di $\langle y \rangle$ e w.

Questa definizione cattura davvero la definizione informale di *definibilità per ordinali* infatti si può dimostrare che:

Teorema 1. Per ogni formula $\varphi(y, z_1, ..., z_n)$ tale che $FV(\varphi) \subseteq \{y, z_1, ..., z_n\}$ si ha che:

$$\forall x \forall \alpha_1 ... \forall \alpha_n (\forall y (\varphi(y, \alpha_1, ..., \alpha_n) \leftrightarrow y = x) \rightarrow x \in OD).^{272}$$

Si può inoltre definire in analogia con la funzione En che abbiamo visto fornire un'enumerazione di Df, una funzione En_{OD} e dimostrare il seguente

Teorema 2. $OD = \{En_{OD}(\alpha) : \alpha \in ON\}$.[273]

Con questo otteniamo il viceversa del teorema 1 cioè il fatto che:

$$\forall x (x \in OD \rightarrow \exists \alpha \forall y (\varphi(x, \alpha) \leftrightarrow y = x))$$

per un'opportuna formula $\varphi(x, \alpha)$.

Come abbiamo anticipato, nel suo *1946*, Gödel congetturò erroneamente che OD potesse essere un modello di **ZF**. Per ottenere un modello di **ZF** è però sufficiente considerare la collezione HOD degli *insiemi ereditariamente definibili per ordinali* cioè tutti e soli gli insiemi definibili per ordinali tali che i loro membri, i membri dei loro membri, ecc... siano a loro volta definibili per ordinali. Insomma, diremo che l'insieme x è *ereditariamente definibile per ordinali* se e solo se la chiusura transitiva[274] di x è un sottoinsieme di OD. In simboli, avremo che:

$$HOD := \{x \in OD : TC(x) \subseteq OD\}$$

dove $TC(x)$ indica la chiusura transitiva di x. Si può dimostrare che:

$$ON \subseteq HOD \subseteq OD$$

e che HOD è una classe transitiva. Inoltre vale il seguente:

Teorema 3. HOD è un modello di **ZFC**.

In particolare si ha quindi che il modello degli insiemi ereditariamente definibili per ordinali consente di dimostrare la noncontraddittorietà relativa dell'assioma di scelta rispetto agli assiomi di **ZF**.

[272]Per la dimostrazione si veda *Kunen 1980*.
[273]Per la dimostrazione si veda *Kunen 1980*.
[274]Dato un insieme x, la *chiusura transitiva di x* è il più piccolo insieme transitivo contenente x.

10.3. Definibilità predicativa o costruibilità

Abbiamo già ampiamente considerato la costruibilità nei capitoli 8 e 9. Da un punto di vista concettuale, la nozione di costruibilità è molto vicina a quella di definibilità per ordinali ma ha il vantaggio, rispetto a quella, di essere più costruttiva. Inoltre essa consente di risolvere varie questioni insiemistiche aperte, come ad esempio il problema del continuo di Cantor e il problema di Souslin.[275]

Vediamo ora com'è possibile definire la costruibilità in modo analogo a quanto fatto per definibilità e definibilità per ordinali.

Definizione 1. Fissata una classe M, $\mathcal{D}(M)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di M che sono definibili mediante una successione finita di elementi di M con una formula φ relativizzata a M, in simboli, sfruttando di nuovo la funzione Df, avremo che:

$$\mathcal{D}(M) := \{x \subseteq M : \exists n \in \omega \exists y \in M^n \exists R \in Df(n+1, M)$$
$$(x = \{z \in M : \langle z \rangle * y \in R\})\}.$$

Come nel caso della definizione formale della definibilità per ordinali anche in questo caso si può verificare che la definizione data sopra cattura l'idea intuitiva di costruibilità a cui facevamo riferimento. Si dimostra infatti il seguente:

Teorema 1. Se $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$ è una formula qualsiasi del linguaggio di **ZF** tale che $FV(\varphi) = \{x, y_1, ..., y_n\}$, allora, per qualsiasi classe M si ha:

$$\forall y_1 \in M ... \forall y_n \in M(\big\{x \in M : \varphi^M(x, y_1, ..., y_n)\big\} \in \mathcal{D}(M)).$$ [276]

Se definiamo L come nel capitolo 8 cioè come segue:

$$L := \bigcup_{\alpha \in ON} L(\alpha)$$

possiamo ora studiarne le caratteristiche strutturali e confrontarle con quelle di HOD. Come nel caso di HOD e come nel caso della gerarchia di von Neumann abbiamo che L è una classe transitiva. Inoltre si ha che:

$$ON \subseteq L \subseteq OD$$

[275] Sul problema di Souslin si vedano *Devlin 1973* e *Devlin et Johnsbråten 1974*.
[276] Per la dimostrazione si veda *Kunen 1980*.

e quindi che L, così come HOD, è inclusa in OD. Intuitivamente ciò indica il fatto che le due classi L e HOD sono più "piccole" della classe OD. Si dimostra quindi, proprio come nel caso di HOD, il seguente:

Teorema 2. L è un modello di **ZFC**.[277]

Anche se le due classi L e HOD potrebbero sembrare molto simili, questa impressione è però completamente annullata dal fatto che L soddisfa anche l'assioma di costruibilità, l'ipotesi del continuo e la negazione dell'ipotesi di Souslin, mentre tutte e tre queste proposizioni e persino la proposizione $V = HOD$ non sono soddisfatte in HOD. Va osservato che il fatto che valga $(V = L)^L$ ma non $(V = HOD)^{HOD}$ dipende dal fatto che L è assoluta per L cioè invariante da L a V, mentre HOD non è assoluta per HOD. In parole povere, non è dimostrabile che gli insiemi ereditariamente definibili per ordinali in HOD e in V sono gli stessi. Esiste tuttavia una precisa relazione fra l'assioma di costruibilità e $V = HOD$. E' infatti possibile dimostrare il seguente:

Teorema 3. In **ZF** si dimostra che:

$$V = L \to V = HOD.$$

Di conseguenza, come osservato in *Kunen 1980*, la minimalità del modello costruibile ci permette di dimostrare la noncontraddittorietà relativa di

$$V = HOD.$$

Ossia si ha il seguente:

Corollario. Se **ZF** è noncontraddittorio, allora anche **ZF**$\cup \{V = HOD\}$ è noncontraddittorio.

[277] Si noti che nei capitoli 8 e 9 abbiamo stabilito due risultati differenti fra loro e da questo teorema. In 8 abbiamo visto che $L(\iota)$ è un modello di **ZFC** dove ι è il più piccolo cardinale inaccessibile. In 9 abbiamo visto che **L**, costituito dagli insiemi e dalle classi costruibili, è un modello di **GDC**.

11. Il "programma di Gödel"

Nella letteratura contemporanea riguardante la filosofia della matematica[278] ed in particolare la filosofia della teoria degli insiemi viene talvolta indicata come "programma di Gödel" la convinzione gödeliana secondo cui la matematica e specificamente la teoria degli insiemi, in quanto quadro fondazionale per la matematica moderna, necessitano di ampliamenti assiomatici che possano risolvere questioni dimostrabilmente indecidibili sulla base degli assiomi finora usati.

11.1. L'analisi gödeliana del problema del continuo

La prima formulazione chiara e compiuta del "programma di Gödel" si trova in *Gödel 1947* ed è l'esito di una dettagliata analisi del problema del continuo ed in generale della nozione di insieme. La sua esposizione più esaustiva si trova in *Gödel 1964* cioè nella seconda edizione di *Gödel 1947*. In questa sezione useremo entrambe queste fonti nel tentativo di descrivere le idee di fondo di tale programma.

11.1.1. Sulla nozione di insieme

Nella nota 14 del suo *1964* Gödel spiega come il concetto di insieme e la fondamentale operazione di "insieme di" non possano essere definite ma semmai "parafrasate" mediante espressioni come "molteplicità di x", "parte della totalità degli x", "combinazione di un certo numero di x". In tal senso, spiega l'autore, il concetto di insieme andrebbe concepito come "qualcosa che esiste indipendentemente dal fatto di poter essere definito con un numero finito di parole".[279]

Tutta la riflessione gödeliana sulla teoria degli insiemi e la sua interpretazione del problema del continuo di Cantor saranno fortemente condizionati da questa lettura della nozione generale di insieme.

D'altro canto Gödel ammette che, al di là di ogni possibile interpretazione filosofica della nozione di insieme, la caratterizzazione assiomatica di questo concetto è in grado di porre ogni questione insiemistica su un piano di discorso accettabile anche dal più radicale finitista. A pagina 263 di *Gödel 1964* egli afferma che la teoria assiomatica degli insiemi costituisce una formulazione

[278] Cf. ad esempio *Feferman 1996, 1999, 2000* e *Hauser 2002, 2002a*.
[279] Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 180.

del tutto precisa di una nozione ingenua di insieme, sulla base della quale il problema della derivabilità di una certa proposizione dagli assiomi per la teoria degli insiemi può essere trasformato "in un problema puramente combinatorio".

11.1.2. Il problema del continuo è ben posto?

Gödel apre il suo articolo sul problema del continuo dandone due semplici definizioni, una geometrica e l'altra insiemistica. A pagina 176 di *Gödel 1947* possiamo infatti leggere:

> Il problema del continuo di Cantor è semplicemente la questione: quanti sono i punti di una retta nello spazio euclideo? In altri termini, la questione è: quanti insiemi di interi distinti esistono?

La formulazione proposta da Gödel sembra volutamente semplice in modo tale da mettere in evidenza il fatto che ci troviamo di fronte ad un problema matematico ben-posto. Tuttavia, è lo stesso autore a sottolinearlo, per poter affermare con certezza che il problema del continuo è davvero ben-posto occorre prima chiedersi: 1) se abbia senso parlare di quantità infinite o più semplicemente di numeri infiniti e, in secondo luogo, 2) se sia possibile trattare questi numeri infiniti in modo analogo a quelli finiti dandone una notazione univoca ed operando su di essi in modo tale da ottenere un calcolo ed una teoria delle quantità infinite.

Al primo dei due quesiti Gödel risponde affermativamente dicendo che la definizione cantoriana dei cardinali transfiniti è davvero formulata in modo univoco in termini di invarianza su tutte le possibili permutazioni. Inoltre, spiega l'autore, tale definizione consente di estendere nel transfinito l'usuale uguaglianza fra numeri e persino le operazioni aritmetiche ottenendo così un'aritmetica (cardinale) transfinita.

Anche il secondo problema ammette una soluzione positiva nel senso che si può dimostrare che, per ogni numero cardinale, ne esiste uno immediatamente maggiore e che in tal modo si ottengono i numeri cardinali di tutti gli insiemi. Come osserva lo stesso Gödel, la dimostrazione di questo teorema fa uso essenziale dell'assioma di scelta, ma ciò non sarebbe problematico per almeno due ragioni:

(i) AC è dimostrabilmente noncontraddittorio rispetto agli altri assiomi della teoria degli insiemi, e

(ii) AC è tanto "evidente" quanto lo sono gli altri assiomi della teoria degli insiemi.

Questa seconda motivazione ci sembra particolarmente interessante perché, da un lato, evidenzia il fatto che per Gödel l'assioma di scelta è in qualche modo costitutivo della nozione "pura" di insieme, e, dall'altro, è una spia del fatto che la concezione gödeliana dell'evidenza non si riferisce ad un dato immediato ma è qualcosa di complesso e in qualche maniera mediato.

La caratterizzazione dei cardinali data in *Gödel 1947* termina con un breve accenno alla cosiddetta gerarchia degli aleph, ossia al fatto che il teorema del buonordinamento consente di indicizzare ciascun numero cardinale infinito con un numero ordinale.

11.1.3. L'ipotesi del continuo di Cantor

Una volta stabilito che ciascun numero cardinale è un $\aleph$, la soluzione del problema del continuo consisterà nello stabilire quale degli $\aleph$ costituisce la cardinalità di una retta euclidea ossia del continuo.

Gödel ricorda che Cantor, dopo aver dimostrato che tale cardinalità è maggiore di $\aleph_0$, congetturò che fosse uguale ad $\aleph_1$ o, equivalentemente, che ogni sottoinsieme infinito del continuo abbia la cardinalità di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{R}$. Di fatto qui l'autore nomina prima l'ipotesi del continuo (CH) e poi quella che abbiamo chiamato ipotesi debole del continuo (WCH), ma, sulla base dell'assioma di scelta, che egli considera evidente, queste due proposizioni risultano essere dimostrabilmente equivalenti.

Gödel aggiunge che, poiché è dimostrabile che la cardinalità del continuo è uguale a $2^{\aleph_0}$, il problema del continuo consiste, in ultima analisi, nel problema di determinare il valore del più semplice prodotto infinito non-banale. In tal modo l'autore sottolinea il fatto che CH costituisce un'ipotesi di minimalità per l'insieme potenza di un insieme infinito[280] e al tempo stesso una generalizzazione del caso finito a quello infinito.[281]

[280] CH stabilisce infatti che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme della minima cardinalità infinita ($\aleph_0$) sia la più piccola cardinalità consentita dal teorema di Cantor (e cioè la cardinalità infinita immediatamente superiore).

[281] Si dimostra infatti, per un banale teorema aritmetico, che, dato un insieme finito A di cardinalità k, l'insieme $\wp(\mathrm{A})$ di tutti i sottoinsiemi di A avrà cardinalità 2^k.

"Status quaestionis" del problema del continuo

Dopo aver formulato l'ipotesi del continuo Gödel osserva che nonostante siano trascorsi decenni dalla nascita della teoria degli insiemi e nonostante l'evidente rilevanza del problema del continuo,[282] quello che si sa[283] sulla cardinalità di $\mathbb{R}$ è davvero poco. Ossia è noto che:

- $2^{\aleph_0}$ non ha carattere di cofinalità ω;[284]
- l'ipotesi debole del continuo vale per una piccola parte dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e cioè per gli insiemi analitici.[285]

Ben più vasta e ramificata è la nostra ignoranza sulla potenza del continuo, tanto è vero che restano ancora irrisolte le seguenti questioni:

- esiste un qualche $\aleph$ che costituisca un limite superiore per $2^{\aleph_0}$?
- $2^{\aleph_0}$ è un cardinale regolare o singolare?[286]
- la cardinalità del continuo è accessibile o è debolmente inaccessibile?[287]
- ci sono limitazioni, oltre a quella stabilita dal teorema di König, sulla cofinalità del continuo?

Gödel osserva, facendo riferimento all'*Hypothèse du continu* di Sierpiński,[288] che tutto quello che conosciamo è solo un gran numero di conseguenze e di equivalenti[289] di CH. Questa considerazione non è casuale in quanto sembra

[282] Plausibilmente per la precisazione delle nozioni ancora troppo vaghe di "insieme" e di "sottoinsieme di un insieme dato".

[283] Tuttora la situazione non sembra essere mutata essenzialmente.

[284] Ossia: dato un cardinale $\kappa < 2^{\aleph_0}$, il più piccolo numero ν tale che $\Sigma_\nu \kappa = 2^{\aleph_0}$ è diverso da ω, dove $\Sigma_\nu \kappa$ indica la ν-esima sommatoria di κ. Si tratta del risultato ottenuto da Julius König nel 1905, oggi noto come *teorema di König*.

[285] Gli insiemi analitici sono definiti come le proiezioni dei boreliani, dove i boreliani sono la più piccola famiglia di insiemi chiusi di reali chiusa sotto complemento e unione numerabile.

[286] Un cardinale infinito κ si dice *regolare* se $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ dove $\mathrm{cf}(\kappa)$ indica il carattere di cofinalità di κ. Un cardinale infinito κ si dice *singolare* se non è regolare.

[287] Chiamo un cardinale infinito κ *cardinale limite* se per qualche ordinale limite ξ, $\kappa = \aleph_\xi$. Un cardinale infinito κ si dice *debolmente inaccessibile* se è un cardinale limite e regolare. Un cardinale infinito κ si dice *accessibile* se non è debolmente inaccessibile.

[288] Cioè a *Sierpiński 1934*.

[289] Si vedano gli esempi riportati in 6.2.5.

essere basata su di una riflessione piuttosto approfondita sulle conseguenze di CH che avrà come esito la convinzione gödeliana della falsità dell'ipotesi del continuo e quindi dell'assioma di costruibilità.

Secondo l'autore, la nostra ignoranza sulla potenza del continuo sarebbe solo una spia della nostra più vasta ignoranza sui prodotti cardinali infiniti. Ciò risulta evidente, ad esempio, dal fatto che non sappiamo neppure rispondere alle seguenti questioni:

- esiste un cardinale che sia un confine superiore per un certo prodotto infinito di cardinali maggiori di uno?

- il prodotto di $\aleph_0$ copie di 2 è minore del prodotto di $\aleph_1$ copie di 2? ossia $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$?

- se $\aleph_0 < \kappa < \lambda$, si ha che $2^\kappa < 2^\lambda$?

Le osservazioni fatte da Gödel evidenziano la quasi totale mancanza di risultati positivi nella direzione di una soluzione del problema del continuo di Cantor ma, implicitamente, sottolineano il fatto che la debolezza strutturale che caratterizza l'aritmetica cardinale sembra eliminabile solo sulla base di una qualche soluzione del problema del continuo. Di fatto, come mostrano risultati più recenti, assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo, i prodotti cardinali infiniti e, di conseguenza, l'esponenziazione cardinale risulterebbero completamente determinati.[290]

Gödel interpreta questa carenza di conoscenze come un fatto che non può dipendere soltanto da ragioni matematiche ma va ascritto anche a un'insufficienza teoretica relativa alla nozione di insieme.

Analisi assiomatica del problema del continuo

Dopo aver criticato le posizioni intuizionista e predicativista in quanto "distruttive" della teoria degli insiemi e del problema del continuo, Gödel afferma che, da un lato, la nozione di insieme implicita nella gerarchia cumulativa dei tipi non ha mai portato ad alcuna contraddizione e, d'altro canto, la teoria assiomatica degli insiemi costituisce un terreno filosoficamente neutro su cui confrontarsi e tentare di risolvere problemi come quello del continuo.

[290]Si pensi, ad esempio al seguente risultato di Thomas Jech (*Jech 1973*): se si assume GCH, allora si ha che: i) $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$, se $\aleph_\beta <$cf$(\aleph_\alpha)$, ii) $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$, se cf$(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$, iii) $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$, se $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$, dove cf$(\aleph_\alpha) = min\{\kappa : \Sigma_\kappa \lambda = \aleph_\alpha \wedge \lambda < \aleph_\alpha\}$ e $\Sigma_\kappa \lambda$ indica la κ-esima sommatoria di λ.

Dal punto di vista della teoria assiomatica degli insiemi, il problema del continuo si riduce al problema di determinare, assumendo la noncontraddittorietà di **ZF**, se CH sia dimostrabile, refutabile o indecidibile sulla base degli assiomi di **ZF**. Già nel 1947 Gödel riteneva, forse memore dell'osservazione presente in *Skolem 1923a*, che la terza possibilità fosse la più probabile. Le principali ragioni di questa sua convinzione erano le seguenti:

(a) l'indecidibilità di CH sarebbe stata una conferma e una corroborazione della sua congettura secondo la quale le difficoltà nella risoluzione del problema del continuo non erano puramente matematiche;

(b) la sua dimostrazione di noncontraddittorietà di CH aveva già eliminato la seconda possibilità (che gli assiomi potessero refutare CH).

La conferma definitiva della correttezza della sua convinzione circa l'indecidibilità di CH arrivò nel 1963 (cioè proprio durante la stesura di *Gödel 1964*) con la dimostrazione d'indipendenza di Cohen.

Ma la dimostrazione di indipendenza di CH[291] avrebbe davvero costituito una soluzione definitiva del problema del continuo? Il punto di vista filosofico assunto da Gödel sia nel 1947 che nel 1964, imponeva una risposta negativa.

Nell'ottica del platonismo gödeliano secondo cui "i concetti e i teoremi della teoria degli insiemi descrivono una realtà determinata",[292] CH deve essere vera o falsa, e la sua indecidibilità in **ZF** va interpretata come un sintomo del fatto che gli assiomi di **ZF** forniscono una descrizione incompleta della "realtà insiemistica".

11.1.4. Ipotesi forti dell'infinito

Secondo Gödel la situazione del problema del continuo già nel 1947 e a maggior ragione nel 1964 andava considerata come un segno della necessità di esplorare più in profondità la nozione di insieme e di ampliare conseguentemente i sistemi assiomatici esistenti con nuovi assiomi che permettessero di decidere questa ed altre questioni aperte.

L'autore aveva in mente i cosiddetti "assiomi forti dell'infinito" come ad esempio quelli relativi all'esistenza di cardinali inaccessibili e gli assiomi di Mahlo. Per Gödel, questi assiomi starebbero a dimostrare, da un lato, che i sistemi assiomatici fino ad ora adoperati sono "incompleti", e d'altro canto,

[291] In un sistema del prim'ordine per la teoria degli insiemi.

[292] Cf. *Gödel 1964* in *Gödel 1990*, pag. 263.

che tali sistemi possono essere estesi in maniera non arbitraria introducendo nuovi assiomi che esplicitino e chiariscano ulteriormente il contenuto della nozione di insieme.

Secondo l'autore, oltre agli assiomi forti dell'infinito, ce ne potrebbero essere degli altri che pur essendo rimasti finora sconosciuti potrebbero rivelarsi come impliciti nel concetto di insieme solo attraverso una più "profonda comprensione dei concetti fondamentali della logica e della matematica".[293]

Sulla possibilità di questa "profonda comprensione" dei concetti basilari di logica e matematica Gödel si sofferma nel supplemento al suo *1964*, dove sostiene che, dal momento che gli assiomi insiemistici "ci si impongono come veri", è possibile affermare che noi abbiamo una sorta di percezione degli oggetti della teoria degli insiemi. Inoltre l'autore afferma che, per poter considerare come sensata la questione della verità o falsità di proposizioni come CH, è sufficiente "il mero fatto psicologico dell'esistenza di un'intuizione abbastanza chiara da condurre agli assiomi della teoria degli insiemi e ad una serie aperta di loro estensioni".[294]

Dunque la formulazione del "programma di Gödel" non trae soltanto spunto dal problema del continuo ma sembra avere la portata di una valutazione della inadeguatezza ("incompletezza" e imprecisione) della nozione di insieme e di un punto di partenza per un nuovo approccio all'analisi filosofica della teoria degli insiemi e più in generale ai fondamenti della matematica.

11.1.5. Tornare al problema della definibilità

Nel quarto ed ultimo paragrafo di *Gödel 1947* l'autore risponde al quesito: esistono indizi seri del fatto che l'ipotesi del continuo di Cantor sia indecidibile in base a **ZFC**?

Un primo indizio consisterebbe nel fatto che gli assiomi di **ZFC** sono soddisfatti sia dalla classe $\mathcal{R}$ degli insiemi combinabili che dalla classe L degli insiemi costruibili.[295] $\mathcal{R}$ ed L sono "due classi di oggetti definite in modi assai diversi" in prima istanza perché nella prima (come d'altronde negli assiomi di **ZFC**) non si fa alcun riferimento all'idea che gli insiemi siano "tutti derivati da (e in un certo senso addirittura identici a) proprietà

[293] Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 182.

[294] Cf. *Gödel 1964* in *Gödel 1990*, pag. 268.

[295] Gödel nella nota 20 confonde un po' le cose parlando di insiemi "definibili in termini di ordinali". Poi però spiega che la classe in questione anche se formulata in modo leggermente diverso dalla costruibilità risulta essere "del tutto equivalente ad essa".

definibili".[296] Viceversa è chiaro che nella definizione di L si fa riferimento a quest'idea.

Secondo l'autore, per poter decidere la verità o falsità di CH occorre colmare questa lacuna di **ZFC** proprio "mediante un nuovo assioma che enunci o almeno implichi qualcosa circa la definibilità di insiemi".[297] Dunque nonostante sia persuaso dell'insufficienza del concetto di costruibilità (e forse anche di quello di definibilità per ordinali) per risolvere il problema del continuo, Gödel resta convinto del fatto che sia comunque il concetto di *definibilità* il punto di partenza di una possibile soluzione.

Il secondo indizio della probabile indecidibilità di CH rispetto a **ZFC** sarebbe invece l'esistenza di certe conseguenze paradossali dell'ipotesi cantoriana e dell'assioma di costruibilità che, secondo l'autore, indicherebbero la falsità di CH.

Nonostante importanti insiemisti abbiano espresso forti riserve circa la validità di questo secondo argomento gödeliano,[298] resta ferma la profeticità dell'asserzione con cui si chiude l'articolo:[299]

> ... si avrebbero ottime ragioni di sospettare che il ruolo del problema del continuo nella teoria degli insiemi sarà quello di portarci infine alla scoperta di nuovi assiomi che rendano possibile refutare la congettura di Cantor.

A testimonianza della veridicità di questo sospetto la gran mole di ricerche e scoperte, anche recenti, nell'ambito dell'infinito superiore.[300]

11.2. Estensioni della teoria degli insiemi

Nei suoi scritti Gödel non si limitò a esprimere considerazioni generali e in qualche modo programmatiche sui nuovi assiomi come quelle presenti in *1947* e in *1964*. Già nel 1938 egli fece una sua proposta per completare "in modo naturale" l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi: l'assioma di costruibilità. Nel 1939 (in particolare in *Gödel *1939b*) questa proposta sembra, almeno parzialmente, messa in discussione, laddove Gödel ipotizza che l'assioma di costruibilità possa forse essere una proposizione "assolutamente indecidibile". In quella sede l'assunzione dell'assioma di costruibilità

[296] Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 183.
[297] Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pagg. 183-184.
[298] Cf. al riguardo *Moore 1990*, cioè la nota introduttiva a *Gödel 1947*, pag. 165.
[299] Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 186.
[300] Cf. *Kanamori 1994* e *Kanamori et Magidor 1978*.

sembra essere considerata come una questione convenzionale simile all'assunzione dell'assioma delle parallele per la geometria. Nel 1947, l'autore sembra invece scartare nettamente l'idea che $V = L$ possa costituire un buon completamento dell'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, sulla base della persuasione che l'ipotesi del continuo sia scorretta. Questo punto di vista viene confermato e addirittura rafforzato in *Gödel 1964* sulla base della scoperta da parte di Cohen dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo. Tuttavia, mentre Cohen interpretò il suo risultato in prospettiva relativistica,[301] Gödel vide in quel risultato una conferma, oltre che di una sua congettura risalente alla seconda metà degli anni Trenta, anche del suo punto di vista sulla necessità di un completamento della caratterizzazione assiomatica del concetto di insieme.

Un secondo tentativo fu enunciato nel 1946 con la nozione di definibilità per ordinali. Questa nozione, come abbiamo visto, aveva però lo svantaggio, anche rispetto alla nozione di costruibilità, di non riuscire a risolvere quasi nessuno dei grandi problemi insiemistici aperti che invece si volevano risolti da una buona estensione della teoria degli insiemi.

Verso la fine degli anni Sessanta, Gödel cominciò a considerare una terza proposta: gli assiomi quadrati. L'interesse dell'autore per questa terza estensione è testimoniato dal seguente passo di una lettera spedita a Cohen il 22 gennaio 1964:[302]

> ... una volta messa da parte l'ipotesi del continuo, il problema chiave concernente la struttura del continuo, secondo me, è quello che Hausdorff chiama "problema della pantachia", cioè se esista un insieme di successioni di interi di potenza $\aleph_1$ che per qualsiasi successione di interi data ne contenga una che la maggiora da un certo punto in poi. Evidentemente Hausdorff stava tentando di risolvere questo problema affermativamente ... Ho sempre sospettato che, in contrasto con l'ipotesi del continuo, questa proposizione sia corretta e forse persino dimostrabile dagli assiomi della teoria degli insiemi. Inoltre, ho la sensazione che se il tuo metodo non otterrà qui una dimostrazione di indipendenza, esso potrebbe condurre a una dimostrazione di questa proposizione. In ogni caso dovrebbe essere possibile dimostrare la compatibilità dell'"ipotesi della pantachia" con $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Da queste righe emerge il fatto che l'interesse di Gödel per le tematiche riguardanti la cardinalità di particolari successioni di funzioni, che saranno al centro dei cosiddetti assiomi quadrati risalgono almeno alla prima metà

[301] Si veda ad esempio *Cohen 1971*.
[302] Cf. *Gödel 2003*, pagg. 383-384.

degli anni Sessanta. Sembra dunque legittimo ritenere che le brevi pagine dedicate da Gödel agli assiomi quadrati, seppur scorrette e lacunose, siano state il risultato di una riflessione ben ponderata, non improvvisata.

11.3. La proposta del 1970

Come anticipato sopra,[303] nel 1970 Gödel propose all'attenzione di Tarski una serie di assiomi che egli considerava un buon completamento della teoria degli insiemi e sulla base dei quali il problema del continuo di Cantor avrebbe dovuto ottenere la seguente soluzione:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Dal momento che le pagine dedicate da Gödel a questi "nuovi assiomi" sono di difficile decifrazione, noi tenteremo di ricostruire questi postulati servendoci anche dei fondamentali contributi di Ellentuck e di Solovay[304] sul tema.[305]

11.3.1. Scale di funzioni

Nella famosa lettera spedita a Tarski probabilmente nell'aprile del 1970 Gödel proponeva quattro assiomi relativi a certe successioni ordinate (scale) di funzioni. Il primo e il secondo degli assiomi proposti erano così espressi:[306]

> 1. Esiste una scala di funzioni $\omega_n \to \omega_n$ di tipo ω_{n+1} le quali maggiorano per parti finali tutte le funzioni $\omega_n \to \omega_n$ ... 2. Il numero totale dei segmenti iniziali di tutte le funzioni di questa scala è $\aleph_n$.

Il primo di questi due assiomi può essere spiegato come segue. Sia ω_n l'n-esimo ordinale iniziale e sia ${}^{\omega_n}\omega_n$ l'insieme di tutte le funzioni definite su ω_n a valori su ω_n, ossia:

$${}^{\omega_n}\omega_n := \{f : fun(f) \wedge dom(f) = \omega_n \wedge cod(f) \subseteq \omega_n\}.$$

Definiamo su ${}^{\omega_n}\omega_n$ un ordine parziale $\lhd$ come segue. Se $f, g \in {}^{\omega_n}\omega_n$, allora:

$$f \lhd g \leftrightarrow \exists\alpha < \omega_n \forall\beta > \alpha(f`\beta < g`\beta).$$

[303]Si veda il capitolo 5.
[304]Cioè *Ellentuck 1975* e *Solovay 1995a*.
[305]Si veda inoltre *Takeuti 1978*.
[306]Cf. *Gödel *1970a*, pag. 420.

Date due funzioni f, g su ${}^{\omega_n}\omega_n$ se $f \lhd g$ diremo che la funzione g *maggiora per parti finali* o, brevemente, *pf-maggiora* la funzione f. Intuitivamente $f \lhd g$ indica il fatto che, da un certo punto in poi, la funzione g è sempre maggiore della funzione f.

Definiamo inoltre, sempre sullo spazio ${}^{\omega_n}\omega_n$, un ordine parziale $\ll$ come segue. Se $f, g \in {}^{\omega_n}\omega_n$, allora:

$$f \ll g \leftrightarrow \forall \alpha (f`\alpha < g`\alpha).$$

Date due funzioni f, g su ${}^{\omega_n}\omega_n$ se $f \ll g$ diremo che la funzione g *maggiora ovunque* o più semplicemente *maggiora* la funzione f. Intuitivamente, $f \ll g$ indica che g è sempre maggiore di f.

Dato un sottoinsieme M di ${}^{\omega_n}\omega_n$ definiamo la relazione $\mathrm{cf}_{\lhd}(M, {}^{\omega_n}\omega_n)$ come segue:

$$\mathrm{cf}_{\lhd}(M, {}^{\omega_n}\omega_n) \leftrightarrow \forall f \in {}^{\omega_n}\omega_n \exists g \in M (f \lhd g).$$

Se per un certo $M \subseteq {}^{\omega_n}\omega_n$ si ha $\mathrm{cf}_{\lhd}(M, {}^{\omega_n}\omega_n)$, allora diremo che M è *cofinale in ${}^{\omega_n}\omega_n$ rispetto alla relazione* $\lhd$. Intuitivamente $\mathrm{cf}_{\lhd}(M, {}^{\omega_n}\omega_n)$ significa che per ogni funzione di ${}^{\omega_n}\omega_n$ esiste una funzione di M che la maggiora per parti finali. Analogamente, per $M \subseteq {}^{\omega_n}\omega_n$, definiamo la relazione $\mathrm{cf}_{\ll}(M, {}^{\omega_n}\omega_n)$ come segue:

$$\mathrm{cf}_{\ll}(M, {}^{\omega_n}\omega_n) \leftrightarrow \forall f \in {}^{\omega_n}\omega_n \exists g \in M (f \ll g).$$

Infine, se x è un insieme ben-ordinato rispetto ad una certa relazione R, indichiamo col simbolo $\mathrm{ot}_R(x)$ il tipo d'ordine di quell'insieme rispetto a R.

Possiamo ora esprimere formalmente il primo assioma di Gödel come segue:

$$\exists M \subseteq {}^{\omega_n}\omega_n (\mathrm{ot}_{\lhd}(M) = \omega_{n+1} \wedge \mathrm{cf}_{\lhd}(M, {}^{\omega_n}\omega_n)), \tag{1*}$$

oppure, seguendo la formalizzazione datane da Solovay nel suo *1995a*, come segue:

$$\exists M \subseteq {}^{\omega_n}\omega_n (\overline{\overline{M}} = \aleph_{n+1} \wedge \mathrm{cf}_{\ll}(M, {}^{\omega_n}\omega_n)). \tag{1}$$

Veniamo ora al secondo dei due assiomi citati sopra da *Gödel *1970a*. Sia M l'insieme di funzioni su ${}^{\omega_n}\omega_n$ che soddisfa l'assioma (1). Allora l'insieme:

$$M^* := \{f \restriction \alpha : f \in M \wedge \alpha < \omega_n\}$$

ha cardinalità $\aleph_n$. In simboli avremo quindi che il secondo assioma di Gödel può essere così formalizzato:

$$\exists M \subseteq {}^{\omega_n}\omega_n (\overline{\overline{M}} = \aleph_{n+1} \wedge \mathrm{cf}_{\ll}(M, {}^{\omega_n}\omega_n) \wedge \overline{\overline{M^*}} = \aleph_n). \tag{2}$$

Il terzo e il quarto assioma proposti da Gödel nella lettera a Tarski sono così enunciati:

> 3. Esiste una scala di funzioni ($\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) completa, cioè non estendibile, in cui ogni successione ascendente o discendente ha cofinalità ω_1. 4. Per questa scala completa vale l'assioma di continuità di Hausdorff.

Questi ultimi due assiomi sono formulati in modo particolarmente oscuro tanto è vero che nei lavori pubblicati negli anni Settanta da Ellentuck e Takeuti sugli assiomi quadrati di Gödel si fa riferimento quasi esclusivamente ai primi due.[307]

Indichiamo con $Lo_{\lhd}(x)$ il fatto che l'insieme x è linearmente ordinato dalla relazione $\lhd$ e con $Wo_{\lhd}(x)$ il fatto che l'insieme x è ben-ordinato dalla relazione $\lhd$. Denotiamo come di consueto l'insieme dei numeri reali con $\mathbb{R}$ e l'insieme dei numeri naturali con $\mathbb{N}$. Avremo allora che il terzo assioma di Gödel può verosimilmente essere formalizzato così:

$$\exists S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}(Lo_{\lhd}(S) \wedge Comp(S) \wedge \forall T \subseteq S(Wo_{\lhd}(T) \to \mathrm{cf}(T) = \omega_1)) \tag{3}$$

dove $Comp(S)$ sta per:

$$\forall U \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}(S \subseteq U \wedge Lo_{\lhd}(U) \to S = U).$$

Intuitivamente, questo assioma dice che esiste un insieme S di funzioni definite su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$ che è linearmente ordinato rispetto a $\lhd$, massimale e tale che ogni sottoinsieme di S ben-ordinato dalla relazione $\lhd$ ha cofinalità ω_1.

La decifrazione del quarto ed ultimo assioma è senza dubbio la più problematica e necessita di qualche prerequisito tecnico.[308] Nel seguito indicheremo con ω_1^* il tipo d'ordine inverso a quello di ω_1 (visto come tipo d'ordine della seconda classe numerica cantoriana); intuitivamente, se ω è il tipo d'ordine dell'insieme dei numeri naturali, ω^* sarà il tipo d'ordine dell'insieme degli interi non-positivi.

Sia S un sottoinsieme di ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Definiamo una relazione $\prec$ fra sottoinsiemi di S come segue. Se $A, B \subseteq S$, allora:

$$A \prec B \leftrightarrow \forall f \in A \forall g \in B(f \lhd g).$$

[307] Sul problema di quale interpretazione dare al quarto assioma si veda *Solovay 1995a*.
[308] Si veda al riguardo *Dales et Woodin 1987*, cap. 6.

Definizione 1. Sia $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ e siano $A, B \subseteq S$. La coppia ordinata $\langle A, B\rangle$ viene definita un (ω_1, ω_1^*)-*pregap*, in simboli, $PG_{(\omega_1,\omega_1^*)}(A, B)$, se e solo se:

(i) $A := \{f_\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} : \alpha < \omega_1\}$
(ii) $\forall\alpha_1 < \omega_1\forall\alpha_2 < \omega_1(\alpha_1 < \alpha_2 \to f_{\alpha_1} \lhd f_{\alpha_2})$
(iii) $B := \{g_\beta \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} : \beta < \omega_1\}$
(iv) $\forall\beta_1 < \omega_1\forall\beta_2 < \omega_1(\beta_1 < \beta_2 \to g_{\beta_2} \lhd g_{\beta_1})$
(v) $A \prec B$
(vi) $Lo_\lhd(A \cup B)$.

Le condizioni (i) e (ii) dicono che A è una successione crescente di funzioni di lunghezza ω_1, le condizioni (iii) e (iv) che B è una successione decrescente di funzioni di lunghezza ω_1. Dunque avremo la seguente definizione:

$$PG_{(\omega_1,\omega_1^*)}(A, B) \leftrightarrow (\mathrm{ot}_\lhd(A) = \omega_1 \wedge \mathrm{ot}_\lhd(B) = \omega_1^* \wedge (A \prec B) \wedge Lo_\lhd(A \cup B)).$$

Definizione 2. Sia $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ e siano $A, B \subseteq S$. La coppia ordinata $\langle A, B\rangle$ viene definita un (ω_1, ω_1^*)-*gap* in simboli $G_{(\omega_1,\omega_1^*)}(A, B)$ se e solo se $\langle A, B\rangle$ è un (ω_1, ω_1^*)-pregap ed inoltre:

$$\neg\exists h \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}\forall f \in A\forall g \in B(f \lhd h \lhd g).$$

In breve avremo la seguente definizione:

$$G_{(\omega_1,\omega_1^*)}(A, B) \leftrightarrow (PG_{(\omega_1,\omega_1^*)}(A, B) \wedge \neg\exists h \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}(A \prec \{h\} \prec B)).$$

Definizione 3. Sia $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Diciamo che S è (ω_1, ω_1^*)-*continuo* e scriviamo $Cont_{(\omega_1,\omega_1^*)}(S)$ se e solo se:

$$\forall A, B \subseteq S(PG_{(\omega_1,\omega_1^*)}(A, B) \to \exists h \in S(A \prec \{h\} \prec B)).$$

In altri termini, S è (ω_1, ω_1^*)-continuo se non contiene (ω_1, ω_1^*)-gaps.

Siamo ora in grado di formalizzare anche il quarto ed ultimo assioma di Gödel come segue:

$$\exists S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}(Lo_\lhd(S) \wedge \forall T \subseteq S(Wo_\lhd(T) \to \overline{\overline{T}} \leq \aleph_1) \wedge Cont_{(\omega_1,\omega_1^*)}(S)). \quad (4)$$

Intuitivamente esso afferma che l'insieme S la cui esistenza viene postulata dall'assioma (3) può essere scelto in modo tale da non contenere (ω_1, ω_1^*)-gaps ossia in modo tale da soddisfare quello che l'autore chiama l'assioma di continuità di Hausdorff.

Abbiamo così spiegato, per quanto possibile, i quattro assiomi che, secondo *Gödel *1970a*, avrebbero dovuto consentire una dimostrazione del fatto che la cardinalità del continuo sia $\aleph_2$ cioè della proposizione:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

11.3.2. Assiomi quadrati e congetture rettangolari

Occorre puntualizzare il fatto che quelli che nella letteratura sono noti come assiomi quadrati, seguendo la terminologia di *Ellentuck 1975*, sono gli assiomi (1) e (2) considerati congiuntamente. D'ora in poi, chiameremo quindi *assiomi quadrati* la seguente proposizione:

SAH. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un insieme $C \subsetneq {}^{\omega_n}\omega_n$ tale che:

(a) $\overline{\overline{C}} = \aleph_{n+1}$

(b) $\forall f \in {}^{\omega_n}\omega_n \exists g \in C (f \ll g)$

(c) $\overline{\overline{C^*}} = \overline{\overline{\{f \upharpoonright \alpha : f \in C \wedge \alpha < \omega_n\}}} = \aleph_n$.

Gödel credette di aver dimostrato che dall'assunzione di SAH, (3) e (4) potesse seguire la seguente proposizione, che chiameremo, seguendo la terminologia standard, *congetturi rettangolari*:

RCH. Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, se $m < n$ allora esiste un insieme $D \subsetneq {}^{\omega_n}\omega_m$ tale che:

(a) $\overline{\overline{D}} = \aleph_{n+1}$

(b) $\forall f \in {}^{\omega_n}\omega_m \exists g \in D (f \ll g)$

(c) $\overline{\overline{D^*}} = \overline{\overline{\{f \upharpoonright \alpha : f \in D \wedge \alpha < \omega_n\}}} = \aleph_n$.

Nel suo **1970a* Gödel credette di aver dato una dimostrazione del fatto che:

$$\mathbf{ZFC} \cup \{\mathsf{SAH}, (3), (4)\} \vdash \mathsf{RCH}$$

e che:

$$\mathbf{ZFC} \cup \{\mathsf{RCH}\} \vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Di fatto sempre nello stesso anno, com'è testimoniato da **1970c*, Gödel si rese conto di vari errori presenti nella dimostrazione e soprattutto manifestò dubbi circa l'evidenza dell'assioma (4) e di RCH, pur rimanendo convinto dell'evidenza degli assiomi (1),(2),(3) e della plausibilità di $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

11.3.3. Argomenti di analogia

Quali furono le ragioni addotte da Gödel circa l'evidenza degli assiomi presentati in **1970a*?

Per rispondere a questo quesito può essere utile considerare, oltre ai tre brevi inediti del 1970, il già citato *Ellentuck 1975* che fu redatto sotto la supervisione dello stesso Gödel. A favore di SAH vengono qui avanzate le seguenti considerazioni.

a) Nella nota 1 della *Leçons sur la theorie des fonctions* (1898) di Emile Borel viene considerata come evidente l'esistenza di una scala di funzioni su ${}^{\omega}\omega$ che soddisfa l'assioma (1). Una delle idee alla base del primo assioma proposto da Gödel sarebbe quindi un argomento di *analogia* con questa congettura di Borel: essendo $\aleph_0$ un cardinale regolare è plausibile che una tale scala esista in ogni spazio di funzioni ${}^{\kappa}\kappa$ dove κ è un cardinale regolare.

b) Sempre nel caso dello spazio di funzioni ${}^{\omega}\omega$ l'assioma (2) è banalmente soddisfatto, infatti è noto che la cardinalità dell'insieme di tutte le successioni finite di numeri naturali è $\aleph_0$; *a fortiori* lo sarà un suo sottoinsieme infinito. Anche in questo caso un argomento di analogia o di *riflessione* potrebbe suggerire che questa proprietà si conservi per ogni spazio ${}^{\kappa}\kappa$ dove κ è un cardinale regolare.

c) La relazione $\lhd$ su un certo spazio ${}^{\kappa}\kappa$ non viene alterata da una modifica dei segmenti iniziali delle funzioni. E' quindi pensabile che a partire da una certa scala di funzioni S che soddisfi l'assioma (1), attraverso una modifica sistematica dei segmenti iniziali delle funzioni in S si possa ottenere una scala di funzioni S' che soddisfi, oltre che (1), anche l'assioma (2).

A favore degli assiomi (3) e (4) non esistono motivazioni specifiche né nei tre inediti gödeliani né nell'articolo di Ellentuck. Una motivazione possibile è quella portata da Solovay,[309] secondo cui la scala di funzioni postulata

[309] Cf. *Solovay 1995a*.

dagli assiomi (3) e (4) sarebbe un analogo di ordine superiore dell'insieme dei numeri reali. Sulla base di questo ulteriore argomento di analogia, si avrebbe che:

d) l'assioma (3) sarebbe una generalizzazione del fatto che non esiste un isomorfismo d'ordine fra ω_1 e $\mathbb{R}$;

e) l'assioma (4) sarebbe un analogo di ordine superiore della continuità dell'insieme dei numeri reali.

11.3.4. Conclusioni

Quali sono le principali conseguenze dei quattro assiomi proposti da Gödel?

Solovay ha dimostrato, nel suo *1995a*, i seguenti fatti:

- gli assiomi (3) e (4) implicano l'ipotesi di Lusin, $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$;

- le congetture rettangolari implicano dei limiti superiori sulla cardinalità del continuo.

Una particolare forma di RCH, cioè il caso in cui si considerano solo gli spazi di funzioni ${}^{\kappa^+}\kappa$, dove κ è un cardinale infinito e κ^+ è il cardinale immediatamente maggiore di κ, è equivalente all'ipotesi generalizzata del continuo.[310] Questo fatto, che da solo esclude l'utilizzo di RCH per dimostrare $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, fu rilevato dallo stesso Gödel nel suo **1970c*. Solovay ha mostrato inoltre che:

- SAH non implica alcun limite superiore sulla cardinalità del continuo;

- SAH non implica RCH;

- gli assiomi (1),(2),(3) congiuntamente presi non implicano alcun confine superiore sulla cardinalità del continuo.

Lo stesso Gödel nel suo **1970c* congetturò quest'ultimo fatto.

I risultati enunciati sopra sembrano eliminare la possibilità di utilizzare i quattro assiomi per determinare la "vera" cardinalità del continuo. Va tuttavia sottolineato che non esiste una dimostrazione del fatto che i quattro

[310] Cf. al riguardo *Solovay 1995a* e *Takeuti 1978*.

assiomi congiuntamente presi non implichino limiti superiori sulla cardinalità del continuo. In particolare non è escluso che essi implichino l'ipotesi gödeliana secondo cui $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Ci sembra comunque che, al di là delle loro possibili conseguenze sul problema del continuo, questi quattro assiomi dovrebbero essere valutati anche nella prospettiva del programma di Gödel. In tal senso essi costituiscono un tentativo di completare la caratterizzazione assiomatica della nozione di insieme proprio nell'ambito in cui le assiomatizzazioni esistenti si sono rivelate insufficienti: la definizione di strutture che, analogamente a $\mathbb{R}$, non sono dotate di un ordine naturale.

Terza parte
Filosofia della matematica

Introduzione

Fino al 1994 l'immagine più ampiamente diffusa della filosofia della matematica di Gödel era legata sostanzialmente a due fonti: l'articolo sulla logica di Russell e quello sul problema del continuo. Con la pubblicazione del terzo volume dei *Collected works* quest'immagine è profondamente mutata agli occhi di logici e matematici. Va tuttavia osservato che all'interno di questo terzo volume troviamo materiali molto diversificati non solo per quanto riguarda i temi trattati ma anche e direi, soprattutto, per il loro *statuto editoriale*.

In questa terza parte cercheremo di presentare le principali istanze della filosofia della matematica di Gödel seguendo una linea espositiva sostanzialmente cronologica. Il motivo di questa scelta sta nell'opportunità che questo tipo di esposizione ci fornisce di contestualizzare le riflessioni dell'autore almeno relativamente alla sua opera logico-matematica ed inoltre di distinguere in modo più chiaro i vari momenti dello svolgersi del pensiero filosofico gödeliano. Ovviamente dove necessità sistematiche lo richiedano questa linea cronologica potrà essere sostituita da una linea espositiva concettuale come nel caso del capitolo 18.

Nei capitoli 12 e 13 presenteremo il punto di vista espresso da Gödel fra il 1933 e il 1938 in due conferenze sulla situazione dei fondamenti della matematica negli anni Trenta ed in particolare in seguito ai teoremi di incompletezza, alle traduzioni modale e negativa e soprattutto alla dimostrazione di noncontraddittorietà dell'aritmetica, di Gentzen.

Nei capitoli 14 e 15 ci occuperemo invece di due dei *Leitmotiven* della filosofia della matematica gödeliana: il realismo concettuale e la nozione di analiticità. In questo ambito ci avvarremo dei tre classici articoli filosofici "Russell's mathematical logic" (brevemente il *Russell paper*), "What is Cantor continuum problem" (in breve il *Cantor paper*) e la "Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics" (in breve la *PBC*). Sfrutteremo inoltre due inediti del 1949 relativi al rapporto fra relatività e filosofia kantiana, per cercare di mettere a fuoco il punto di vista dell'autore sulla nozione di oggetto empirico.

Nei capitoli 16 e 17 tratteremo due importanti fonti inedite degli anni Cinquanta ossia la cosiddetta *Gibbs lecture* e gli articoli su Rudolf Carnap (che indicheremo brevemente come *Carnap papers*) che sarebbero dovuti comparire nella monografia di Schlipp dedicata appunto al collega viennese di Gödel.

Il capitolo 18 sarà infine dedicato ad una breve esposizione e analisi critica dell'articolo inedito del 1961 sulla filosofia di Husserl (che abbrevieremo come *Husserl Vortrag*) e ad una valutazione dell'eventuale ricaduta delle letture fenomenologiche fatte da Gödel sulla sua filosofia della matematica. In tal senso faremo qui riferimento alla seconda edizione del *Cantor paper* ed alla seconda redazione del *Dialectica paper*.

Gli anni Trenta

Gli anni Trenta furono per Gödel anni di straordinaria creatività matematica. Di fatto tutti i principali risultati tecnici da lui ottenuti furono realizzati o per lo meno impostati (vedi il caso della "Dialectica interpretation") nel corso di questo decennio.

Come emerge con chiarezza dalla lettura del terzo volume dei *Collected Works*, in questo periodo Gödel fu inoltre protagonista di una ricca attività divulgativa e filosofica.

In questa sezione proponiamo al riguardo la lettura di due conferenze gödeliane relative, rispettivamente, alla situazione dei fondamenti della matematica dopo la scoperta del fenomeno dell'incompletezza e al problema della noncontraddittorietà.

12. I fondamenti dopo l'incompletezza

Nel 1933 Gödel tenne una conferenza a Cambridge al congresso della *Mathematical Association of America* intitolata "The present situation in the foundations of mathematics". E' difficile trovare nell'opera gödeliana una fonte più appropriata per cogliere il punto di vista del nostro autore sui fondamenti nel periodo immediatamente successivo ai suoi risultati di incompletezza.

La conferenza (brevemente la *Cambridge lecture*) si apre con una precisa definizione del significato dei fondamenti della matematica in termini di *formalizzazione* e *giustificazione*. Secondo l'autore dare un fondamento alla matematica[311] significa in primo luogo, ridurne i metodi dimostrativi ad una collezione di assiomi e regole che abbiano due proprietà:

1.1) la minimalità ("questi metodi dimostrativi devono essere ridotti ad un numero minimo di assiomi e regole di inferenza primitive") e

1.2) la precisione (questi assiomi e regole devono "stabilirsi nel modo più preciso possibile").

In queste due proprietà caratterizzanti la riduzione dei metodi che è poi l'assiomatizzazione, Gödel evidenzia i due classici *desiderata* di un sistema assiomatico: l'assenza di ridondanze e la formalità (o completo rigore).

[311] Intesa come "la totalità dei metodi dimostrativi attualmente usati dai matematici".

Il secondo elemento caratterizzante il processo di fondazione della matematica consiste, secondo l'autore, nel fornire una giustificazione degli assiomi e delle regole individuate mediante l'assiomatizzazione, nei due sensi di:

2.1) trovare un fondamento del fatto che gli uni concordano con gli altri e

2.2) trovare un fondamento del fatto che tali assiomi e regole concordano coi fatti empirici.

Il punto (2.1) corrisponde al classico requisito della *noncontraddittorietà* dei sistemi assiomatici. Il (2.2) risulta invece meno chiaro se lo si interpreta alla lettera. Così letto infatti esso significherebbe che per legittimare i nostri sistemi assiomatici occorrerebbe determinare la ragione per cui la matematica risulta applicabile alle scienze empiriche. Ma questo sembra più un obiettivo della filosofia della scienza che non della metamatematica. Sembra quindi possibile interpretare il punto (2.2) nel senso che una legittimazione dei metodi e dei principi matematici richiede una verifica dell'*adeguatezza* dei sistemi assiomatici ossia del fatto che l'insieme di assiomi e regole che abbiamo individuato sia sufficiente a dimostrare tutte le proposizioni vere della disciplina matematica in questione. Si potrebbe quindi azzardare l'ipotesi che la proprietà a cui il nostro autore sta qui alludendo sia la *completezza semantica*.

12.1. Formalizzazione della matematica

Gödel prosegue spiegando che la soluzione della prima parte del problema di fondare la matematica è già stata realizzata e consiste nel processo di *formalizzazione*. Ovverosia:[312]

> ... è stato inventato un linguaggio del tutto preciso mediante il quale è possibile esprimere qualsiasi proposizione matematica con una formula.

L'autore introduce poi la nozione di sistema formale, sottolineando in particolare l'assoluta meccanizzazione del ragionamento che i sistemi formali realizzano: dal dominio di tutte le formule di un certo linguaggio formale ne vengono assunte alcune come assiomi e si costruiscono inoltre certe regole di inferenza caratterizzate dal fatto di essere "puramente formali" e quindi completamente meccaniche.

[312]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 45.

Gödel annovera fra i pionieri del moderno metodo assiomatico-formalista Frege e Peano, non cita Russell e Hilbert la cui opere furono in effetti più tarde. Egli ricorda poi come i primi tentativi di formalizzazione della matematica furono drasticamente messi in discussione dalla scoperta dei paradossi.[313]

In linea un po' con tutti i più importanti esponenti del pensiero fondazionale Novecentesco ed in particolare con i punti di vista di Russell, Zermelo e Hilbert, Gödel osserva che le restrizioni proposte dai tentativi successivi al paradosso di Russell per una fondazione della matematica furono orientati dal duplice obiettivo di:

1) evitare i paradossi e

2) dar conto di tutta quanta la matematica compresa l'allora nascente teoria degli insiemi.[314]

L'autore osserva che in trent'anni di ricerche fondazionali successive alla scoperta dei paradossi è stata individuata una sola proposta che soddisfi entrambi questi requisiti. Questa proposta è poi la teoria dei tipi semplici di cui la teoria degli insiemi non sarebbe altro che una "naturale generalizzazione" ottenibile dalla prima eliminando "certe restrizioni superflue".[315]

Al riguardo Gödel non distingue il sistema di Zermelo-Fraenkel da quello di von Neumann nonostante le profonde differenze formali e sostanziali. La ragione di questa assimilazione sembra essere il motivo stesso alla base dell'accostamento di teoria dei tipi semplici e teoria degli insiemi: l'autore ritiene che non sussista una differenza essenziale fra le due teorie, in quanto entrambe rappresentano un tentativo di descrivere assiomaticamente la gerarchia cumulativa degli insiemi, cioè quello che nel capitolo 8 abbiamo descritto come il modello degli insiemi combinabili di von Neumann.

Gödel, richiamandosi a *von Neumann 1929*, osserva che la principale restrizione introdotta dalla teoria dei tipi rispetto alla teoria degli insiemi consiste nel rimpiazzare la nozione generale di classe con una successione infinita di nozioni di classe. L'autore spiega questa affermazione in termini della nozione iterativa di insieme e tuttavia, così facendo, ammette anche una notevole

[313]Il riferimento implicito nel testo sembra essere il paradosso di Russell.

[314]Si tratta di quelli che, ad esempio Smorynski in *Barwise 1977* definisce rispettivamente come "consistency program" e "conservation program" all'interno del programma di Hilbert.

[315]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 46.

differenza concettuale fra tipi semplici e insiemi: mentre i primi costituiscono una ripartizione dell'ontologia in livelli distinti e disgiunti per cui un oggetto è dato sempre assieme al tipo di appartenenza, in ambito insiemistico un oggetto appartenente ad un certo livello α può benissimo trovarsi in livelli più bassi ed inoltre si trova in tutti i livelli successivi (più alti).

Gödel spiega la nozione iterativa di insieme affermando che per poter parlare di classi occorre in primo luogo un dominio di individui, ad esempio i numeri interi. Si può allora parlare di qualsiasi classe di numeri interi, ottenendo così la nozione di classe del primo tipo, considerare quindi qualsiasi classe di classi di individui, ottenendo la nozione di classe del secondo tipo, e così via.

L'autore conclude osservando che le caratteristiche essenziali della gerarchia cumulativa consistono, da un lato, nel fatto di essere illimitata e, dall'altro, nel non poter contenere oggetti isomorfi all'universo cioè alla classe di tutti gli insiemi. Naturalmente, l'illimitatezza e la stratificazione della gerarchia cumulativa hanno come conseguenze che:

a) non è possibile formare la nozione di classe in generale;

b) non è possibile parlare di tutte le classi senza restrizioni.

12.1.1. Tipi semplici e insiemi

Gödel passa poi in rassegna le tre "restrizioni superflue" che distinguerebbero la teoria dei tipi semplici dalla teoria degli insiemi. L'autore puntualizza il fatto che tali restrizioni risultano "superflue" o "non-necessarie" non sotto ogni punto di vista, bensì per quanto riguarda i due problemi di evitare i paradossi e di dar conto di tutta la matematica.

La prima restrizione considerata da Gödel è la cosiddetta *purezza dei tipi* cioè il fatto che i tipi semplici costituiscono una partizione dell'ontologia o dell'universo. Ciò implica che non si può formare una classe che contenga "classi di tipo differente dai suoi elementi".[316] Dunque l'omogeneità caratteristica dei tipi puri rende impossibile definire classi contenenti oggetti di tipi differenti. Ciò è invece possibile nell'ambito della teoria degli insiemi ed è in particolare garantito dalla cumulatività dei livelli dell'universo. Un tipo n contiene tutti e soli gli oggetti di livello n dell'universo, mentre un "tipo" α della gerarchia cumulativa contiene oggetti dei livelli 0,1,2,....,α. Nel primo

[316] Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 46.

si possono *separare* cioè definire solo insiemi di oggetti omogenei, nel secondo sono invece definibili insiemi contenenti oggetti del tutto eterogenei. Questa prima restrizione è di natura *ontologica* e fa sì che l'universo insiemistico risulti essere molto più ricco e complesso dell'universo dei tipi.

La seconda restrizione non-necessaria richiamata da Gödel ha invece un carattere prettamente *linguistico* o formale: mentre in un sistema formale per la teoria degli insiemi le formule atomiche sono tutte e sole le formule della forma $x \in y$, $x \in b$, $a \in x$ e $a \in b$, nella teoria dei tipi semplici la classe delle formule atomiche ben-formate è la ben più ristretta classe di tutte e sole le formule della forma $x^n \in y^{n+1}$, $x^n \in b^{n+1}$, $a^n \in x^{n+1}$ e $a^n \in b^{n+1}$.

La terza ed ultima restrizione superflua presente, secondo l'autore, nella teoria dei tipi semplici è nuovamente di carattere *ontologico* e riguarda il fatto che in essa sono ammessi solo tipi *finiti* e quindi viene esclusa la possibilità di iterare l'operazione di "tipo di" un numero transfinito di volte. Nella teoria degli insiemi si può considerare ad esempio il livello ω della gerarchia cumulativa cioè la collezione di tutti gli insiemi di tipo finito. Nella teoria dei tipi ciò non è possibile e di fatto questo rende in essa impossibile una ricostruzione della teoria degli ordinali e dei cardinali transfiniti.

Gödel, probabilmente con riferimento implicito a "Über das Unendliche",[317] osserva che lo stesso Hilbert avrebbe puntualizzato che non esistono ragioni per limitare il processo di formazione dei tipi al finito. Egli osserva inoltre che quest'ultima restrizione costituisce la più importante delle tre, di fatto l'unica davvero *essenziale*: la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel sarebbe un'estensione conservativa di una teoria dei tipi in cui si facciano esclusivamente le prime due restrizioni viste sopra.[318]

12.1.2. Gerarchie di sistemi formali

Secondo l'autore un'obiezione che potrebbe indurre a limitarsi ai tipi finiti sarebbe quella secondo cui per fissare gli assiomi di un sistema formale che includa tutti i tipi fino a un dato ordinale α occorre presupporre tale ordinale. Ma la definizione degli ordinali, compreso α stesso, non può ottenersi se non in riferimento al sistema formale di cui vogliamo fissare gli assiomi. L'idea è che se vogliamo poter parlare in **ZF** del livello ω della gerarchia cumulativa, occorre disporre nel linguaggio di **ZF** dell'ordinale ω stesso ossia occorre assumere l'assioma dell'infinito. Apparentemente ci troviamo chiusi

[317]Cf. *Hilbert 1926*.

[318]Al riguardo esistono anche alcuni risultati tecnici. Si veda ad esempio *Lake 1975*.

nella circolarità viziosa di dover *presupporre* proprio ciò che vorremo invece *fondare*.

La risposta di Gödel a questo tipo di obiezione è tutt'altro che chiara e, secondo Feferman,[319] costituisce forse un qualche cosa di analogo alle *progressioni autonome* di sistemi formali da lui introdotte negli anni Sessanta nell'ambito della teoria della dimostrazione. La cosa che emerge con chiarezza da questa parte della conferenza sembra essere che qui l'autore considera una gerarchia di sistemi formali di complessità crescente ciascuno dei quali serve a definire certi ordinali che il sistema successivo utilizzerà come base per definire ordinali più grandi. Il problema sta nel fatto che la teoria degli insiemi senza l'assioma dell'infinito non è in grado di definire alcun ordinale transfinito.

Tuttavia qui Gödel sembra passare implicitamente dalla considerazione di sistemi formali per la teoria degli insiemi a sistemi formali qualsiasi. Secondo l'autore la teoria assiomatica degli insiemi occupa nella gerarchia dei sistemi formali una posizione che può essere caratterizzata dalla chiusura rispetto al passaggio "da un dato tipo a quello successivo" e rispetto alla somma di "una successione di tipi dati". Detto altrimenti, il sistema **ZF** è sostanzialmente caratterizzato dalla chiusura rispetto alle due operazioni di potenza e unione.

12.1.3. Tipi transfiniti e incompletezza

Gödel constata che in base ad un'attenta analisi della situazione dei fondamenti ci troviamo nella strana situazione per cui, anziché aver individuato un sistema formale capace di dar conto di tutta la matematica, abbiamo invece isolato una successione di sistemi formali la quale riesce a descrivere l'universo matematico *non* con un unico colpo d'occhio *ma* per progressive estensioni di campo. Ci troviamo insomma in una situazione apparentemente insoddisfacente probabilmente perché pensare di fondare la matematica su un'infinità di sistemi può sembrare un nuovo appello all'infinito in un ambito in cui l'infinito non dovrebbe essere presupposto.[320]

Secondo l'autore esistono almeno due ragioni per ritenere che questa si-

[319]Cf. *Feferman 1995*, pag. 37.

[320]In realtà Gödel non spiega perché un tipo di fondazione "stratificata" e "gerarchizzata" dovrebbe essere così insoddisfacente. Forse lui lo considerava un fatto evidente dal momento che tutti i tentativi di fondazione della matematica visti fino ad allora presupponevano non solo di ridurre tutta la matematica ad *un solo* sistema formale ma ad un sistema formale *finito*.

tuazione, anziché screditare la teoria dei tipi e la teoria degli insiemi, tenda invece a costituire un argomento in favore di queste due teorie. La prima consiste nel fatto che già i sistemi più deboli di questa gerarchia sono sufficienti a ricostruire tutta la matematica nota. Questa affermazione sembra anticipare le più recenti affermazioni di Feferman secondo le quali tutta la matematica utile per le applicazioni scientifiche è già compresa in sistemi notevolmente costruttivi.[321]

La seconda ragione per cui, secondo Gödel, la gerarchizzazione dei sistemi formali per la matematica sembra deporre a favore della teoria dei tipi sta nel fatto che essa è in accordo con certi risultati del tutto indipendenti: i teoremi di incompletezza. Egli non cita esplicitamente i suoi celebri risultati del '31, ma allude chiaramente ad essi dicendo che è possibile mostrare che ogni sistema formale noncontraddittorio "deve necessariamente essere insufficiente nei suoi metodi dimostrativi".[322] In particolare l'autore richiama il fatto che in ogni sistema formale noncontraddittorio è possibile costruire una proposizione aritmetica φ *vera* ma *indimostrabile* nel sistema.[323] Riconnettendosi all'importanza della teoria dei tipi, egli afferma che se il sistema formale in questione, in breve **T**, fosse basato sulla teoria dei tipi, per dimostrare la proposizione indecidibile φ occorrerebbe esattamente il primo tipo non contenuto in **T**. Ossia la proposizione φ diventa dimostrabile in **T** se si aggiunge a **T** "il primo tipo superiore e gli assiomi che lo riguardano".[324]

L'autore osserva che un esempio di proposizione *aritmetica* cioè dotata della forma logica della sua proposizione formalmente indecidibile è il teorema di Goldbach secondo il quale "ogni numero pari è somma di due numeri primi". L'annotazione non è affatto casuale ma sembra essere volta a sottolineare il fatto che il fenomeno dell'incompletezza potrebbe essere la spia della necessità di un passaggio metodologico al fine di risolvere importanti problemi aritmetici aperti come appunto la congettura di Goldbach. Questa interpretazione della nota gödeliana sembra confortata dall'affermazione del-

[321]Cf. al riguardo l'articolo di Feferman "Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics" in *Feferman 1998*, pagg. 282-296. In particolare a pagina 298 si legge: "... it has been established that system far weaker than Zermelo set theory and even than second order arithmetic suffice for the bulk of mathematical practice".

[322]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 48.

[323]Qui chiaramente il riferimento è la proposizione formalmente indecidibile costruita in *Gödel 1931*.

[324]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 48.

l'autore secondo cui due “casi speciali” del primo teorema di incompletezza sarebbero i seguenti:

(i) esistono proposizioni aritmetiche dimostrabili solo con metodi analitici;

(ii) esistono proposizioni matematiche dimostrabili solo con metodi insiemistici “che coinvolgono cardinali estremamente grandi”.

Questi due “casi speciali” del teorema di incompletezza evidenziano il fatto che già nei primi anni Trenta Gödel si fosse interrogato non solo sulle ricadute dei suoi risultati sul programma di Hilbert e quindi sui limiti che essi individuavano per i sistemi formali, ma anche sul loro significato metodologico, epistemologico e fondazionale nel senso più ampio.

La prima parte della conferenza si chiude ancora con una nota relativa alla portata fondazionale della teoria dei tipi semplici. A pagina 48 di *Gödel *1933f* possiamo infatti leggere:

> ... mi sembra ci sia una sensazione ampiamente diffusa fra i logici, relativa al fatto che vi sia qualcosa di sbagliato in questa teoria ed al fatto che ci debba essere un altro modo più soddisfacente per risolvere i paradossi. Io penso che questa sensazione sia giustificata quanto alla forma della teoria presentata nei *Principia Mathematica.* Ma qualora si sopprimano le restrizioni superflue che ho sottolineato sopra, gran parte delle obiezioni che le sono state mosse non valgono più.

12.2. Giustificazione della matematica

La seconda parte della *Cambridge lecture* si apre con una presa d'atto del fatto che se l'assiomatizzazione della matematica si può dire essere pienamente riuscita mediante la teoria dei tipi estesa nel transfinito ossia con la teoria degli insiemi, l'impresa di fornire una giustificazione o legittimazione di tali assiomi e regole è risultata del tutto fallimentare. Secondo Gödel:[325]

> Il nostro formalismo funziona perfettamente ed è del tutto inobiettabile finché lo consideriamo come un mero gioco di simboli ma non appena andiamo ad attaccare un significato ai nostri simboli, sorgono serie difficoltà.

L'autore descrive tre tipi di difficoltà che hanno ostacolato in modo essenziale il tentativo di fornire una giustificazione degli assiomi per la matematica.

[325]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 49.

1. La prima consiste nella cosiddetta *nozione non-costruttiva di esistenza* che caratterizza la logica classica. E' ben noto che la matematica classica fa ampio uso di questo tipo di nozione in particolare attraverso le *dimostrazioni non-costruttive di esistenza* e mediante le *dimostrazioni per assurdo*. Questo tipo di obiezione fa chiaramente riferimento alla critica intuizionista del *tertium non datur*.

2. Il secondo tipo di difficoltà descritto da Gödel come ancora più grave del primo consiste nell'uso di *metodi impredicativi* ed in particolare delle *definizioni impredicative*. Nei nostri sistemi formali, spiega l'autore, è possibile applicare quantificazioni esistenziali e universali non solo agli interi, ma anche alle proprietà degli interi e diventano quindi possibili dimostrazioni di esistenza non costruttive, ma soprattutto definizioni impredicative della seguente forma:[326]

> Un intero x possiede la proprietà P se per tutte la proprietà (inclusa P stessa) una certa proposizione relativa a x è vera.

Gödel osserva che questo tipo di definizione, analogamente alla legge del terzo escluso, è ammissibile solo se assumiamo la totalità delle proprietà degli interi come qualcosa di già dato, di preesistente rispetto alle nostre definizioni e persino rispetto alla nostra attività conoscitiva. Tuttavia in questa sede l'autore non si sbilancia ancora a favore del platonismo e constata, in modo puramente descrittivo, che se consideriamo le proprietà degli interi come oggetti costruiti, generati dalla nostra attività conoscitiva e cristallizzati nelle nostre definizioni, allora le definizioni impredicative non sono più legittime in quanto danno luogo a un vero e proprio circolo vizioso.

3. Il terzo tipo di difficoltà menzionato da Gödel riguarda ancora il problema della costruttività dei nostri metodi e principi matematici ed in particolare *l'assioma di scelta*. L'autore considera AC come la meno importante delle tre difficoltà fondazionali da lui citate, ma ci sono buone ragioni per credere che, da un punto di vista epistemologico anche se non da quello matematico, egli abbia sempre considerato AC come un principio non problematico in quanto implicito nella nozione stessa di *insieme infinito*. Abbiamo visto inoltre come Hilbert e Zermelo considerassero l'assioma di scelta come un principio così fondamentale da dover essere annoverato fra gli assiomi logici anziché fra quelli matematici.[327]

[326]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 50.

[327]Di fatto dagli scritti di Cantor emerge come lo stesso "scopritore" della teoria degli insiemi considerasse la buona-ordinabilità di ogni insieme come una delle caratteristiche

12.2.1. Genesi del problema della noncontradditorietà

Le riflessioni gödeliane sulle difficoltà incontrate nell'ambito del processo di giustificazione della matematica lo portano a concludere che:[328]

> ... il risultato della precedente discussione è che i nostri assiomi, se interpretati come proposizioni sensate, presuppongono necessariamente una sorta di platonismo *che non può soddisfare alcuna mente critica* e che non produce neppure l'impressione che questi assiomi siano noncontraddittori.[329]

Questa osservazione ha sollevato molte discussioni in quanto sembra essere in contraddizione non soltanto col ben-noto realismo gödeliano degli anni Quaranta ma anche con alcune tarde dichiarazioni in cui Gödel affermava di aver avuto un approccio realista in filosofia della matematica fin dai tempi dell'università ossia fin dagli anni Venti.[330] Ciò potrebbe forse essere un segno del fatto che, almeno nei primi anni Trenta, l'autore fosse molto più vicino di quanto non si sia soliti pensare a certe idee tipiche della scuola hilbertiana e del Circolo di Vienna o per lo meno che non volesse entrare in collisione con tali idee, all'epoca ampiamente diffuse e condivise.

La citazione di cui sopra sembra in realtà volta a evidenziare una delle ragioni che possono aver messo in moto le ricerche di una dimostrazione finitaria di noncontradditorietà per la matematica. Gödel afferma infatti che, sulla base dell'esperienza fatta, i metodi non-costruttivi descritti sopra non hanno mai condotto ad alcuna contraddizione, ragion per cui parrebbe possibile dimostrarne la noncontradditorietà con metodi del tutto costruttivi e inobiettabili. L'autore nota che la stessa nozione di noncontradditorietà di un sistema formale[331] sembra suggerire, proprio in forza della sua semplicità, linearità e costruttività, che questa dimostrazione sia davvero possibile.

Per Gödel una buona dimostrazione di noncontradditorietà dovrebbe essere realizzata attraverso quella parte dei metodi matematici che restano se si prescinde dai metodi non-costruttivi descritti sopra cioè attraverso la matematica intuizionista o costruttiva. L'autore osserva che il dominio di

strutturali di questa teoria.

[328]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 50.

[329]Il corsivo è mio.

[330]Cf. ad esempio *Wang 1981* e *1987*.

[331]A pagina 50 di *Gödel *1933f*, viene così definita: "se partiamo con certe formule (dette assiomi), e applichiamo ad esse, un numero arbitrario di volte, certe operazioni (date dalle regole di inferenza), non otterremo mai due formule contraddittorie, cioè due formule di cui l'una sia la negazione dell'altra".

questa parte della matematica è tutt'altro che univocamente determinato dal momento che esistono vari gradi di costruttività e corrispondentemente "vari livelli" della matematica costruttiva. A tal fine, spiega Gödel, sembra utile fissare le caratteristiche fondamentali di un sistema formale strettamente costruttivo.

12.2.2. Sistemi formali strettamente costruttivi

P1. Secondo l'autore la prima caratteristica di un sistema formale strettamente costruttivo (in breve **A**) riguarda *l'ambito di applicabilità dei quantificatori*: essi dovrebbero essere applicabili solo a insiemi infiniti che siano decidibili e quindi, in termini di proposizioni, solo a proposizioni non quantificate. Questa prima clausola definitoria è chiaramente rivolta a evitare la possibilità di un uso indiscriminato del terzo escluso e quindi a risolvere la prima delle tre difficoltà dei sistemi formali descritta sopra. Se il quantificatore esistenziale risulta applicabile solo a proposizioni che esprimono proprietà decidibili, siamo riusciti ad eliminare il problema delle dimostrazioni di esistenza non-costruttive.

P2. La seconda caratteristica di **A** menzionata da Gödel riguarda direttamente *i connettivi proposizionali* e indirettamente ancora i quantificatori. Secondo l'autore, in un sistema strettamente costruttivo la negazione non può essere applicata a formule quantificate universalmente perché ciò introdurrebbe un uso indiscriminato dei quantificatori esistenziali. I quantificatori esistenziali devono essere presenti solo come abbreviazioni di esempi concreti.[332] L'idea di Gödel è che per garantire la costruttività dei nostri sistemi occorre limitare i metodi a quelli assolutamente indiscutibili, di conseguenza per introdurre un quantificatore universale è ammessa solo l'induzione completa e per introdurre un esistenziale occorre una costruzione particolare.

P3. La terza clausola definitoria di **A** riguarda infine *i simboli di funzione e di relazione*: i primi dovranno denotare esclusivamente funzioni calcolabili e i secondi relazioni o proprietà decidibili. Ora, spiega Gödel, tutte le nozioni (predicati e funzioni) decidibili risultano sempre definibili mediante una qualche forma di recursione e di conseguenza nel complesso i metodi ammessi in questo sistema saranno sia dal punto di vista deduttivo che da quello definizionale dei metodi induttivi[333] cui l'autore attribuisce "un gra-

[332]Anche questa clausola riguarda il primo dei punti deboli dei sistemi formali classici.
[333]Ovviamente nel senso matematico del termine.

do particolarmente alto di evidenza".[334] Si noti che Gödel esprime di fatto una valutazione dei metodi induttivi che all'epoca era plausibilmente condivisa da tutti i principali indirizzi fondazionali inclusi gli intuizionisti e i predicativisti.

12.2.3. La scuola hilbertiana e l'incompletezza

Naturalmente il principale riferimento dell'autore sembra essere Hilbert, tanto è vero che egli sottolinea esplicitamente come tutti i tentativi di ottenere dimostrazioni di noncontraddittorietà da parte degli esponenti della scuola hilbertiana si siano realizzati nell'ambito di un sistema strettamente costruttivo nel senso delineato sopra. Si ha quindi l'impressione che quello che qui Gödel considera come il sistema **A** alla base della gerarchia dei sistemi costruttivi sia qualcosa di molto vicino all'aritmetica ricorsiva primitiva (**PRA**) come definita nelle *Grundlagen der Mathematik* da Hilbert e Bernays.[335] Questa impressione come vedremo sarà confermata da un'altra fonte inedita più tarda (e nello specifico successiva alla prima edizione delle *Grundlagen*) ed inoltre dai vari articoli sulla "Dialectica interpretation" che, come già sottolineato, può essere considerata un'estensione ai tipi finiti dei metodi propri di **PRA**.

Subito dopo questo riferimento al programma di Hilbert, Gödel osserva come le speranze riposte in questo tipo di progetto fondazionale siano state del tutto vanificate da "alcuni fatti recentemente scoperti". Ovviamente il riferimento implicito è il secondo teorema di incompletezza che in questa sede viene enunciato informalmente come segue:[336]

> Si può mostrare con piena generalità che non esiste alcuna dimostrazione di noncontraddittorietà di un certo sistema formale **T** che possa essere espressa in termini del sistema **T** stesso, cioè che proceda con metodi di prova che siano esprimibili nel sistema **T** stesso.

La cosa interessante di questo passaggio della conferenza è il commento che l'autore fa seguire all'enunciazione informale del risultato. A pagina 52 di *Gödel *1933f* si legge infatti:

> ... tutte le dimostrazioni intuizioniste che sono conformi ai requisiti del sistema **A** costruite fino ad ora possono essere facilmente espresse nel sistema

[334]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 51.
[335]Sebbene non sembri possibile individuare una corrispondenza filologica precisa fra i due sistemi.
[336]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 52.

> dell'aritmetica classica, e ci sono ragioni per credere che ciò continuerà a valere per qualsiasi dimostrazione saremo mai in grado di costruire.

Questa affermazione, che sembra condannare risolutamente il programma di Hilbert al fallimento, è piuttosto sorprendente perché, come abbiamo sottolineato nel capitolo 2, nell'articolo del '31 Gödel si era invece dimostrato molto cauto nel valutare le conseguenze e soprattutto il dominio di pertinenza dei suoi risultati.[337]

12.2.4. Confronto con la scuola intuizionista

La *Cambridge lecture* si chiude con un confronto del sistema formale costruttivo **A** con il modello di costruttività perseguito da Brouwer e dalla "scuola" intuizionista. Secondo l'autore la matematica intuizionista trascende tutti e tre i canoni di costruttività da lui introdotti, per le seguenti ragioni.

In primo luogo, la nozione intuizionista di negazione può essere applicata anche a proposizioni quantificate universalmente di modo che la seconda clausola di costruttività risulta violata. Di fatto, aggiunge Gödel, è possibile verificare che la nozione intuizionista di negazione non costituisce una vera restrizione dei metodi classici. Il riferimento implicito è la *traduzione negativa* con cui si dimostra la noncontraddittorietà relativa dell'aritmetica classica rispetto a quella intuizionista. Ciò, secondo l'autore, sarebbe proprio una spia del fatto che i metodi intuizionisti trascendono in modo molto forte quelli del sistema costruttivo **A.**

In secondo luogo, in un sistema come l'aritmetica di Heyting la quantificazione universale viene applicata non soltanto a collezioni decidibili ma persino a collezioni non-ben-definite come la totalità di tutte le dimostrazioni costruttive. L'esempio riportato dall'autore è quello della legge di doppia negazione debole (valida intuizionisticamente):

$$p \to \neg\neg p,$$

che lui spiega nei seguenti termini: "Data una qualsiasi dimostrazione della proposizione p, si può costruire una *reductio ad absurdum* della proposizione

[337] Gödel osserva che apparentemente la dimostrazione di noncontraddittorietà data da Herbrand nel 1931 sembrerebbe aver ottenuto quanto perseguito dal programma di Hilbert, ma che di fatto così non è in quanto il sistema lì considerato risultava in realtà essere molto più debole dell'aritmetica di Peano. Si veda in proposito la corrispondenza fra Gödel ed Herbrand in *Gödel 2003a* e la relativa nota introduttiva di Sieg.

$\neg p$".[338] Di fatto qui Gödel tende un po' a "confondere" il piano dei sistemi formali con quello delle interpretazioni intese, ma come abbiamo visto nel capitolo 3, ciò che più premeva all'autore era evidenziare il fatto che l'intuizionismo, da un lato, non introduceva genuine restrizioni rispetto alla matematica classica e, dall'altro, faceva riferimento ad una nozione di dimostrazione per molti aspetti insoddisfacente.

Proprio il fatto di utilizzare in modo essenziale la troppo vaga nozione di "dimostrazione costruttiva" fa sì che la matematica intuizionista finisca per violare anche il terzo requisito di un sistema strettamente costruttivo nel senso che:[339]

> Le totalità i cui elementi non possono essere generati da una procedura ben-definita sono, in un certo senso vaghe e indefinite quanto ai loro confini. E questa obiezione si applica, in particolare, alla totalità delle dimostrazioni intuizioniste a causa della vaghezza della nozione di costruttività.

Dall'analisi del momento giustificativo dell'attività fondazionale fornito da Gödel, sembra quindi emergere che sia l'approccio hilbertiano che quello brouweriano hanno complessivamente fallito il loro obiettivo. Ma ciò non significa che il momento giustificativo ed in particolare una dimostrazione di noncontraddittorietà per la matematica sia in assoluto senza speranza. Al contrario:[340]

> ... resta la speranza che in futuro si possano trovare altri e più soddisfacenti metodi di costruzione oltre il sistema **A** i quali ci mettano nella condizione di poter fondare l'aritmetica e l'analisi classica su di essi.

[338]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 53.
[339]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 53.
[340]Cf. *Gödel *1933f* in *Gödel 1995*, pag. 53.

13. Il problema della noncontraddittorietà

Negli anni Trenta Edgar Zilsel[341] organizzò periodicamente a Vienna dei cicli di seminari dedicati a svariati argomenti filosofici e scientifici. Nel 1938 egli propose a Gödel di tenere una conferenza sullo "status quaestionis" del problema della noncontraddittorietà. L'autore accettò e presentò la sua relazione in un incontro tenutosi in forma privata a casa dello stesso Zilsel.

Le note preparate da Gödel per quella conferenza sono state rinvenute nel *Nachlass* e pubblicate col titolo di "Vortrag bei Zilsel"[342] nel terzo volume dei *Collected works.*

13.1. Analisi generale del problema

Il *Vortrag bei Zilsel* si apre con un chiarimento del significato che l'autore attribuisce al problema della noncontraddittorietà in generale. Secondo Gödel questo problema presenta un lato matematico ed uno epistemologico.

Dal punto di vista matematico una dimostrazione di noncontraddittorietà costituisce sempre una forma di *riduzione* e più precisamente la riduzione di un certo sistema formale ad un altro.[343] L'idea sembra essere che una dimostrazione di noncontraddittorietà di un dato sistema formale $\mathbf{T}$ avverrà sempre mediante certi metodi dimostrativi formalizzati in un certo sistema formale $\mathbf{T}_0$ e quindi costituirà in ogni caso una "riduzione" di $\mathbf{T}$ a $\mathbf{T}_0$. In particolare, le specifiche forme di riduzione considerate da Gödel sono le seguenti:

(1) $\mathbf{T}_0 \vdash Wid(\mathbf{T}_0) \rightarrow Wid(\mathbf{T}), \quad \text{dove } \mathbf{T}_0 \subseteq \mathbf{T},$

(2) $\mathbf{T}_0 \vdash Wid(\mathbf{T}),$

dove $Wid(\mathbf{T})$ indica, come al solito, la noncontraddittorietà del sistema $\mathbf{T}$.

[341] Edgar Zilsel (Vienna 1981 - Oakland 1944) fu filosofo e sociologo di orientamento marxista e vicino all'ambiente del Circolo di Vienna. Escluso dalla carriera universitaria per motivi politici, si occupò di sociologia della scienza e dei rapporti fra scienze sociali e scienze naturali. Nel 1938 emigrò negli Stati Uniti dove morì suicida.

[342] Cf. *Gödel *1938a.*

[343] Si noti che la nozione di riduzione è stata anche recentemente studiata in dettaglio in particolare nell'ambito della teoria della dimostrazione. Si veda al riguardo *Niebergall 2000* in cui si sostiene una lettura della nozione di riduzione in termini di interpretabilità relativa.

Come si vede, la prima forma di riduzione è esemplificata dalle dimostrazioni di noncontraddittorietà dell'assioma di scelta e dell'ipotesi (generalizzata) del continuo rispetto alla teoria degli insiemi. Gödel qui cita solo il caso dell'*assioma di scelta* in cui si ha che sono soddisfatte entrambe le clausole di (1) ossia:

$$\mathbf{ZF} \subseteq \mathbf{ZFC}$$

e

$$\mathbf{ZF} \vdash Wid(\mathbf{ZF}) \rightarrow Wid(\mathbf{ZFC}).$$

La seconda forma, secondo l'autore, sarebbe invece istanziata dalle dimostrazioni di noncontraddittorietà delle geometrie non-euclidee rispetto alla geometria euclidea e dell'*analisi* rispetto alla teoria dei tipi semplici oppure alla teoria degli insiemi. In questo ultimo caso avremmo infatti, proprio come nello schema (2), che:

$$\mathbf{ZF} \vdash Wid(Th(\mathbb{R}))$$

dove $Th(\mathbb{R})$ sta ad indicare la "teoria dei numeri reali" cioè l'insieme di tutte e sole le proposizioni elementari soddisfatte dalla struttura $\mathbb{R}$ dei numeri reali.[344]

Chiaramente nel primo caso si ha davvero una riduzione del numero degli assiomi da dimostrare reciprocamente noncontraddittori mentre nel secondo caso si ha una riduzione solo nel senso che il problema per un dato sistema viene spostato a quello per un'altro. Gödel non sottolinea questo fatto e ribadisce invece, in polemica con Hilbert, che questo problema è sempre relativo *a certi presupposti*. Egli cita un passaggio da *Hilbert 1928* in cui si leggeva che "la matematica è una scienza senza presupposti" e lo commenta osservando che in tal modo si dà l'idea si poter procedere come se la noncontraddittorietà potesse essere derivata senza fare alcuna assunzione matematica. Questo, spiega l'autore, "non sarebbe stato corretto neppure se l'originario programma di Hilbert si fosse potuto realizzare".[345] In breve, dal punto di vista matematico, il problema della noncontraddittorietà risulta suddiviso in una successione di sotto-questioni corrispondenti alle possibili riduzioni della matematica classica.

Dal punto di vista epistemologico il problema della noncontraddittorietà consiste nel fatto che si vuole ottenere una dimostrazione che in qualche

[344]Per una definizione rigorosa di un sistema formale per i numeri reali si veda *Dalla Chiara 1968*, pagg. 42-43.
[345]Cf. *Gödel *1938a* in Gödel 1995, pag. 88.

modo ci renda certi della validità dei nostri metodi matematici. Secondo l'autore una dimostrazione di noncontraddittorietà può essere considerata *epistemologicamente soddisfacente* nei due seguenti casi:

(i) se si riduce il problema della noncontraddittorietà di un certo sistema $\mathbf{T}$ a quello di un sistema $\mathbf{T}_0$ che sia *una sottoparte propria* di $\mathbf{T}$ cioè nella situazione (1) di cui sopra, purché si abbia $\mathbf{T}_0 \subsetneq \mathbf{T}$;

(ii) se si riduce il problema della noncontraddittorietà di un sistema $\mathbf{T}$ a quello di un sistema $\mathbf{T}_0$ che sia *più evidente e affidabile* di $\mathbf{T}$.

Nel primo caso, spiega Gödel, si ha un risultato oggettivo, mentre nel secondo si ottiene un risultato che è soggettivamente condizionato dalle nozioni di "evidenza" e "affidabilità". Tuttavia, aggiunge l'autore, esiste una sostanziale concordia sul fatto che i sistemi costruttivi siano "migliori" di quelli noncostruttivi, nel senso che, anche storicamente, i matematici si sono sempre sforzati di passare da sistemi meno costruttivi a sistemi più costruttivi.

13.2. *Rahmendefinition* della nozione di costruttività

Gödel constata che il lato epistemologico del problema della noncontraddittorietà è reso difficoltoso dal fatto che fino alla fine degli anni Trenta la nozione di costruttività si era rivelata refrattaria ad ogni tentativo di definizione rigorosa. L'autore propone quindi una "definizione quadro" (*Rahmendefinition*) che dovrebbe fornire per lo meno delle condizioni necessarie di costruttività e di conseguenza una caratterizzazione minimale di un sistema formale costruttivo. Come si noterà questa *Rahmendefinition* è di fatto una rielaborazione e approfondimento del paradigma di costruttività proposto in *Gödel *1933f* e un'anticipazione della nozione di costruttività presente nella *Yale lecture* del '41 e che sarà alla base della "Dialectica interpretation".

R1. La prima clausola della *Rahmendefinition* corrisponde alla terza presente in *Gödel *1933f* (P3) e consiste nel pretendere che le operazioni e le relazioni primitive di un sistema costruttivo siano computabili, rispettivamente, decidibili. Di conseguenza, aggiunge Gödel, si possono applicare il calcolo proposizionale e le definizioni ricorsive.

R2. La seconda clausola riassume le prime due della *Cambridge lecture* (P1 e P2) e riguarda quindi l'ambito di applicabilità dei quantificatori e dei connettivi. L'idea di base è che non sono ammessi quantificatori se non come abbreviazioni. Di conseguenza, proprio come per la seconda clausola di *Gödel *1933f*, i connettivi risulteranno applicabili solo a proposizioni non-quantificate.

R3. La terza condizione della *Rahmendefinition* riguarda gli assiomi e le regole di inferenza di un sistema strettamente costruttivo. Gödel cita il calcolo proposizionale (plausibilmente classico), la regola di sostituzione e il principio di induzione completa.[346] In un certo senso questa clausola è un po' ridondante rispetto alle due precedenti e di fatto manca nel paradigma di costruttività del '33 e anche in quello del '41.

R4. Anche il quarto punto della *Rahmendefinition* costituisce una novità rispetto al '33: esso stabilisce che la totalità degli oggetti di cui si parla in un sistema formale strettamente costruttivo dovrà essere una collezione "visualizzabile". Questa clausola non è del tutto chiara ma sembrerebbe stabilire una restrizione sulla cardinalità dell'universo di discorso.

13.3. Definizione e limiti dell'aritmetica finitaria

Gödel ripete, all'inizio della terza sezione del *Vortrag bei Zilsel*, che i sistemi formali costituiscono una gerarchia con alla base la "teoria dei numeri ricorsiva" che evidentemente lui considera la realizzazione concreta della *Rahmendefinition*. L'autore puntualizza che essa è più debole dell'aritmetica di Heyting ma forse più forte del sistema formale con cui Hilbert intendeva originariamente realizzare la dimostrazione di noncontraddittorietà per l'aritmetica di Peano. Al riguardo Gödel afferma che l'induzione completa venne introdotta per la prima volta da von Neumann (richiamandosi probabilmente a *von Neumann 1927*) e tuttavia[347] in realtà la necessità di ammettere l'induzione era ben chiara nell'ambito della scuola hilbertiana fin dai primi anni Venti.[348]

L'autore richiama, con riferimento a *Hilbert 1926*, due importanti elementi del programma hilbertiano per le dimostrazioni di noncontraddittorietà. Il primo riguarda la necessità di fornire dimostrazioni le cui inferenze abbiano lo stesso livello di *affidabilità* delle inferenze tipiche della teoria dei numeri elementare. Il secondo riguarda i principi di cui ci vogliamo servire per garantire l'affidabilità della matematica: secondo *Hilbert 1926* questi principi devono potersi ottenere in modo "puramente intuitivo e finitario" sempre

[346]Si ribadisce inoltre il fatto che vengono ammesse solo definizioni ricorsive.

[347]Come osservato da Sieg e Parsons nel loro *1995*.

[348]Sieg e Parsons citano in particolare l'articolo di Bernays "Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik " (1922).

in analogia con il grado di certezza che caratterizza "le verità della teoria dei numeri". Dunque i metodi e i principi da utilizzare nel realizzare le dimostrazioni di noncontraddittorietà avrebbero dovuto avere lo stesso grado di evidenza e affidabilità dei principi e dei metodi della teoria dei numeri elementare.

La domanda centrale di questa terza sezione del *Vortrag* sembra essere la seguente: *se il punto di vista hilbertiano necessita di un'estensione, in che senso andrà ampliato? In che misura i metodi e i principi da utilizzare nelle dimostrazioni di noncontraddittorietà dovranno trascendere quelli propri della teoria dei numeri finitaria?* Gödel spiega la premessa del quesito da lui posto, sulla base del secondo teorema di incompletezza, come segue.

Supponiamo che **A** sia un sistema formale che include la teoria dei numeri finitaria, **T**. Supponiamo inoltre, per assurdo, che:

$$\mathbf{A} \vdash Wid(\mathbf{T})$$

e che il sistema **A** sia riducibile al sistema **T** nel primo senso descritto sopra, cioè nel senso che:

$$\mathbf{T} \vdash Wid(\mathbf{T}) \rightarrow Wid(\mathbf{A}).$$

Essendo **T** incluso in **A** avremo quindi che:

$$\mathbf{A} \vdash \; Wid(\mathbf{T}) \rightarrow Wid(\mathbf{A})$$

e quindi che:

$$\mathbf{A} \vdash Wid(\mathbf{A}).$$

Ma ciò è impossibile per il secondo teorema di incompletezza e quindi l'aritmetica finitaria è davvero insufficiente per lo scopo prefissato.

Secondo Gödel nel corso degli anni Trenta si sono individuate solo tre vie per una possibile estensione dei metodi finitari, due delle quali provenienti dalla scuola hilbertiana ed una dall'approccio intuizionista. Le tre proposte individuate dall'autore sarebbero:

1) l'uso (indicato da Hilbert) di *funzioni di tipo superiore*;

2) l'utilizzo (indicato da Brouwer, Heyting e Kolmogorov) di nozioni "modali" come quelle di *dimostrazione costruttiva* e di negazione in termini di *riducibilità all'assurdo*;

3) l'uso (fatto da Gentzen) dell'*induzione transfinita* fino a certi numeri ordinali costruttivi.

La più promettente di queste tre ipotesi, afferma Gödel, sarebbe la prima, la quale soddisfa tutti e quattro i punti della *Rahmendefinition*. La proposta di Gentzen soddisferebbe tre requisiti su quattro, mentre quella di matrice intuizionista (che Gödel chiama "modal-logica") soltanto due. Il resto della conferenza è dedicato ad un'analisi di queste tre proposte proprio sulla base della *Rahmendefinition*.

13.4. Funzionali di tipo superiore

La prima delle tre proposte considerate dall'autore corrisponde, almeno in parte, all'idea di base della "Dialectica interpretation" e cioè all'introduzione di funzionali (calcolabili) di tipo superiore. Come anticipato sopra Gödel attribuisce quest'idea a *Hilbert 1926*, probabilmente alla parte conclusiva dell'articolo in cui si affrontava il problema del continuo di Cantor.

Secondo l'autore, questa prima estensione dell'aritmetica finitaria consiste nell'introdurre certe funzioni variabili f definibili non solo per mezzo di funzioni previamente definite ma anche per mezzo di funzioni definibili in termini delle f e attraverso "lo schema per funzionali $\Phi(f, n, k)$ per induzione su n".[349]

Sembra che qui Gödel non abbia ancora in mente precisamente la classe dei *funzionali calcolabili di tipo finito* infatti nel quarto paragrafo di questa sezione egli parla esplicitamente di un'estensione a funzionali di tipo transfinito purché si tratti di tipi *costruttivi* in un senso opportunamente definito.

In questo sistema, aggiunge l'autore, oltre al calcolo proposizionale, alla regola di sostituzione e all'assioma di induzione, sarebbero ammesse forme multiple di recursione e l'ω-regola di Hilbert. Gödel parla anche di "aggiungere la proposizione Wid" ma non è affatto chiaro che cosa intenda con questo. Ciò che sembra invece molto chiaro è che nel 1938 l'autore non aveva ancora messo a fuoco i particolari di quello che diventerà il sistema **T** alla base della "Dialectica interpretation". Ciò sarebbe confermato dall'affermazione di Gödel secondo cui:[350]

> ... con i tipi finiti non si può dimostrare la noncontraddittorietà della teoria dei numeri ...

L'autore congettura inoltre che la noncontraddittorietà dell'analisi non sia dimostrabile neppure coi tipi transfiniti, ma considera la dimostrazione (o

[349] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 95.
[350] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 96.

eventuale refutazione) di questa congettura come un importante problema aperto.

13.5. La nozione di dimostrazione costruttiva

La seconda proposta considerata da Gödel trae spunto dall'assiomatizzazione di Heyting della logica e dell'aritmetica intuizioniste. Secondo l'autore, come notato a più riprese in vari articoli del '33, i sistemi formali di Heyting non sono affatto soddisfacenti. Questa considerazione viene qui fondata sul fatto che il sistema **HA** non soddisfa alcuna clausola della *Rahmendefinition.* Questa paradossale non-costruttività dei sistemi formali intuizionisti sarebbe confermata dal fatto che essi consentono addirittura di dimostrare la noncontradditorietà dell'aritmetica classica.[351]

Questa iniziale e radicale critica dell'intuizionismo non impedisce a Gödel di considerare possibile un recupero della problematica nozione intuizionista di "dimostrazione costruttiva" in modo tale da ottenere un sistema un po' più vicino al modello della *Rahmendefinition.* L'autore richiama innanzitutto quella che è oggi nota come "BHK-interpretation"[352] dei connettivi proposizionali intuizionisti e sottolinea il fatto che essa sottende una nozione di dimostrabilità o derivabilità costitutivamente informale, cioè essenzialmente irriducibile alla nozione di "derivabilità in un sistema formale".

Egli cita inoltre la sua traduzione modale del 1933[353] proprio in riferimento alla "BHK-interpretation" ed alla nozione di "dimostrazione costruttiva" e sottolinea di non aver allora tematizzato e discusso il fatto che quel sistema non fosse affatto costruttivo.[354]

Gödel propone di seguire l'idea della traduzione modale rimpiazzando però l'operatore monadico B con un predicato triadico:

$$B(x, y, z)$$

da leggersi intuitivamente come: "x è una derivazione di z da y".[355] Anche

[351]Cf. il capitolo 3.

[352]L'interpretazione di Brouwer, Heyting e Kolmogorov. Si veda al riguardo *Troelstra et van Dalen 1977.*

[353]Cf. il capitolo 3 sopra.

[354]Nel senso che l'operatore epistemico di dimostrabilità B non era costruttivo e inoltre il calcolo proposizionale classico veniva applicato senza restrizioni.

[355]In *Artëmov 1994* è stata formulata una "logica delle dimostrazioni" che per certi aspetti ricorda questa proposta gödeliana. Artëmov utilizza delle modalità etichettate per esprimere enunciati come "p è una dimostrazione di φ".

in questo caso l'autore non formula con precisione il sistema formale che ha in mente ma fornisce alcuni esempi di assiomi.

Il primo esempio da lui proposto è quello della *transitività* del predicato di derivazione, in simboli:

$$B(x, y, z) \wedge B(v, z, w) \rightarrow B(f(x, v), y, w).$$

Intuitivamente esso significa che: se x è una derivazione di z da y e v è una derivazione di w da z, allora una certa *trasformazione* (funzione) di x e v, $f(x, v)$, sarà una derivazione di w da y.

Un altro esempio portato da Gödel è una forma di *correttezza* o *validità* della nozione di derivazione:

$$B(x, \alpha, \varphi(y, z)) \rightarrow \varphi(y, z)$$

ossia: se x è una derivazione della formula $\varphi(y, z)$ dall'assioma o dall'insieme finito di assiomi α, allora la formula $\varphi(y, z)$ è vera.[356]

Il terzo esempio menzionato è una sorta di *principio di riflessione* della nozione di derivazione:

$$B(x, \alpha, y) \rightarrow B(z, \beta, B(x, \alpha, y)).$$

Intuitivamente, se x è una derivazione di y da un certo assioma o insieme finito di assiomi α, allora, per una z opportunamente scelta, z sarà una derivazione di $B(x, \alpha, y)$ da un assioma o insieme finito di assiomi β.

L'autore osserva che, come nel sistema per la traduzione modale, si poteva dimostrare che:

$$B\neg B(0 = 1)$$

e quindi che B non poteva coincidere con la dimostrabilità formale, così, anche in questo caso è possibile dimostrare che:

$$B(y, \alpha, \forall x \neg B(x, \beta, 0 = 1))$$

dove α, β indicano due assiomi o insiemi finiti di assiomi e y una qualsiasi derivazione di un teorema del sistema. Anche in questo caso si può dunque

[356]Si noti che nel testo Gödel usa alternativamente il predicato triadico $B(x, y, z)$ e un predicato diadico $B(x, y)$, come nell'illustrare questo secondo esempio. Noi per uniformità di notazione useremo sempre il predicato triadico.

dimostrare che il predicato di derivazione $B(x, y, z)$ non può significare "x è una derivazione formale di z da y".

Gödel conclude questa sezione dedicata alla "via modal-logica" sottoponendola ad un confronto col paradigma di costruttività della *Rahmendefinition*. Secondo l'autore questa proposta non viola le prime due clausole, R1 e R2, perché la proposizione z cui si applica il predicato $B(x, y, z)$ viene citata e non usata ossia "occorre in *suppositio materialis* come un oggetto, fra virgolette".[357]

D'altro canto, continua Gödel, questo approccio sicuramente non soddisfa le ultime due condizioni, R3 e R4, della definizione quadro. La terza clausola è evidentemente violata dagli assiomi relativi al predicato B che costituisce un'estensione essenziale dei metodi propri dell'aritmetica finitaria. La quarta condizione è violata dal fatto che fra gli oggetti sono ammesse le derivazioni di una certa proposizione da un'altra le quali costituiscono una totalità certamente più-che-numerabile. L'autore osserva che forse è possibile modificare il sistema in modo tale da rispettare anche il quarto punto (R4), ad esempio, restringendo la nozione di derivazione alle sole derivazioni del sistema. Di fatto non è chiaro il motivo per cui la totalità delle derivazioni di questo sistema dovrebbe essere numerabile.

Un'altra modifica proposta da Gödel per rendere più costruttivo questo sistema sarebbe quello di tipizzare la nozione di dimostrazione. Si rimpiazzerebbe allora il predicato $B(x, y, z)$ con una successione infinita numerabile di predicati della forma:

$$B_n(x, y, z)$$

da leggersi come "x è una derivazione di z da y nel sistema finitario di tipo n". In tal modo, osserva l'autore, diventa dimostrabile la formula:

$$B_{n+1}(x, y, \neg B_n(z, v, 0 = 1))$$

cioè la proposizione secondo cui nel sistema finitario di tipo $n + 1$ è dimostrabile che il sistema finitario di tipo n è noncontraddittorio.

Come si sarà notato l'idea di introdurre i tipi, da un lato, sembra ancora una volta anticipare i tipi finiti della "Dialectica interpretation", dall'altro, ricorda l'opinione espressa in *Gödel *1933f* secondo la quale anziché un solo sistema formale per la matematica, in conseguenza del fenomeno dell'incompletezza, siamo costretti a ricorrere ad una successione di sistemi

[357] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 101.

formali dotati di forza deduttiva crescente, ciascuno dei quali può dimostrare la noncontraddittorietà del sistema formale immediatamente precedente.

Per Gödel, questa seconda proposta di estensione del finitismo, pur essendo la peggiore delle tre ha un notevole valore euristico che sarebbe stato confermato dal fatto che Gentzen vi avrebbe fatto riferimento nella costruzione della sua dimostrazione di noncontraddittorietà dell'aritmetica.

13.6. Induzione su ordinali transfiniti

Nella penultima ampia sezione del *Vortrag* l'autore illustra il significato dell'induzione su un ordinale transfinito maggiore di ω e spiega come questo strumento deduttivo[358] sia stato utilizzato da Gentzen per dimostrare la non contraddittorietà dell'aritmetica di Peano. Gödel osserva che già all'interno dell'aritmetica finitaria è possibile definire certi ordinali della seconda classe numerica, come $\omega + \omega$, ed è dimostrabile che "sono possibili dimostrazioni e definizioni sulla base di questi ordinali".[359]

Secondo l'autore ciò, da un punto di vista finitario, significa che in un certo sistema formale **T** è possibile definire una relazione d'ordine totale $\overset{R}{<}$ ed è inoltre dimostrabile che questa relazione è ben-fondata, cioè che data una catena della forma:

$$... \ x \overset{R}{<} y \overset{R}{<} z \overset{R}{<} v \overset{R}{<} ...$$

ogni sua sottocatena ha un elemento minimale. Se in **T** si ha ciò, spiega Gödel, allora in quel sistema sono ammissibili due nuovi schemi che generalizzano, rispettivamente, l'induzione completa e la recursione primitiva dall'usuale ordinamento $<$ di ω all'ordinamento $\overset{R}{<}$ di un certo ordinale transfinito α. In tal modo, aggiunge l'autore, si ottiene nel dato sistema **T** lo schema di induzione transfinita fino all'ordinale α, cioè il principio per cui se $\beta \leq \alpha$ allora:

$$\left(\forall x \left(x \overset{R}{<} \beta \rightarrow \varphi(x)\right) \rightarrow \varphi(\beta)\right) \rightarrow \forall y \varphi(y). \qquad (\mathsf{T\text{-}IND}_\alpha)$$

Analogamente per le definizioni avremo che se le funzioni $g_1, ..., g_n$ sono *regressive* cioè tali che per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ e per ogni $x \in \alpha$:

$$g_i(x) \overset{R}{<} x$$

[358] Assieme al corrispondente strumento definizionale della recursione transfinita.

[359] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 102.

allora, se h è una funzione previamente definita avremo che esiste una e una sola funzione f tale che:

$$f(x) = h\left(f(g_1(x)), ..., f(g_n(x))\right). \qquad (\mathsf{T\text{-}REC}_\alpha)$$

Ciò, osserva Gödel, è possibile per ordinali transfiniti qualsiasi purché nel sistema formale in considerazione sia possibile dimostrare la buona-fondatezza della relativa relazione d'ordine. L'autore afferma che già l'induzione fino a ω^ω non è dimostrabile nella teoria finitaria dei numeri ma in essa è ammissibile l'induzione su ogni ordinale $\beta < \omega^\omega$. Questa osservazione è piuttosto sorprendente perché la dimostrazione rigorosa del fatto che ω^ω sia l'ordinale *proof-teoretico* di **PRA** è stata ottenuta solo negli anni Sessanta da Alonzo Church e da James Guard.[360]

Riferendosi finalmente in modo diretto a *Gentzen 1936*, Gödel richiama il fatto che ci sono ordinali di cui non è possibile dimostrare la buona-fondatezza neppure nell'intera aritmetica di Peano.[361] L'esempio proposto dall'autore è chiaramente quello di ε_0 ossia l'ordinale che viene intuitivamente definito come il primo punto fisso dell'esponenziale su ordinali, cioè come il più piccolo ordinale transfinito ε che gode della proprietà secondo cui:[362]

$$\varepsilon = \omega^\varepsilon.$$

Gödel richiama la definizione induttiva dell'esponenziazione su ordinali, cioè:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2, \\ 2^\beta &= \sum_{x<\beta} 2^x, \end{aligned}$$

dove ovviamente il simbolo Σ indica la sommatoria ordinale e cioè la naturale generalizzazione ad un numero arbitrario di addendi della somma ordinale. L'autore osserva che iterando numerabilmente il passaggio ("la transizione") da α a 2^α si ottiene ε_0 ossia che se si desse questo passaggio doppiamente transfinito "questo ordinale si darebbe perciò immediatamente".[363] Egli

[360] Cf. le note inedite di Church "The consistency of primitive recursive arithmetic" e la tesi di dottorato di James Guard *The independence of transfinite recursive induction up to ω^ω in recursive arithmetic* (cf. al riguardo la bibliografia di *Gödel 1995*).

[361] Che qui viene indicata da Gödel come "aritmetica transfinita" nel senso che **PA** viola tutti i requisiti di costruttività della *Rahmendefinition.*

[362] Vedi al riguardo *Schütte 1977.*

[363] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 107.

sembra quindi voler dare qui un'immagine intuitiva di ε_0 nei seguenti termini:

$$\varepsilon_0 = \underbrace{2^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}}}_{\omega-\text{volte}}.$$

Questo passaggio, osserva l'autore, è chiaramente impredicativo e di conseguenza non è realizzabile né nell'aritmetica finitaria, **PRA**, né nell'aritmetica "transfinita", **PA**. Di fatto qui Gödel non sottolinea due importanti fatti relativi all'ordinale ε_0.

Il primo riguarda *le ragioni* della non-ammissibilità di $\mathsf{T\text{-}IND}_{\varepsilon_0}$ in **PA**. L'induzione fino a ε_0 non è ammissibile in **PA** semplicemente perché essa costituisce un mezzo per dimostrare la noncontraddittorietà di questo sistema formale. Se essa fosse ammissibile in **PA** allora avremmo un sistema formale *sufficientemente potente* che dimostra la sua propria noncontraddittorietà. Ma ciò sarebbe assurdo per il secondo teorema di incompletezza.

Il secondo fatto che l'autore non menziona è che ε_0 è di fatto il più piccolo ordinale transfinito che consente di dimostrare la noncontraddittorietà di **PA**. Questa lacuna nell'esposizione non sarebbe di per sè sorprendente poiché la dimostrazione del fatto che ε_0 è l'ordinale "proof-teoretico" di **PA** venne pubblicata solo nel 1939 da Hilbert e Bernays.[364] Tuttavia internamente al testo ciò lascia un po' perplessi poiché, come notato sopra, Gödel cita l'analogo risultato relativo a ω^ω e **PRA**.

L'osservazione forse più interessante di questa sezione del *Vortrag* riguarda però il valore epistemologico e fondazionale dell'induzione transfinita fino a ε_0 che l'autore giudica nei seguenti termini:[365]

> ... non si negherà un alto grado di intuitività all'inferenza di induzione su ε_0 ... così come, in generale, alla procedura di definire un ordinale per induzione su ordinali (anche se questa è una procedura impredicativa).

Questa citazione, oltre a evidenziare il giudizio complessivamente positivo dell'autore rispetto alla dimostrazione di Gentzen, è una chiara anticipazione di due delle tendenze che improntano tutta la sua filosofia della matematica "matura". La prima consiste nell'utilizzo di una nozione allargata (rispetto alla tradizione) dei termini "evidenza" ed "intuizione" cui certamente Gödel non sembra attribuire la tradizionale proprietà dell'*immediatezza*.

[364] Cf. *Hilbert et Bernays 1939*.

[365] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 106.

La seconda riguarda le definizioni impredicative la cui centralità per la filosofia della matematica gödeliana risale addirittura al 1933 e trova nel *Vortrag* un'ulteriore forte conferma, da un lato, in quanto delimitante la nozione di costruttività alla base della *Rahmendefinition*, dall'altro, proprio in sede di valutazione della dimostrazione di Gentzen.

Il sistema di Gentzen è finitario?

L'analisi della proposta di Gentzen per un'estensione del finitismo prosegue nel *Vortrag* con un confronto dei metodi ammessi nella dimostrazione dell'*Hauptsatz* con il paradigma di costruttività proposto da Gödel. Secondo l'autore il sistema di Gentzen soddisfa tre dei quattro punti della *Rahmendefinition*. Non soddisfa R3 in quanto, oltre all'ordinaria induzione completa, qui vi si ammette l'induzione transfinita fino a ε_0. Tuttavia, secondo l'autore, questa trasgressione non è poi così "drastica" poiché l'induzione transfinita "la si può considerare come una generalizzazione dell'ordinaria induzione".[366] Torna anche qui una valutazione positiva dei metodi di Gentzen cui si aggiunge però il seguente commento:[367]

> Va notato che Gentzen cercò di dare una "dimostrazione" di questa regola di inferenza e sostenne persino che questa era la parte essenziale della sua dimostrazione di noncontraddittorietà. In realtà non è affatto una questione di dimostrazione bensì un *appello all'evidenza* - che dopo tutto è anche chiaro.[368]

Con ciò torna l'idea che un principio altamente astratto e impredicativo come l'induzione transfinita fino a ε_0 possa essere qualificato come evidente. Al riguardo il testo del *Vortrag* sembra indicare che nel corso della conferenza Gödel abbia citato alcuni passi dell'articolo di Gentzen del '36, forse, come suggeriscono Sieg e Parsons,[369] alcuni dei paragrafi conclusivi. Nel paragrafo 15.4 di *Gentzen 1936* leggiamo ad esempio:

> Io ora asserisco (teorema di "induzione transfinita"): Tutti i numeri ordinali ... sono "*accessibili*" nel seguente senso: il primo numero ordinale [transfinito ω] è considerato accessibile; se tutti i numeri minori di un [dato] numero β sono stati riconosciuti come "accessibili", allora β è anch'esso considerato accessibile.

[366]Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 107.
[367]Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 106.
[368]Il corsivo è mio.
[369]Cf. *Sieg et Parsons 1995*.

Dopo la "presunta" dimostrazione condotta per induzione completa, Gentzen conclude che:[370]

> Per mezzo del "teorema di induzione transfinita" la *finitezza della procedura di riduzione* per derivazioni arbitrarie segue immediatamente. Se le finitezza della procedura di riduzione è già stata dimostrata per tutte le derivazioni il cui numero ordinale è minore di un numero ordinale β, allora questo vale anche per ogni derivazione con numero ordinale β; infatti attraverso un *singolo* passo della derivazione quest'ultima derivazione viene trasformata in una derivazione con un numero ordinale *minore* o in una derivazione in forma ridotta.

E conclude quindi dicendo:[371]

> Così la proprietà della finitezza della procedura di riduzione si trasmette dalla totalità delle derivazioni con numeri ordinali *minori* di β alle derivazioni con numero ordinale β; per il teorema di induzione transfinita questa proprietà vale perciò per *tutte* le derivazioni con numeri ordinali *arbitrari*.

Qui l'appello all'induzione transfinita è essenziale non solo dal punto di vista matematico e metodologico, ma anche da quello epistemologico e fondazionale in quanto il fatto che la dimostrazione dell'*Hauptsatz* sia finitaria riposa su uno strumento deduttivo la cui ammissibilità è rivendicata, secondo Gödel a torto, come costruttivamente dimostrabile.

Il commento dell'autore a queste o simili considerazioni di Gentzen è che in questa circostanza avrebbe più senso "formulare un assioma con precisione e dire che esso non è ulteriormente riducibile".[372] L'idea, tipicamente gödeliana, che emerge qui in modo ancora molto implicito e indiretto è che laddove ci si scontra con un concetto o con un principio plausibilmente irriducibile a quelli noti, occorre considerare la possibilità di estendere la classe dei nostri concetti e principi mediante un nuovo assioma.[373] Al riguardo Gödel sottolinea, con una punta di ironia, che il fatto di considerare l'induzione transfinita come un teorema anziché come un nuovo assioma rientra nell'atteggiamento tipico della scuola hilbertiana consistente nel tentativo di dimostrare una certa conclusione senza far ricorso ad alcuna premessa. In particolare ciò evidenzierebbe "l'impulso dell'allievo di Hilbert a derivare qualcosa dal nulla".[374]

[370]Cf. *Gentzen 1936* in *Gentzen 1969*, pag. 193.

[371]Cf. *Gentzen 1936* in *Gentzen 1969*, pag. 193.

[372]Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pagg. 106,108.

[373]Come abbiamo spiegato nel capitolo 11, su quest'idea sarà basato "programma di Gödel".

[374]Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 108.

Il resto della sesta sezione del *Vortrag* è dedicato ad un'analisi un po' più tecnica e particolareggiata della dimostrazione di Gentzen in cui noi non ci addentreremo. Vale tuttavia la pena di ricordare che l'autore sottolinea come l'analogia osservata da Gentzen fra la sua strategia e l'estensione modal-logica del finitismo sia piuttosto vaga. Di fatto si può invece rilevare una maggior analogia della dimostrazione di Gentzen con l'idea dei funzionali.[375] Gödel spiega che nella strategia dimostrativa di Gentzen si ha una *riduzione* ossia una dimostrazione costruttiva di una certa proposizione transfinita φ della forma:

$$\forall x \exists y \forall z \exists v A\,(x, y, z, v)$$

allorchè siano reperibili opportuni funzionali $f(x)$ e $g(x, z)$ tali che si abbia una dimostrazione costruttiva di:

$$\forall x \forall z A\,(x, f(x), z, g(x, z))\,.$$

In un commento *a latere* al manoscritto del *Vortrag* l'autore rileva un ulteriore elemento di affinità fra la via funzionale e quella di Gentzen consistente nel fatto che in entrambi i casi "l'ampia nozione di dimostrazione" viene rimpiazzata dall'altrettanto ampia, ma matematicamente più precisa, nozione di funzionale.

13.7. Valore epistemologico del finitismo (esteso)

Gödel conclude il *Vortrag bei Zilsel* con alcune considerazioni generali sulle tre proposte analizzate nella conferenza e, di fatto, sul programma di Hilbert stesso. In particolare, l'autore si sofferma sui due seguenti problemi epistemologici fondamentali:

1) dimostrare la noncontraddittorietà di un dato sistema formale **T** per la matematica attraverso una delle tre proposte di estensioni del finitismo viste sopra ha un valore epistemologico nel senso di fornire un fondamento più certo di **T**?

2) il fatto che sia necessario estendere il finitismo (in uno dei modi visti sopra o meno) costituisce un totale fallimento del programma di Hilbert cioè un abbandono di qualche elemento essenziale del finitismo hilbertiano?

[375] Ed in particolare con quella che è oggi nota con la *no-counterexample-interpretation* di Georg Kreisel.

Per rispondere al quesito 2) Gödel propone la seguente schematizzazione del significato epistemologico che avrebbe avuto un'eventuale realizzazione del programma di Hilbert nella sua forma originale. Una dimostrazione di noncontraddittorietà tramite un sistema finitario **F** di un sistema **M** per la matematica classica:

a) avrebbe *ridotto* il problema della noncontraddittorietà di **M** a quello di **F** rendendo in tal modo superflue molte assunzioni proprie della matematica classica e

b) avrebbe *ricondotto* la matematica classica (la "matematica ideale" nei termini di Hilbert) ad una base concreta "sulla quale chiunque sarebbe potuto essere d'accordo" (la "matematica reale").

In tal senso, secondo l'autore, "se il programma di Hilbert si fosse potuto realizzare, ciò sarebbe stato senza dubbio un risultato di enorme valore epistemologico".[376] Il punto è però che questo programma non può essere perseguito nella sua forma originaria.

Nelle tre forme corrispondenti alle tre proposte di finitismo esteso viste sopra, si perde certamente la possibilità di ottenere l'obiettivo a) visto che già per dimostrare la noncontraddittorietà dell'aritmetica occorrono strumenti essenzialmente più forti di quelli aritmetici.

Per quanto riguarda l'obiettivo b), prosegue Gödel, ciascuna delle tre proposte viste sopra ottiene un risultato differente. L'estensione mediante funzionali lo realizza in un grado molto alto, l'approccio di Gentzen ad un livello piuttosto alto e infine la via modal-logica non lo realizza affatto.

Tuttavia ci sembra che per l'autore il lato epistemologico del problema della noncontraddittorietà sia rappresentato più dal punto a) che non dal b) infatti egli conclude il *Vortrag* affermando che la portata epistemologica del programma di Hilbert:[377]

> ... risulta in realtà assai ridotta per il fatto che tutti questi vari sistemi non sono contenuti nella teoria dei numeri finitaria.

In tal senso la risposta ad entrambi i quesiti 1) e 2) sembrerebbe negativa.

Allo studio della noncontraddittorietà mediante una qualche forma di finitismo esteso Gödel attribuisce comunque un intatto e importante valore

[376] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 113.
[377] Cf. *Gödel *1938a* in *Gödel 1995*, pag. 113.

matematico. Ancora una volta, il giudizio dell'autore negli inediti degli anni Trenta risulta molto lucido nel prendere atto del completo mutamento del panorama fondazionale, ma al tempo stesso molto più vicino di quanto non si sia soliti credere ad alcune istanze del programma di Hilbert ed allo spirito di quelli che nei decenni a venire saranno le filiazioni del fondazionalismo hilbertiano, come ad esempio lo studio delle progressioni autonome di sistemi formali di Feferman[378] e quello dei principi di induzione iterati di Feferman, Kreisel, Buchholz e Schütte.[379]

[378]Cf. *Feferman 1962.*
[379]Cf. *Buchholz et alii 1981.*

Gli anni Quaranta

E' già stato richiamato il fatto che il periodo in cui la filosofia della matematica di Gödel trova le sue prime espressioni pubbliche e assurge alla sua forma matura fu quello degli anni Quaranta. Così, per lo meno, viene usualmente descritto lo sviluppo intellettuale di Gödel e in effetti questo decennio è inaugurato dalla *Yale lecture*, nel 1941, e si conclude col saggio intitolato "A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy", nel 1949.[380]

Le due pietre miliari cui si fa usualmente riferimento nell'esposizione della filosofia della matematica di Gödel sono rispettivamente del 1944 e del 1947 (il *Russell paper* e la prima edizione del *Cantor paper*) e del 1946 è anche la *PBC* in cui Gödel solleva un'importante questione epistemologica relativa alla nozione di *assolutezza*.

In questa seconda sezione cercheremo proprio di analizzare nel dettaglio questi "classici" dei fondamenti della matematica del Novecento. Ci soffermeremo inoltre su un inedito della seconda metà degli anni Quaranta dedicato alla teoria della relatività in relazione alla filosofia kantiana dello spazio-tempo.

Il nostro obiettivo sarà quello di mettere in evidenza come la filosofia della matematica gödeliana in questo decennio, essendo espressa tramite formulazioni molto caute e filosoficamente non impegnative, possa essere verosimilmente interpretata in termini di un *realismo ingenuo* o *platonismo naïf*.

14. La logica matematica di Russell

Nella seconda parte abbiamo sottolineato che l'idea alla base del modello degli insiemi costruibili era sì legata tecnicamente a un'idea di Hilbert, ma che dal punto di vista concettuale il riferimento fu in realtà soprattutto quello di Russell. Al riguardo in più luoghi Gödel arriva a dire che il lemma fondamentale della sua dimostrazione di noncontraddittorietà (relativa) dell'ipotesi del continuo non è altro che una generalizzazione a ordini transfiniti dell'assioma di riducibilità.

Di fatto l'ambito insiemistico non è neppure quello in cui l'influenza di Russell sull'opera di Gödel si manifesta nel modo più clamoroso. Come abbiamo visto nel capitolo 2, nell'articolo del '31 sui teoremi di incompletezza

[380]D'ora in avanti ci riferiremo a questo articolo ripubblicato nel secondo volume dei *Collected Works* come al *relativity paper*.

i *Principia Mathematica* vengono menzionati addirittura nel titolo e Gödel non fu mai troppo generoso quanto a citazioni e riferimenti bibliografici. Nel capitolo 12 abbiamo visto inoltre come Gödel considerasse la teoria assiomatica degli insiemi stessa come null'altro che un opportuno raffinamento ed estensione della teoria dei tipi.

Vedremo ora quale profonda impronta lasciò Russell sulla filosofia della matematica di Gödel. Una traccia così chiara da far pensare che alcune delle idee fondamentali dell'autore siano state mutuate proprio dalla filosofia radicalmente realista che caratterizzò il pensiero russelliano nei primi anni del Novecento. In tal senso sembra persino possibile che l'interesse nutrito e coltivato da Gödel rispetto alla filosofia di Leibniz possa essere passata attraverso il filtro di Russell il quale nel 1900 scrisse il celebre lavoro "A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz".

L'articolo: vicende editoriali

Nel novembre del 1942 Paul Schlipp invitò per lettera Gödel a contribuire al volume dal titolo *The philosophy of Bertrand Russell* nella collana *Library of living philosophers* della Northwestern University at Evanstone. Schlipp propose il titolo "Russell's mathematical logic" che sarebbe poi stato mantenuto dall'autore e sottolineò il compiacimento manifestato dallo stesso Russell nell'apprendere del suo possibile contributo.

Gödel accolse l'invito e spedì l'articolo circa sei mesi dopo, nel maggio del 1943. Il quinto volume dei *Collected works*, pubblicato nel 2003, ci dà la possibilità di apprezzare il carteggio che seguì, fra l'autore e Schlipp, nei mesi successivi al fine di arrivare ad una versione dell'articolo che soddisfacesse l'autore e il curatore. Alla fine Gödel inviò a Schlipp la versione finale del suo *paper* solo il 28 settembre 1943.[381]

Nel frattempo Russell, incaricato da Schlipp di redigere una risposta a ciascuno degli articoli da inserire nel volume, aveva già terminato il lavoro e non ritenendosi in grado di affrontare in breve tempo questioni delicate e complesse come quelle logico-matematiche, decise di non rispondere all'articolo di Gödel.[382]

[381] *Gödel 1944* venne ristampato due volte, nel 1964 e poi nel 1972, senza sostanziali modifiche testuali ma con almeno un'importante nota aggiuntiva.

[382] Come notato in *Rodríguez-Consuegra 1994*, è recentemente emerso dalla corrispondenza fra Russell e Schlipp che la versione dell'articolo inviata da Gödel a Schlipp nel maggio 1943 non fu mai letta da Russell in quanto "Gödel proibì esplicitamente a Schlipp

La collaborazione con Schlipp nell'ambito della collana dedicata ai "living philosophers" non si limitò a questo contributo ma proseguì dando luogo al *relativity paper* pubblicato nel 1949 ed alla serie dei *Carnap papers* che non furono mai pubblicati.

Temi trattati dall'articolo

L'articolo sulla logica di Russell è caratterizzato da una straordinaria maestria compositiva[383] ma al tempo stesso presenta un'indubbia complessità di decifrazione e di lettura.

I principali temi russelliani trattati da Gödel in questa sede sono:

- la teoria delle descrizioni;
- la *limitation-of-size theory* e la *zig-zag theory*;
- il principio del circolo vizioso;
- la *no-class theory*;
- la teoria dei tipi.

Ciò tuttavia non esaurisce affatto i contenuti dell'articolo che "paradossalmente", pur essendo dedicato alla logica di Russell, contiene almeno quattro dei *Leitmotiven* della filosofia della matematica di Gödel e cioè:

- il realismo concettuale;
- il "problema" delle definizioni impredicative;
- l'analogia fra matematica e scienze empiriche;
- il problema dell'analiticità della matematica.

Nel seguito cercheremo di mostrare come, lungo lo svolgersi dell'articolo, i temi gödeliani risultino essere profondamente legati a quelli russelliani. Vedremo ad esempio come il tema delle definizioni impredicative sia intimamente correlato al principio del circolo vizioso e come il problema dell'analiticità della matematica venga valutato da Gödel nell'ambito dei *Principia Mathematica*.

---

di mostrargliela".

[383] Si pensi all'andamento circolare per cui il testo si apre e si chiude con un riferimento a Leibniz.

14.1. Che cos'è la logica matematica?

Il *Russell paper* si apre con una precisa definizione di che cosa Gödel intende per "logica matematica" o, equivalentemente, "logica formale".[384] Secondo l'autore questa disciplina presenta due aspetti ben-distinti anche se, plausibilmente, non privi di profonde interrelazioni. Da un lato, per "logica matematica" Gödel intende infatti:[385]

> ... un ramo della matematica che studia classi, relazioni, combinazioni di numeri, etc ... invece di numeri, funzioni, figure geometriche ...

D'altro canto, con l'espressione "logica matematica" egli intende anche:[386]

> ... una scienza precedente a tutte le altre che contiene le idee e i principi che stanno alla base di tutte le scienze.

Secondo l'autore questo secondo aspetto della logica matematica sarebbe stato concepito per la prima volta da Leibniz dell'ambito del progetto di costruzione di una *Characteristica universalis*.

Gödel osserva, proprio come nelle prime righe del suo **1933f*, che i primi ad aver intrapreso concretamente un tentativo almeno parzialmente vicino agli intenti di Leibniz furono Gottlob Frege e Giuseppe Peano. Di fatto il principale riferimento qui sembra essere Frege in quanto interessato soprattutto all'aspetto fondativo della logica matematica, mentre Peano, come lo stesso Gödel afferma, "ebbe maggior interesse per le applicazioni del calcolo logico alla matematica".[387]

L'autore considera i *Principia Mathematica* come un'opera che ha saputo coniugare la prospettiva ideografica di Frege con quella più effettiva e matematica di Peano ed allo stesso tempo ha raccolto l'eredità della teoria delle relazioni di Peirce e Schröder. In tal senso Gödel afferma che:[388]

> Nei *Principia* non solo la teoria degli insiemi di Cantor, ma anche la teoria della misura vengono trattate dal punto di vista astratto della teoria delle relazioni.

[384]Si noti che Gödel considera le due espressioni come sinonime ma non necessariamente debba essere così. Si potrebbe infatti pensare che la logica formale sia lo studio *rigidamente normato* del ragionamento corretto, mentre la logica matematica sia lo studio *metodologicamente matematizzato* del ragionamento corretto.

[385]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 119.

[386]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 119.

[387]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 119.

[388]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 120.

Questo grande merito che egli attribuisce a Russell di aver saputo raccogliere differenti istanze delle ricerche logiche ottocentesche sarebbe tuttavia controbilanciato da una evidente mancanza di "precisione formale nei suoi fondamenti ... [tanto] da rappresentare per questo un notevole passo indietro rispetto a Frege".[389] I principali difetti che Gödel rileva nel sistema dei *Principia* sarebbero:

- l'assenza di un'esposizione precisa della sintassi;

- la conseguente mancanza di rigore delle dimostrazioni;

- l'uso di regole di traduzione anziché di definizioni esplicite per introdurre nuovi simboli.

Nel complesso, tuttavia, egli definisce il sistema dei *Principia* come la "prima presentazione comprensiva e approfondita della logica matematica e della derivazione della matematica ...".[390] In questo senso si capisce meglio perché nel titolo di *Gödel 1931* compaia proprio il sistema dei *Principia* anziché, ad esempio, l'aritmetica di Peano o la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

14.1.1. Logica e zoologia

Secondo il nostro autore, l'ambito logico-matematico in cui Russell sembra aver prodotto le idee più interessanti sarebbe quello "concernente l'analisi dei concetti e degli assiomi che sono alla base della logica matematica".[391] Di conseguenza egli rinuncia ad un'analisi dettagliata dei *Principia*[392] e si rivolge invece ad alcuni temi scelti della produzione logico-matematica di Russell.

Gödel osserva che uno degli aspetti più sorprendenti delle riflessioni russelliane in ambito logico-matematico è il suo "spiccato atteggiamento realista". Al riguardo l'autore cita un passo della *Introduction to mathematical philosophy* in cui Russell paragona la logica alla zoologia dicendo che:[393]

> La logica ha a che fare col mondo reale tanto quanto la zoologia, sebbene in termini più astratti e generali ...

[389]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 120.
[390]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 120.
[391]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 120.
[392]Per la quale rimanda all'articolo di Quine "Whitehead and the rise of the modern logic" pubblicato nel primo dei volumi curati da Schlipp della *Library of living philosophers*.
[393]Cf. *Russell 1919*, pag. 196.

Questa citazione è piuttosto sorprendente dal momento che nel 1919 Russell era già passato da un approccio realista ad uno molto più costruttivista relativamente agli oggetti della logica e della matematica. Di fatto lo stesso Gödel ammette che "col tempo questo atteggiamento [realista] è andato attenuandosi e comunque è stato sempre più forte in teoria che in pratica".[394]

L'idea dell'autore è che le affermazioni teoriche di Russell relative all'esistenza oggettiva dei concetti non siano quasi mai andate di pari passo con un atteggiamento realista nell'affrontare concreti problemi logici, tanto è vero che:[395]

> Quando [Russell] si occupava di un problema concreto, gli oggetti da analizzare (ad esempio le classi o le proposizioni) si convertivano subito ... in "finzioni logiche" ...

14.1.2. Principi logici e leggi di natura

Gödel osserva che il paragone fra gli oggetti della logica e quelli della zoologia non costituisce una semplice "boutade" ma sembra essere la spia di una più profonda analogia scorta da Russell fra matematica e scienze empiriche. L'autore afferma che, in una delle prime opere, il grande filosofo inglese paragona gli assiomi della logica e della matematica alle leggi di natura, e l'evidenza logica alla percezione sensibile. In tal senso, spiega Gödel, gli assiomi logici proprio come le leggi fisiche non necessiterebbero neppure di essere autoevidenti, ma sarebbero legittimati già dal fatto di rendere possibile la deduzione di certi fatti logicamente evidenti.

Qui l'autore non si limita a descrivere il punto di vista di Russell ma afferma anche:[396]

> Credo che questo punto di vista ... sia stato abbondantemente giustificato dagli sviluppi successivi e c'è da aspettarsi che lo sia ancora di più in futuro.

Gli sviluppi successivi sarebbero poi chiaramente i risultati di incompletezza ed è proprio richiamando i risultati del '31 che Gödel ci chiarisce anche in che senso l'evidenza logica ossia l'intuizione logico-matematica può essere paragonata alla percezione sensibile. A pagina 121 del *Russell paper* leggiamo infatti:

---

[394]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 121.
[395]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 121.
[396]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 121.

> E' stato messo in luce che (supponendo che la matematica moderna sia non-contraddittoria) la soluzione di certi problemi aritmetici richiede l'uso di assunzioni che trascendono essenzialmente l'aritmetica, cioè *il dominio dotato di quel tipo di evidenza elementare indiscutibile che più appropriatamente può essere paragonato con la percezione sensibile.*[397]

Dunque nel 1944 il punto di vista di Gödel sulla *analogia matematica/scienze empiriche* sembra ancora limitato entro confini molto ristretti che tendono a renderlo facilmente condivisibile persino per positivisti e per formalisti *à la* Hilbert. Che infatti l'intuizione matematica finitaria o concreta sia paragonabile alla percezione sensibile non sorprende affatto dal momento che la prima non è altro che la restrizione della seconda all'ambito delle configurazioni finite di simboli.

14.1.3. Nuovi contenuti e perdita della certezza

In queste prime pagine del *Russell paper* si trova già un cenno molto chiaro al programma di Gödel laddove si legge:[398]

> ... sembra probabile che per risolvere questioni della teoria astratta degli insiemi ... siano necessari *nuovi assiomi basati su idee finora sconosciute.*[399]

Qui il riferimento è chiaramente il problema del continuo e il correlato problema della costruibilità e però sembra emergere il fatto interessante che, secondo l'autore, i nuovi assiomi per la teoria degli insiemi non necessariamente debbano provenire dall'ambito degli assiomi forti dell'infinito o dei cosiddetti *grandi cardinali.* Se infatti Gödel avesse voluto far riferimento solo a questo tipo di nuovi assiomi molto probabilmente non avrebbe parlato di "idee finora sconosciute".[400]

Pensando forse a grandi problemi insoluti come la congettura di Goldbach o il teorema di Fermat, Gödel afferma poi che:[401]

> Forse anche le difficoltà, apparentemente insormontabili, che altri problemi matematici hanno presentato per molti anni, sono dovute al fatto che non si sono ancora trovati gli assiomi necessari.

[397]Il corsivo è mio.
[398]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 121.
[399]Il corsivo è mio.
[400]Questa interpretazione sembra avvalorata, ad esempio, dal fatto che l'ultima proposta gödeliana per risolvere il problema del continuo di Cantor non era un assioma dei grandi cardinali.
[401]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 121.

Di conseguenza, la matematica assume un aspetto più "empirico", perde il suo tradizionale aspetto di sistema chiuso di verità autoevidenti e va considerata come un corpus di conoscenze passibile di revisioni ed estensioni.

14.2. Russell e i paradossi

La parte centrale del *Russell paper* è dedicata ai vari tentativi intrapresi da Russell nei primi vent'anni del Novecento per evitare i paradossi che lui stesso aveva contribuito a mettere in evidenza. Gödel esprime un giudizio lusinghiero nei confronti delle ricerche russelliane nell'ambito dei paradossi dicendo che:[402]

> L'analisi di Russell liberò i paradossi della teoria degli insiemi di Cantor da ogni tecnicismo matematico, mettendo così in luce il fatto che le nostre intuizioni logiche (cioè le intuizioni riguardanti nozioni come: verità, concetto, ente, classe, ecc...) sono autocontraddittorie.

Questo giudizio è effettivamente confermato dal fatto che il paradosso di Russell è molto più noto fra i filosofi ad esempio di quello di Burali-Forti proprio perché il primo prescinde dalla terminologia specifica e di fatto dalle parti avanzate della teoria degli insiemi, mentre per capire il secondo occorre conoscere per lo meno la nozione cantoriana di numero ordinale.

14.2.1. Zig-zag theory e limitazione di grandezza

Secondo il nostro autore, Russell avrebbe individuato la radice dei paradossi della teoria degli insiemi nell'*assioma di comprensione* (CA) ossia nell'assunzione che per ogni formula-ben-formata esiste la classe degli oggetti che la soddisfano ovvero nell'assunzione che ogni concetto esiste come "entità separata".[403]

Dunque, prosegue Gödel, una volta esclusa l'esistenza dell'estensione di ogni formula-ben-formata,[404] Russell si trovò di fronte al problema di stabilire in quali circostanze o sotto quali condizioni è possibile assumere consistentemente che l'estensione di una certa formula esiste. Secondo il nostro autore, il filosofo di Cambridge propose dapprima una via *estensionale* ed una via *intensionale* per uscire dai paradossi ossia, rispettivamente:

---

[402]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 124.
[403]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 124.
[404]E, dal punto di vista intensionale, del concetto ad essa corrispondente.

1) la *limitation-of-size theory* e

2) la *zig-zag theory*.

Russell espose di fatto queste due teorie assieme ad una terza[405] nell'articolo del 1905 intitolato "On Some Difficulties in the Theory of transfinite Numbers" dove ancora non compare la teoria dei tipi nella versione dei *Principia Mathematica*.

La teoria della limitazione di grandezza, spiega Gödel, condiziona l'esistenza della classe degli oggetti che godono della proprietà espressa da una certa formula φ all'estensione di questa classe, cioè alla sua cardinalità ed in particolare al fatto che essa non sia *troppo grande*. Secondo l'autore, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel può essere considerata come una rielaborazione della limitazione di grandezza per quanto riguarda le classi.

Ancora una volta Gödel giudica la teoria degli insiemi come una riproposizione di idee russelliane e giustamente cita colui il quale fu il vero erede della limitazione di grandezza russelliana, John von Neumann, il quale nel suo sistema formale per la teoria degli insiemi del 1925 propose di definire una classe come *propria* se equipotente all'universo. Il fatto di aver citato Zermelo pare invece un po' fuorviante dal momento che la nozione zermeliana e poi skolemiana di "definite Eigenschaft" non rientra nell'ottica della limitazione di grandezza, ma costituisce invece una proposta *logica* di soluzione dei paradossi in cui la "limitazione" non riguarda la cardinalità delle classi bensì la nozione sintattica di formula-ben-formata. In effetti lo stesso Gödel ammette che in **ZF** la limitazione-di-grandezza "non costituisce la base della teoria, ma è una conseguenza degli assiomi".[406]

L'autore non entra nei particolari della *zig-zag theory*, ma si limita a ricordare che in questo caso l'esistenza della classe degli oggetti che godono della proprietà espressa da una certa formula φ è fatta dipendere da "un certo tipo di semplicità" che non riguarda più la classe in questione, bensì il "contenuto o senso" della formula φ stessa. Gödel richiama inoltre il fatto che "alcune caratteristiche essenziali" di questa teoria si possono ritrovare nel sistema *New Foundations* di Quine.

[405] La *no-class theory* di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

[406] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 125.

14.2.2. La *no-class theory* e il principio del circolo vizioso

Secondo l'autore fu lo stesso Russell il primo ad abbandonare le due proposte viste sopra nell'ambito dei paradossi e a concentrarsi invece sulla terza via indicata sempre nel saggio del 1905 e approfondita nell'articolo del 1906 dal titolo "On the substitutional theory of classes and relations": la *no-class theory*. In realtà Russell non fu del tutto soddisfatto neppure di questa soluzione tanto è vero che l'articolo del 1906, redatto per la *London Mathematical Society*, fu ritirato poco prima della pubblicazione e infine pubblicato solo nel 1973.

L'autore spiega che l'idea di base della *no-class theory* sta nel fatto che una certa classe C (rispettivamente, un certo concetto $\mathcal{C}$) non viene considerato come un oggetto reale, ma solo come un *modo di dire* (*façon de parler*). Anche nei *Principia Mathematica* Gödel vede realizzarsi alcune idee derivanti da questa teoria russelliana. Fra queste egli annovera il *principio del circolo vizioso* (in breve VCP) il quale "proibisce un certo tipo di "circolarità" ritenuta responsabile dei paradossi".[407]

Coloro i quali vedono in una violazione di VCP la causa dei paradossi insiemistici, prosegue Gödel, affermano che:[408]

> La loro erroneità ... consiste nel fatto che si definiscono (o si assumono tacitamente) totalità la cui esistenza comporterebbe necessariamente l'esistenza di certi nuovi elementi definibili solo in termini di tali totalità.

Costoro, secondo l'autore, metterebbero quindi sotto accusa certe procedure impredicative presenti nella teoria cantoriana degli insiemi e nell'ideografia fregeana. Essi, prosegue Gödel, sostengono quindi la seguente forma di VCP:[409]

> ... nessuna totalità può contenere membri *definibili* solo in termini di tale totalità o membri *che la comprendano* (che la comportino) o *che la presuppongano* ...

Secondo l'autore per poter applicare questo principio al caso dei paradossi intensionali occorre tuttavia un ulteriore assunzione e cioè che "ogni funzione proposizionale presuppone la totalità dei suoi valori"[410] ossia che *ogni formula presuppone tutti i suoi possibili argomenti.* Se $\mathcal{AG}(X, \varphi)$ sta per "X è la

[407]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 125.
[408]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 125.
[409]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 125.
[410]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pagg. 125-126.

collezione degli argomenti di φ" e $\mathcal{PP}(\varphi, X)$ sta per "la formula φ presuppone la classe X", avremo il seguente principio:

$$\mathsf{TAP} \qquad \forall\varphi\forall X(\mathcal{AG}(X,\varphi) \to \mathcal{PP}(\varphi, X)).$$

Qui Gödel fa uso implicito di una distinzione fra paradossi estensionali e paradossi intensionali. I primi sarebbero quelli *insiemistici* come quello derivante dalla considerazione della classe $\{x \in V : x \notin x\}$, i secondi sarebbero quelli talvolta anche detti *paradossi semantici* come quello del mentitore, di Richard e quello che deriva dalla considerazione del concetto di "applicabilità di un concetto a se stesso".

Gödel sostiene che se si assume VCP senza TAP, il concetto di "non applicabile a se stesso" non dà luogo ad alcuna contraddizione dal momento che, di per sè, non coinvolge alcuna quantificazione. Assumendo invece TAP si ottiene una versione intensionale del principio del circolo vizioso per cui *se un certo termine t è stato definito in termini di una certa formula φ allora esso non può essere un possibile argomento di tale formula.* In simboli avremo quindi:

$$\mathsf{VCP}_{int} \qquad \forall\varphi\forall X\forall y(\mathcal{DF}(y,\varphi) \wedge \mathcal{AG}(X,\varphi) \to y \notin X)$$

dove $\mathcal{DF}(y, \varphi)$ sta per "y è definito in termini di φ". L'autore osserva che VCP_{int} viene assunto nella prima edizione dei *Principia* ma abbandonato poi nella seconda edizione.

14.2.3. Forme di circolarità (viziosa)

Gödel afferma che di fatto VCP non è un solo principio, ma ne raccoglie ben tre del tutto differenti fra loro. Il primo stabilisce che *nessuna collezione X può contenere un elemento y definibile solo usando X stessa in modo essenziale.* In simboli:

$$\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}} \qquad \neg\exists X\exists y(y \in X \wedge \mathcal{DE}(y, X))$$

dove $\mathcal{DE}(y, X)$ sta per "y è definibile solo in termini di X". Questa prima forma del principio è giudicata da Gödel "di particolare interesse" in quanto vieta l'uso delle definizioni impredicative e di conseguenza "rende impossibile la derivazione della matematica dalla logica ... e addirittura buona parte della matematica moderna".[411]

[411] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 127.

Secondo l'autore la matematica classica non soddisfa $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ in quanto i suoi assiomi "implicano l'esistenza di numeri reali definibili in tale formalismo solo facendo riferimento a tutti numeri reali".[412] Dunque, paradossalmente, lo stesso sistema della prima edizione dei *Principia* non soddisfa $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ in quanto "la matematica classica può essere costruita sulla base dei *Principia*".[413]

Così Gödel, col suo tipico argomentare che tende a scovare le contraddizioni interne del suo interlocutore o obiettivo polemico, ci mostra come il principio russelliano del circolo vizioso risulti essere, per lo meno in questa prima forma, incompatibile col sistema russelliano dei *Principia*.

La seconda forma di VCP asserisce invece che *nessuna collezione X può contenere un elemento y che la comprenda*. In simboli avremo quindi:

$$\mathsf{VCP}_{\mathcal{CM}} \qquad \neg\exists X \exists y (y \in X \wedge \mathcal{CM}(y, X))$$

dove $\mathcal{CM}(y, X)$ sta per "y comprende X". Questa seconda forma del principio non è del tutto chiara. Certamente si tratta di un principio di carattere ontologico, ma non è affatto evidente in che modo si debba interpretare il predicato $\mathcal{CM}$. In una lettura insiemistica se ne danno almeno due possibili interpretazioni, cioè:

$$\mathsf{VCP}_{\in} \qquad \neg\exists X \exists y\, (y \in X \wedge X \in y)$$

e

$$\mathsf{VCP}_{\subseteq} \qquad \neg\exists X \exists y\, (y \in X \wedge X \subseteq y).$$

Quest'ultima forma di VCP sembra volta a evitare la seguente situazione di autoappartenenza:

$$y \in y$$

mentre la prima proibisce situazioni del tipo:

$$...y \in X \in y \in X...$$

Entrambe le situazioni sono escluse in **ZF** dall'assioma di fondazione (AF) ma non costituiscono di per sè motivo di contraddittorietà.[414] Lo stesso

[412] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 127.

[413] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 127.

[414] Basti pensare al fatto che questo tipo di fenomeni sono apertamente ammessi in alcune assiomatizzazioni proposte ad esempio da Ennio De Giorgi, Marco Forti e Peter Aczel. Si vedano al riguardo *Barwise et Moss 1996*, *Aczel 1988*, *De Giorgi et Forti 1985*.

Gödel giudica $\mathsf{VCP}_{\mathcal{CM}}$ come più plausibile di $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ probabilmente in quanto esso non vieta l'uso delle definizioni impredicative e di conseguenza, in un'opportuna formalizzazione della teoria degli insiemi,[415] esso consente la ricostruzione di tutta la matematica classica senza dar luogo a contraddizioni.

La terza forma di VCP considerata da Gödel afferma che *nessuna collezione X può contenere un elemento y che lo presupponga*. In simboli:

$$\mathsf{VCP}_{\mathcal{PR}} \qquad \neg\exists X\exists y(y \in X \wedge \mathcal{PR}(y, X))$$

dove $\mathcal{PR}(y, X)$ sta per "y presuppone X". Lo stesso Gödel sottolinea che questa terza forma di VCP ammette per lo meno due possibili interpretazioni a seconda che si interpreti il termine "presupporre" in senso ontologico oppure in senso epistemologico. Nel primo caso avremo quindi:

$$\mathsf{VCP}_{\mathcal{PE}} \qquad \neg\exists X\exists y(y \in X \wedge \mathcal{PE}(y, X))$$

dove $\mathcal{PE}(y, X)$ sta per "y presuppone X per l'esistenza" ossia "l'esistenza di X è condizione necessaria dell'esistenza di y". Nel secondo avremo invece:

$$\mathsf{VCP}_{\mathcal{PC}} \qquad \neg\exists X\exists y(y \in X \wedge \mathcal{PC}(y, X))$$

dove $\mathcal{PC}(y, X)$ sta per "y presuppone X per la conoscibilità".

Gödel giudica $\mathsf{VCP}_{\mathcal{PE}}$ più positivamente di $\mathsf{VCP}_{\mathcal{PC}}$ in quanto compatibile con le definizioni impredicative e con una concezione realista degli oggetti matematici. Chiaramente per un platonista la conoscenza delle parti non necessariamente presuppone la conoscenza del tutto, mentre è plausibile che l'esistenza del tutto sia condizione dell'esistenza delle parti. Ma per Gödel l'unico possibile fondamento filosofico e concettuale dei metodi impredicativi sembra essere proprio una qualche forma di platonismo.

14.3. Il realismo gödeliano

Abbiamo visto come Gödel tenda a valutare la "plausibilità" di ciascuno dei principi del circolo vizioso formulati sopra sulla base della loro compatibilità con l'utilizzo di metodi definitori impredicativi. Cerchiamo ora di approfondire un po' il nesso che egli sostiene sussistere fra circolarità, impredicatività ed esistenza oggettiva.[416]

[415] Ovviamente senza AF.

[416] Nel senso platonistico del termine.

14.3.1. Circolarità, impredicatività ed esistenza oggettiva

Secondo l'autore il fatto che $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ contraddica le parti essenzialmente impredicative della matematica classica non manifesta un'inadeguatezza di quest'ultima, dovuta alla presenza di circolarità viziose. Al contrario questo fatto dimostra "la falsità del principio del circolo vizioso ... cosa che in realtà è già plausibile di per sè".[417]

In che modo sarebbe quindi possibile uscire dalla situazione di "tensione" fra $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ e definizioni impredicative? Sembra chiaro che la prima forma di VCP, si applica solo a condizione che il quantificatore universale venga interpretato come una congiunzione infinita (concezione distributiva dell'universale). Di conseguenza, negando "che il riferimento a una totalità implichi necessariamente un riferimento ad ogni suo singolo elemento"[418] si ha che le definizioni impredicative (in breve IDF) non danno più luogo ad un autoriferimento e quindi ad una circolarità viziosa.

Un secondo modo per uscire dall'alternativa fra $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ e IDF, anche ammettendo la concezione "distributiva" del quantificatore universale, è invece quello di valutare sotto quale interpretazione degli oggetti del nostro universo di discorso $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ cessa di contraddire IDF. Secondo Gödel $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ entra in gioco rispetto a IDF solo nel caso in cui intendiamo gli oggetti matematici come nostre costruzioni. L'idea dell'autore è che $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ entra in collisione con IDF solo nel caso in cui si assuma una concezione costruttivista o nominalista riguardo alla natura degli oggetti del nostro universo di discorso. Questo contrasto viene meno se si ha invece un punto di vista platonista.

In ultima istanza, quindi, Gödel sembra essere convinto del fatto che l'unica forma di circolarità realmente viziosa sia quella espressa da $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$ e che questo principio sia contestabile e confutabile, più che sul piano logico, su quello filosofico generale.

14.3.2. Realismo concettuale

Proprio in sede di confutazione di VCP ed allo stesso tempo di fondazione di IDF[419] Gödel espone per per la prima volta il suo punto di vista sugli oggetti della logica e della matematica. Egli afferma che:[420]

---

[417]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 127.
[418]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 127.
[419]In particolare di una fondazione indipendente dal dato di fatto che le definizioni impredicative occorrono in modo essenziale nella matematica moderna.
[420]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 128.

> Classi e concetti ... possono essere concepiti come oggetti reali, cioè le classi come pluralità di cose o come strutture consistenti in una pluralità di cose, e i concetti come proprietà e relazioni fra cose, entrambe esistenti indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni.

Già nel 1944 dunque Gödel sembra affermare una forma di realismo concettuale secondo il quale esistono in modo indipendente anche nozioni di ordine superiore come i concetti. Se indichiamo con $\mathcal{CP}(x)$ l'enunciato "x è un concetto", con $\mathcal{CL}(x)$ l'enunciato "x è una classe", con $\mathcal{IE}(x)$ l'enunciato "x ha realtà indipendente" e con $\mathcal{OR}(x)$ l'enunciato "x ha realtà oggettiva", otterremo il seguente *principio di realtà concettuale*:

$$\mathsf{CRP} \qquad \forall x((\mathcal{CL}(x) \vee \mathcal{CP}(x)) \rightarrow (\mathcal{IE}(x) \wedge \mathcal{OR}(x))).$$

Si tratta chiaramente di uno schema che afferma l'esistenza indipendente e la realtà oggettiva di concetti estensionali (classi) e di concetti intensionali (proprietà o relazioni) di complessità qualsiasi.

La cosa che salta subito all'occhio in questo tipo di assunzione filosofica è che, a rigor di termini, essa non asserisce quasi nulla a proposito di quasi tutti gli oggetti matematici concreti. CRP ci assicura infatti l'esistenza indipendente e la realtà oggettiva di classi e concetti (e quindi anche classi di numeri, di punti e di funzioni), ma non di numeri, punti e funzioni.

Da questo punto di vista la prima formulazione del realismo ontologico gödeliano sembra distinguersi per il fatto di essere una forma di platonismo concettuale più che matematico. Questa posizione, che noi abbiamo schematizzato con la formula CRP, può di fatto implicare anche una forma generale di platonismo matematico a condizione di assumere un *principio di riduzione forte* secondo cui *ogni oggetto matematico è una classe o un concetto*, in simboli:

$$\mathsf{SRP} \qquad \forall x(\mathcal{MO}(x) \rightarrow (\mathcal{CL}(x) \vee \mathcal{CP}(x))$$

dove ovviamente $\mathcal{MO}$ indica la proprietà "essere un oggetto matematico".

Può sembrare strano attribuire a Gödel una tale forma di riduzionismo concettuale, e tuttavia, per lo meno negli anni Quaranta, questa possibilità non può affatto essere scartata a priori. Al contrario, proprio nel *Russell paper*, ci sono segni di un possibile atteggiamento riduzionista laddove il nostro indica come esempio di concetto "il numero due".

14.3.3. L'analogia fra matematica e scienze empiriche

Le formalizzazioni proposte sopra sono del tutto congetturali e ovviamente costituiscono solo un tentativo di chiarimento della posizione gödeliana. Quello che più importa tuttavia in sede di ricostruzione filologica e di commento analitico sono *le ragioni* che Gödel adduce a favore di una tale forma di realismo concettuale. A pagina 128 del *Russell paper* l'autore affronta il problema dicendo:[421]

> Mi sembra che l'assunzione di tali oggetti sia altrettanto legittima dell'assunzione dei corpi fisici e che ci siano almeno altrettanti motivi per credere nella loro esistenza.

Gödel sposta dunque l'attenzione dal problema della legittimazione e della fondazione del suo realismo concettuale ad una presunta legittimità e credibilità degli oggetti delle scienze empiriche. Egli sembra assumere come un dato di fatto evidente che classi e concetti, da una parte, e oggetti empirici, dall'altra, debbano essere messi sullo stesso piano sulla base di un'identica necessità teoretica e credibilità ontologica.

L'autore adduce le seguenti ragioni a favore della sua audace analogia:

1. *come* l'assunzione dell'esistenza di corpi fisici è condizione necessaria di qualsiasi teoria della percezione sensibile, *così* l'assunzione dell'esistenza di classi e concetti è condizione necessaria del sistema delle conoscenze matematiche;

2. *come* una teoria della percezione non può essere interpretata solo in termini di *dati sensibili*, così anche la matematica non può essere interpretata solo in termini di *dati matematici*.

Dunque l'idea alla base dell'analogia gödeliana sembra essere che, se una teoria della percezione non può prescindere dalla postulazione di un correlato oggettuale ed oggettivo dei dati percettivi, anche la matematica non potrà prescindere dalla postulazione di opportuni correlati oggettuali ed oggettivi dei dati matematici.

Gödel osserva che, nel caso di una certa proposizione φ definibile solo con riferimento alla collezione di tutte le proposizioni del nostro linguaggio, si giunge all'apparente assurdità di proposizioni le quali devono "contenere se

[421] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 128.

stesse come costituenti del loro contenuto (o del loro senso)".[422] Ma questa, secondo l'autore, "non è un'obiezione per chi si pone da un punto di vista realista"[423] perché ciò impedisce solo di spiegare il senso di tali proposizioni in termini di percezioni sensibili.

Per un platonista non è affatto contraddittorio che una parte propria sia identica al tutto "come si vede dal caso di strutture in senso astratto".[424] Al riguardo Gödel cita, forse con riferimento al continuo, strutture che "contengono un numero infinito di parti ciascuna delle quali contiene a sua volta l'intera struttura come parte".[425]

L'autore menziona anche il fenomeno dell'incompletezza, dicendo che esistono proposizioni "che contengono come parte del loro senso, non se stesse, [ma] la loro dimostrabilità formale"[426] e cita infine il caso di "enunciati che si riferiscono a totalità di enunciati cui essi stessi appartengono" come ad esempio "ogni enunciato (di un dato linguaggio) contiene almeno una parola che esprime una relazione".[427]

Con questa carrellata di esempi di auto-riferimenti Gödel sembra voler sottolineare il fatto che da una prospettiva realista come quella espressa da CRP, quasi ogni forma di auto-riflessività e di auto-riferimento diventa ammissibile. Ovviamente, conclude il nostro, assumendo CRP, VCP (ed in particolare $\mathsf{VCP}_{\mathcal{DE}}$) non costituisce più una soluzione dei paradossi e occorre perciò trovare un'altra soluzione ad esempio mediante la teoria dei tipi.

14.4. Teorie dei tipi

14.4.1. Tipi ramificati

Gödel ritiene che in Russell il progressivo spostamento dal realismo ad un atteggiamento costruttivista abbia avuto successo nell'ambito della teoria dei tipi ramificati (in breve, **RTT**) cioè con la teoria degli ordini unita alla teoria dei tipi. Secondo l'autore le restrizioni imposte da **RTT** non sembrano ipotesi *ad hoc* volte ad evitare i paradossi, ma piuttosto conseguenze della

[422]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 130.
[423]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 130.
[424]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 130.
[425]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 130.
[426]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 130.
[427]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 130.

tesi secondo cui "le classi, i concetti e le proposizioni quantificate non esistono come oggetti reali".[428]

Per Gödel nella seconda edizione dei *Principia* l'atteggiamento costruttivista è molto più forte che nella prima e di fatto in essa viene abbandonato l'assioma di riducibilità. Tuttavia in questo modo si ha un sistema così debole che, a detta dell'autore, sicuramente non può ottenere l'analisi e non si sa neppure se sia in grado di derivare l'aritmetica.

Ma l'idea alla base della teoria dei tipi ramificati resta, per Gödel, in sè molto buona. Egli afferma infatti che la teoria degli ordini si rivela particolarmente "feconda" se considerata in prospettiva puramente matematica, prescindendo dal problema dell'ammissibilità delle definizioni impredicative.[429] In quest'ottica, prosegue l'autore, non solo diventa inobiettabile un'estensione della teoria dal finito al transfinito,[430] ma è la teoria stessa che conduce in modo naturale ad una tale estensione ossia a "considerare funzioni nella cui definizione si fa riferimento a tutte le funzioni di ordine finito, quindi funzioni di ordine ω".[431]

Il riferimento implicito in quest'affermazione sembra essere la gerarchia degli insiemi costruibili che, come sottolineato a più riprese nella seconda parte, lo stesso Gödel considerava come una generalizzazione dei tipi ramificati nel transfinito. E di fatto qui egli fa anche un implicito richiamo alla noncontraddittorietà relativa dell'assioma di costruibilità, dicendo che se si ammettono gli ordini transfiniti è possibile "dimostrare un assioma di riducibilità".[432]

Tutto ciò, puntualizza Gödel, non significa che estendendo i tipi ramificati dal finito al transfinito si risolva l'originario problema di Russell di fornire una fondazione costruttiva della matematica, infatti la dimostrazione della noncontraddittorietà di $V = L$ presuppone in modo essenziale certe "totalità impredicative". Tuttavia, osserva l'autore, lungo questa via ogni impredicatività viene ricondotta ad un'unica forma ossia "all'esistenza di certi grandi numeri ordinali" e "alla validità per essi del ragionamento ricorsivo".[433]

Questa affermazione sembra particolarmente importante perché mette in

[428]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pagg. 132-133.

[429]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 136.

[430]Cosa che comunque sarebbe possibile dal punto di vista predicativista, purché si limitasse l'estensione ai soli ordinali transfiniti costruttivi.

[431]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 136.

[432]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 136.

[433]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 136.

evidenza un'atteggiamento che Gödel sembra condividere con Cantor e Zermelo: la convinzione che ogni collezione matematicamente rilevante sia in ultima istanza in qualche modo *ben-ordinata* o *ben-ordinabile*. In tal senso, anche se Gödel non nega la possibilità di insiemi casuali, egli sembra convinto del fatto che l'universo degli oggetti matematici, oltre che *reale* e *indipendente*, sia anche *ben-ordinato*. Da questo punto di vista si comprendono meglio le sue affermazioni così decisamente a favore dell'assunzione dell'assioma di scelta che, come si sa, equivale in **ZF** al *principio del buonordinamento* (WOP). Inoltre, non è escluso che la proposta di interpretare l'universo insiemistico in termini di *ordinal-definability* avanzata nella *PBC*, sia legata proprio a questo tipo di atteggiamento.

14.4.2. Tipi semplici

Gödel introduce la teoria dei tipi semplici (in breve, **STT**) per mettere in evidenza la netta differenza strutturale ma anche di motivazioni di base fra tipi semplici e tipi ramificati.

Alla base dell'elaborazione di **SST** ci sarebbe la constatazione del fatto che una formula contenente una variabile libera x è "qualcosa di ambiguo" e di conseguenza non può occorrere in una proposizione, a meno che non si sostituisca la variabile libera x con una costante individuale o non si vincoli quella stessa variabile con un quantificatore.

L'idea fondamentale di **STT**, secondo l'autore, sta nel distinguere fra ambiguità e ambiguità col risultato che un oggetto di tipo uno non può rimpiazzare un oggetto di tipo zero in una proposizione dal momento che quest'ultima "non contiene ambiguità da rimuovere" e più in generale che oggetti di tipo differente non possono rimpiazzarsi fra loro.

Gödel ritiene che questo approccio vada ricondotto, come quello che porta ad assumere VCP, all'ambito delle idee russelliane ispirate alla *no-class theory* dal momento che esso considera i concetti come qualcosa di costruito a partire da "proposizioni o enunciati".

Tuttavia, secondo l'autore, mentre VCP discende direttamente da un approccio costruttivista in logica e matematica, la teoria dei tipi semplici non sembra essere vincolata a questo punto di vista. E ciononostante **STT** sembra anche poco in linea col realismo concettuale, dal momento che se si devono considerare i concetti come oggetti reali non sembrerebbe plausibile dover ammettere la realizzazione di uno stesso concetto su più livelli.

Il giudizio di Gödel sulla teoria dei tipi semplici è complessivamente positivo. Fra i pregi di **STT** egli annovera il fatto che essa abbia colto una qualche verità "nell'idea delle realizzazioni dello stesso concetto su vari livelli".[434] In tal senso l'autore si aspetta che questa teoria risulterà "utile e necessaria per lo meno come primo passo per un sistema soddisfacente".[435]

In secondo luogo **STT** avrebbe il pregio di fornire una nuova soluzione dei paradossi secondo la quale la loro origine non risiede nell'assioma di comprensione (CA), bensì nella non-applicabilità di certi predicati a certi argomenti.

D'altro canto, fra i difetti di **STT**, Gödel cita il fatto che essa si basa su una sorta di *principio di sostituzione ristretta*[436] (in breve RSP) secondo cui: *se x può rimpiazzare y nella formula-ben-formata $\varphi(x)$, allora x può rimpiazzare y in ogni formula-ben-formata $\psi(x)$*. L'autore osserva che, assumendo questo principio, gli oggetti risultano suddivisi in "campi di significatività" mutuamente esclusivi, ciascuno dei quali "consta degli oggetti che possono rimpiazzarsi fra loro".[437]

L'assunzione di RSP, che Gödel ritiene necessaria per lo meno nell'ambito di una lettura realista di **STT**, ha tuttavia i seguenti inconvenienti:

1) "ogni concetto ha senso solo ... per una porzione infinitamente piccola di tutti gli oggetti";[438]

2) "assumere [RSP] rende impossibile formularlo come una proposizione sensata poiché x e y devono essere limitati a determinati campi di significatività che sono uguali o differenti";[439]

3) "non si può esprimere con una proposizione sensata il fatto che un oggetto x è (o non è) di un dato tipo".[440]

L'autore non esclude che la suddivisione in campi di significatività possa essere ottenuta anche senza assumere RSP, mostrando, ad esempio, che i paradossi costituiscono un analogo di certi casi limite presenti usualmente in matematica, come la divisione per zero. Ciò, secondo Gödel, costituirebbe un'ottima soluzione dei paradossi in quanto in tal modo "le nostre intuizioni

[434] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 137.
[435] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 137.
[436] Gödel non usa questa specifica espressione.
[437] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 138.
[438] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 138.
[439] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 138.
[440] Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 138.

logiche rimarrebbero corrette a meno di certe correzioni minori".[441] Secondo l'autore un tentativo (seppur fallito) in tal senso sarebbe stato fatto da Church con i suoi sistemi che contenevano come frammento equazionale il λ-calcolo.[442]

14.5. Analiticità

Negli ultimi paragrafi del *Russell paper* Gödel affronta uno dei temi che caratterizzeranno le sue riflessioni fondazionali soprattutto negli anni Cinquanta: il problema dell'analiticità degli assiomi della matematica. Qui in particolare egli cerca di rispondere alle seguenti due domande:

i) gli assiomi dei *Principia Mathematica* sono analitici?

ii) in che senso tali assiomi possono dirsi analitici?

L'autore comincia col secondo problema distinguendo fra due possibili sensi del termine "analiticità". In primo luogo, c'è un senso "puramente formale" della parola secondo cui: *una proposizione φ si dice analitica se i termini in essa occorrenti possono essere tradotti in modo tale che essa risulti essere, se dimostrabile, un'istanza di $\psi \to \psi$, se refutabile, un'istanza di $\psi \wedge \neg\psi$.* Indichiamo con $Taut(\varphi)$ il fatto che la proposizione φ è analitica in questo senso. Per Gödel, gli assiomi di **ZF** e plausibilmente anche quelli dei *Principia* risultano essere dimostrabilmente non-analitici in questo primo senso della parola, a meno di assumere una logica infinitaria.

In un secondo senso, materiale o contenutistico, del termine si ha che: *una proposizione φ si dice analitica se essa è vera sulla base del significato concettuale dei termini in essa occorrenti.* In breve scriveremo $Conc(\varphi)$ quando la proposizione φ è analitica in questo secondo senso.

Gödel afferma che, se si interpreta il temine "funzione proposizionale" come "classe" o come "concetto", allora tutti gli assiomi dei *Principia*,[443] escluso l'assioma dell'infinito (INF), sono analitici. Infatti, spiega il nostro:[444]

> ... nulla può esprimere il senso del termine "classe" meglio dell'assioma delle classi [cioè dell'assioma di separazione SEP] e dell'assioma di scelta ...

[441]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 138.
[442]Cf. *Church 1932, 1933.*
[443]Relativamente alla prima edizione.
[444]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 139.

e quindi SEP e AC sembrano indiscutibilmente veri sulla base del significato concettuale del termine "classe". Inoltre:[445]

> ... il senso del termine "concetto" sembra implicare che ogni funzione proposizionale definisce un concetto.

Cioè l'assioma di separazione sembra essere vero anche sulla base del significato concettuale del termine "concetto".

Gödel mette subito in chiaro il fatto che i due sensi del termine "analiticità" non sono necessariamente alternativi, ma possono di fatto collassare se, ad esempio, la traduzione che occorre nella definizione di $Taut(\varphi)$ è basata sul significato concettuale dei termini occorrenti in φ e *non* sulla loro definizione.[446] Questa osservazione, apparentemente incidentale, è in realtà molto importante in quanto spiega lo specifico punto di vista gödeliano secondo cui la matematica può essere considerata analitica ed allo stesso tempo dotata di un "contenuto reale". Sul tema, come vedremo, l'autore tornerà ampiamente nella *Gibbs lecture* e nei *Carnap papers.*[447]

Si noti che per Gödel l'assioma dell'infinito non è analitico in nessun senso della parola. L'autore non spiega la ragione di questa sua affermazione, ma sembra plausibile che essa derivi dal fatto che non vi è nulla del concetto di insieme o di quello di classe che rimandi *necessariamente* alla nozione di infinità. E' un'opzione della teoria cantoriana degli insiemi quella di studiare non semplicemente il concetto di *collezione*, ma quello di collezione *finita o infinita*.

14.6. Verso una teoria di classi e concetti

A pagina 139 del *Russell paper* Gödel afferma che l'unica difficoltà che ci si presenta nel considerare la matematica come analitica nel secondo senso

[445]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 139.

[446]Cf. la nota 47 di *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 139.

[447]Nel complesso va sottolineato il fatto che le due definizioni proposte da Gödel del termine analiticità sembrano parzialmente derivate da due definizioni già presenti nella tradizione filosofica. La prima sembra far riferimento alla definizione wittgensteiniana e carnapiana, cioè alla *tautologicità* (è lo stesso Gödel a richiamare questa filiazione), e la seconda a quella kantiana. Si ricordi infatti che nella *Logische Syntax der Sprache*, §14, Carnap afferma che: "un enunciato è detto analitico quando è una conseguenza della classe nulla di enunciati (e così una conseguenza di ogni enunciato)". D'altro canto, nel paragrafo IV dell'*Introduzione* alla seconda edizione della *Critica della ragion pura* Kant definisce come analitico un giudizio in cui "il predicato B appartiene al soggetto A come qualcosa che è contenuto (implicitamente) in questo *concetto* A" (il corsivo è mio).

sta nel fatto che:[448]

> ... noi non percepiamo con sufficiente chiarezza i concetti di "concetto" e di "classe", come appare evidente dai paradossi.

Ma la constatazione di questo fatto, aggiunge l'autore, non dovrebbe portarci a postulare, come fa Russell, che classi e concetti sono inesistenti, dal momento che ciò non costituisce una soluzione del problema dei fondamenti.

Come abbiamo visto nel capitolo 12, Gödel considerava invece la teoria degli insiemi e la teoria dei tipi estesa nel transfinito, come due soluzioni soddisfacenti. Queste due teorie, secondo l'autore, costituiscono due esempi dell'approccio ai fondamenti che "è l'indirizzo preso dagli sviluppi attuali della logica matematica" e che consiste nel tentativo "di chiarire maggiormente il significato dei termini "classe" e "concetto" e di costruire una teoria coerente delle classi e dei concetti come entità che esistono oggettivamente".[449]

Gödel conclude l'articolo richiamandosi nuovamente al progetto leibniziano di una *Characteristica universalis* e attribuendo lo stato di arretratezza della logica matematica contemporanea proprio ad un'"incompleta comprensione dei fondamenti". Egli si chiede infatti:[450]

> ... come si può pensare di risolvere sistematicamente i problemi matematici solo in base all'analisi dei concetti che occorrono in essi, se l'analisi finora non è stata sufficiente *neppure a formulare gli assiomi?*[451]

Ecco che qui il problema di trovare nuovi assiomi, altrove legato a considerazioni specificamente matematiche e insiemistiche, viene invocato invece sulla base di riflessioni filosofiche molto generali, in particolare sulla base di una caratterizzazione della nozione di "concetto" in termini di un "dato" da analizzare in modo progressivamente sempre più specifico e preciso.

[448]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pagg. 139-140.
[449]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 140.
[450]Cf. *Gödel 1944* in *Gödel 1990*, pag. 140.
[451]Il corsivo è mio.

15. Assolutezza, realtà e oggettualità

Nella seconda metà degli anni Quaranta Gödel scrisse tre notevoli articoli dalla cui lettura emergono alcuni importanti elementi della sua riflessione filosofica, ossia:

1. la messa a fuoco di una nozione linguistica di assolutezza;
2. la formulazione di un realismo specificamente insiemistico;
3. una concezione ingenua e metafisica degli oggetti di esperienza.

15.1. Assolutezza formale

Nella seconda parte abbiamo parlato della nozione insiemistica di assolutezza, che Gödel caratterizzava in termini di "invarianza da modello a modello" cioè come una nozione fondamentalmente *ontologica*. Nella conferenza tenuta dal nostro nel 1946 in occasione del bicentenario dell'università di Princeton, emerge invece una nozione *formale* o *linguistica* dell'assolutezza.

A pagina 150 della *PBC* l'autore dice, a proposito del concetto di *Turing-calcolabilità* o di *ricorsività generale*, che esso costituisce l'unico caso di una "nozione epistemologicamente interessante" di cui si è riusciti a formulare una definizione assoluta cioè "non dipendente dal formalismo scelto".[452]

Ciò, secondo Gödel, non si è verificato invece per le due fondamentali nozioni metamatematiche di *dimostrabilità* e *definibilità*, infatti questi due concetti si sono potuti definire solo "relativamente a un linguaggio dato".[453]

15.1.1. Dimostrabilità assoluta

L'incompletezza non sancisce l'impossibilità di principio di individuare un concetto assoluto di dimostrabilità ma, secondo l'autore, indica semplicemente la non-assolutezza dello specifico concetto di dimostrabilità usato nei sistemi formali. Infatti, sottolinea Gödel, comunque si cerchi di precisare il concetto di dimostrabilità attraverso un certo formalismo, l'esame di quest'ultimo conduce alla scoperta di nuovi assiomi "il cui grado di evidenza è esattamente lo stesso di quelli da cui si è partiti".[454]

[452]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 150.
[453]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 150.
[454]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 151.

Ciò significa che nessun formalismo potrà mai esaurire tutta la matematica e, di conseguenza, che nessuna nozione formale di dimostrabilità può essere assoluta, ma ciò non esclude la possibilità che tutti i passi del processo di estensione dei formalismi per la matematica possano forse "essere descritti e raccolti insieme in un qualche modo non-costruttivo".[455]

Come esempio concreto di un processo di estensione di un formalismo con nuovi assiomi, Gödel richiama il caso della teoria degli insiemi dove "le estensioni successive possono ... essere rappresentate mediante assiomi dell'infinito via via più potenti".[456] Secondo l'autore, se fosse possibile caratterizzare in modo uniforme il concetto di "assioma dell'infinito", allora il concetto di dimostrabilità (che potremmo chiamare *dimostrabilità con una qualche ipotesi forte dell'infinito*, in breve $\mathcal{S}$-*dimostrabilità*) ad esso associato potrebbe forse essere assoluto nel senso che si avrebbe che "ogni dimostrazione di un teorema insiemistico condotta nel sistema immediatamente superiore a una [data] teoria degli insiemi è sostituibile da una dimostrazione che utilizzi un tale assioma dell'infinito".[457]

15.1.2. Definibilità assoluta

In modo del tutto analogo al caso della dimostrabilità, neppure il paradosso di Richard stabilisce un limite intrinseco alla possibilità di determinare un concetto assoluto di definibilità ed in particolare di definibilità matematica. Come nel caso precedente, finché si parla di definibilità nel linguaggio di un dato sistema formale ci si ritrova con "una gerarchia transfinita di concetti di definibilità" dal momento che ogni linguaggio finitario può sempre essere esteso con nuovi simboli ed espressioni dando luogo a strumenti definitori sempre più ricchi e potenti.

Tuttavia, osserva Gödel, se si abbandonasse il requisito della finitezza dei termini primitivi dei nostri linguaggi, allora sarebbe forse possibile ottenere un concetto assoluto di definibilità matematica. Infatti sarebbe possibile raccogliere tutti i linguaggi formali in uno solo mediante un linguaggio contenente "tanti termini primitivi quanti sono i passi che si vogliono considerare in tale gerarchia di linguaggi"[458] e quindi mediante un linguaggio contenente tutti i numeri ordinali.

[455] Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 151.
[456] Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 151.
[457] Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 151.
[458] Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 151.

La via indicata da Gödel per ottenere un concetto assoluto di definibilità matematica consiste nell'assumere come termini primitivi del nostro macro-linguaggio $\mathcal{L}$ tutti i numeri ordinali e nel caratterizzare quindi la definibilità come *definibilità per ordinali* (*$\mathcal{O}$-definibilità*) cioè come una forma di definibilità in termini di ordinali. L'autore afferma che la $\mathcal{O}$-definibilità si può dimostrare assoluta almeno nel senso che:[459]

> ... introducendo la nozione di verità per questo linguaggio transfinito tutto intero [il macro-linguaggio $\mathcal{L}$], cioè passando al linguaggio immediatamente superiore, non si otterrà nessun nuovo insieme definibile ...

Gödel osserva che la stessa nozione di *costruibilità* costituisce una particolare forma di definibilità in termini di ordinali, ma una forma meno generale di quella considerata qui dove i quantificatori sono ovunque definiti. Nel caso della costruibilità invece si può quantificare solo su insiemi costruibili e non su insiemi qualsiasi e di conseguenza, come si vede ad esempio in riferimento all'operazione di *insieme potenza*, si possono definire insiemi che non si possono dimostrare costruibili.

Dunque la costruibilità, a differenza della $\mathcal{O}$-definibilità, non può essere considerata una buona formulazione del concetto di definibilità matematica assoluta. Come sappiamo l'universo degli insiemi costruibili è *assoluto* nel senso insiemistico della parola, mentre l'universo degli insiemi $\mathcal{O}$-definibili non lo è. In tal senso sembra proprio che le due nozioni di *assolutezza insiemistica* e *assolutezza linguistico-formale* siano distinte in modo essenziale.

15.1.3. I pensieri sono numerabili?

Gödel considera una possibile obiezione alla nozione di $\mathcal{O}$-definibilità basata sull'osservazione secondo cui sarebbe possibile ipotizzare che "tutte le cose da noi concepibili siano numerabili"[460] ossia sul fatto che non si può escludere a priori che i nostri concetti, o meglio i nostri pensieri, siano numerabili. Questa affermazione può creare un certo sconcerto nel lettore in quanto sembra contraddire il realismo concettuale dell'autore. Tuttavia va notato che il problema qui in questione non sembra essere di natura ontologica, bensì di tipo epistemico. Detto altrimenti, qui Gödel non sta certo

[459]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pagg. 151-152.
[460]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 152.

parlando della cardinalità dei concetti intesi in senso oggettivo, la quale sembra essere indiscutibilmente più che numerabile, ma piuttosto del numero di pensieri o rappresentazioni soggettive che la mente umana può "contenere". In breve si tratta della seguente *ipotesi di numerabilità dei pensieri*:

$$\mathsf{NPH} \qquad \overline{\overline{\{x : \mathcal{SP}(x)\}}} \leq \aleph_0$$

dove $\mathcal{SP}(x)$ sta per "x è un pensiero o una rappresentazione soggettiva".

A quanto pare, secondo l'autore, chi assumesse NPH sarebbe portato a considerare il concetto di $\mathcal{O}$-definibilità come insoddisfacente in quanto gli insiemi $\mathcal{O}$-definibili sono certamente più-che-numerabili. Quella evocata da Gödel sarebbe dunque un'obiezione di questo tipo: *com'è possibile considerare come matematicamente definibile in modo indipendente da ogni linguaggio formale un'infinità più-che-numerabile di oggetti, se la mente umana stessa non è in grado neppure di concepire un tale numero di oggetti?*

La risposta dell'autore a questo tipo di obiezione fa ricorso al seguente argomento. Supponiamo, per assurdo, che non tutti i numeri ordinali siano matematicamente definibili cioè che:

$$\neg\forall x(On(x) \rightarrow \mathcal{MD}(x))$$

dove $\mathcal{MD}(x)$ sta per "x è matematicamente definibile" e $On(x)$ per "x è un numero ordinale". Avremo allora che esisterà il più piccolo ordinale che non è matematicamente definibile, diciamo δ, in simboli:

$$\delta = min\, \{x : On(x) \wedge \neg\mathcal{MD}(x)\}\,. \qquad (*)$$

Ma dal momento che (*) costituisce una definizione matematica di δ, δ risulta essere matematicamente definibile e quindi otteniamo l'assurdo:

$$\mathcal{MD}(\delta) \wedge \neg\mathcal{MD}(\delta).$$

Questo argomento, a parere dell'autore, depone a favore dell'assunzione di tutti gli ordinali come termini primitivi di un linguaggio capace di esprimere un concetto assoluto di definibilità, ma non significa che questo sia l'unico modo possibile di descrivere un tale concetto. Gödel infatti non esclude che esista un modo per caratterizzarlo mantenendo l'ipotesi di numerabilità dei pensieri, NPH. Tuttavia, per l'autore, un concetto di definibilità matematica che rispetti NPH dovrà necessariamente "coinvolgere qualche elemento extra-matematico che riguardi la psicologia dell'essere che tratta con la matematica".[461]

[461] Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 152.

15.1.4. Gradi di assolutezza

Abbiamo detto all'inizio di questa sezione che nella *PBC* Gödel tratta una nozione di assolutezza ben distinta da quella utilizzata nei suoi lavori di teoria degli insiemi. In quel caso abbiamo parlato di *assolutezza ontologica*, in questo di *assolutezza linguistico-formale*.

Di fatto, nelle ultime righe della *PBC* l'autore fa un'ulteriore distinzione fra *assolutezza in senso stretto* e *assolutezza in senso lato*. La prima sembrerebbe definibile in termini di indipendenza da ogni possibile linguaggio formale e da ogni possibile universo di discorso. Mentre la seconda, quella che caratterizza il concetto di $\mathcal{O}$-definibilità e il concetto di $\mathcal{S}$-dimostrabilità, è invece relativa ad un certo universo di discorso e cioè all'universo degli "insiemi come descritti nella teoria assiomatica degli insiemi".[462]

Di conseguenza, spiega l'autore, le due proprietà godute dai due concetti garantiscono solo che, nonostante possano esistere e di fatto esistano definizioni e dimostrazioni non riconducibili ai due concetti visti sopra, nell'ambito dell'universo di discorso e del linguaggio della teoria degli insiemi "tali definizioni e dimostrazioni non forniscono o non devono fornire nulla di nuovo".[463]

15.2. Realismo insiemistico

Nella seconda parte abbiamo analizzato il *Cantor paper*[464] senza soffermarci su importanti distinzioni fra la prima e la seconda edizione. In questa sezione cercheremo invece di richiamare alcuni tratti caratteristici della prima edizione dell'articolo, dandone per scontati contenuto e struttura espositiva.

15.2.1. Critica del costruttivismo

Come si ricorderà, nel *Cantor paper* Gödel espone il problema del continuo partendo dalla questione dell'estendibilità al transfinito del concetto di numero cardinale (nel primo paragrafo), e passando poi in rassegna (nel secondo) i "risultati parziali ... finora ottenuti" relativi alla verità o falsità dell'ipotesi del continuo.

[462]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pag. 152.
[463]Cf. *Gödel 1946* in *Gödel 1990*, pagg. 152-153.
[464]Cf. il capitolo 11.

Il terzo paragrafo, dedicato ad una "riformulazione del problema sulla base di un'analisi dei fondamenti della teoria degli insiemi", si apre con una critica di intuizionismo e predicativismo in quanto tentativi di "un'analisi più approfondita (di quanto la matematica non sia solita fare) dei significati dei termini ... "insieme", "corrispondenza biunivoca", ecc ... e degli assiomi soggiacenti al loro uso".[465]

Secondo l'autore, l'intuizionismo in tale ambito ha prodotto "risultati completamente distruttivi", infatti sulla base di questo approccio:

- la teoria degli $\aleph$ maggiori del secondo, cioè di $\aleph_1$, è giudicata "priva di senso" e di conseguenza rifiutata in blocco;
- il problema del continuo viene reinterpretato in un modo che travisa completamente il senso ad esso attribuito originariamente da Cantor;
- non si dà alcuna soluzione definitiva al problema del continuo.

Si noti che qui Gödel fa riferimento solo ai primissimi lavori di Brouwer cioè alla tesi di dottorato *Over de grondslagen der wiskunde* (1907) e al brevissimo articolo "Die möglichen Mächtigkeiten" (1909).

In secondo luogo l'autore considera il punto di vista "semi-intuizionista"[466] con riferimento a Poincaré e ad Hermann Weyl affermando, piuttosto sbrigativamente, che esso finisce plausibilmente per decurtare la teoria degli insiemi nella stessa misura del punto di vista intuizionista.

Gödel ritiene che l'analisi predicativista e quella intuizionista dei fondamenti della teoria degli insiemi non siano "in nessun modo un risultato necessario", ma siano invece il risultato di certe concezioni dell'ontologia della matematica le quali considerano come oggetti matematici solo quelli che possono essere interpretati come costruzioni mentali o per lo meno dati completamente nella nostra intuizione.

Secondo l'autore, per chi non assume un punto di vista costruttivista è la teoria assiomatica degli insiemi stessa a costituire "una soddisfacente fondazione" della teoria cantoriana. Detto in altri termini, la miglior indagine condotta sui fondamenti della teoria degli insiemi ha portato alla formulazione di **ZFC**, **VNC**, **BSC** e **BGC**.[467]

[465] Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 179.
[466] Oggi diremmo il punto di vista predicativista.
[467] Cf. al riguardo il capitolo 7.

15.2.2. Il concetto iterativo di insieme

A chi obiettasse che i paradossi possono costituire un problema per la teoria degli insiemi Gödel, sorprendentemente, risponderebbe che questi, pur essendo un problema epistemologico "molto serio", non sono tuttavia problematici da un punto di vista matematico, dal momento che in matematica gli insiemi occorrono esclusivamente col tipo ad essi associato ossia come insiemi *di interi* o *di razionali* o *di reali*. Inoltre anche i teoremi relativi a tutti gli insiemi possono sempre essere reinterpretati come se si riferissero ad un certo tipo di insiemi.

L'autore definisce il *concetto iterativo di insieme*, in contrapposizione al *concetto logico di insieme*,[468] come segue: *un oggetto x dicesi insieme se può essere ottenuto a partire da certi oggetti ben-definiti $y_1, ..., y_n$ mediante applicazione finita o transfinita dell'operazione di "insieme di"*. In simboli:

$$Set(x) \leftrightarrow \exists\alpha\exists y_1 ... \exists y_n (On(\alpha) \wedge x = Set_\alpha(y_1, ..., y_n)) \qquad (1)$$

dove $Set(x)$ sta per "x è un insieme" e $Set_\alpha(y_1, ..., y_n)$ indica l'α-esima applicazione dell'operazione di "insieme di" a $y_1, ..., y_n$ per un qualsiasi numero ordinale α.

Questa un po' oscura definizione potrebbe di fatto essere resa perfettamente trasparente ricorrendo alla gerarchia cumulativa $\mathcal{R}$ di von Neumann, ossia riformulandola come segue:

$$Set(x) \leftrightarrow \exists\alpha(On(\alpha) \wedge x \in R(\alpha)). \qquad (2)$$

Come si sarà notato questa seconda definizione corrisponde all'ipotesi di combinabilità di von Neumann in base alla quale "ogni insieme è combinabile".

Quello che Gödel non sembra chiarire sufficientemente è il significato dell'operazione "insieme di". Lui stesso ammette che, allo stato attuale delle nostre conoscenze, quest'operazione non è definibile in modo soddisfacente, ma può essere solo parafrasata ricorrendo di nuovo al concetto di insieme.[469]

Apparentemente non è del tutto chiaro se con questa operazione egli intenda riferirsi all'operazione di *separazione*, consistente nel "considerare come un tutto gli elementi di una data classe X che godono di una certa proprietà

---

[468] Secondo il quale un insieme sarebbe un qualche cosa che si ottiene "dividendo la totalità di tutte le cose esistenti in due categorie" (cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 180.).

[469] Cf. la nota 13 di *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 180.

$\lambda x.\varphi$", oppure all'operazione di *potenza*, consistente nel "considerare come un tutto la totalità delle parti di un dato insieme x". Di fatto quella corretta è certamente la seconda interpretazione che consente di vedere la definizione (1) come una semplice riformulazione della (2). Questa lettura del testo sembra anche coerente con la considerazione gödeliana del carattere fortemente impredicativo dell'operazione di *potenza* o di *insieme delle parti*, oltre che chiaramente del concetto di insieme.

Gödel considera il concetto iterativo di insieme come noncontraddittorio per lo meno nel senso che il suo utilizzo ingenuo non ha mai prodotto alcun paradosso. Da un punto di vista concettuale[470] la non-esistenza di un tipico insieme paradossale come l'universo di tutti gli insiemi è garantita in questo caso dall'illimitata iterabilità dell'operazione Set_α e di conseguenza dall'impossibilità di un insieme massimo.

15.2.3. Realismo insiemistico

Dopo aver sottolineato il fatto che il concetto iterativo di insieme ha dato luogo ad una serie di precisazioni assiomatiche della teoria degli insiemi che costituiscono un terreno comune di confronto nell'affrontare problemi come quello del continuo, l'autore dice che, se anche l'ipotesi del continuo risultasse essere indipendente dagli altri assiomi noti della teoria degli insiemi, ciò non risolverebbe la questione definitivamente se non per chi nega ogni senso agli assiomi ed ai concetti della teoria degli insiemi.

Viceversa, spiega Gödel, per coloro i quali credono che gli assiomi della teoria degli insiemi descrivano una ben precisa realtà, CH "deve essere vera o falsa" e la sua eventuale indipendenza da **ZF** non potrebbe essere interpretata se non nel senso che gli assiomi della teoria degli insiemi "non contengono una descrizione completa" della realtà insiemistica.

Torna qui in primo piano il realismo gödeliano relativo in questo caso alle classi ed in particolare agli insiemi. Il punto di vista dell'autore sembra davvero molto vicino a quello di Cantor e di fatto anche a quello di Zermelo. Gli assiomi della teoria degli insiemi sono da lui concepiti come enunciati di tipo descrittivo e perciò distinti nettamente da assiomi, quali quelli della teoria dei gruppi, che sono invece costitutivi del concetto stesso di gruppo.

Sembra possibile affermare che Gödel abbia qui in mente una sorta di *principio di realtà insiemistica*, analogo ma più circoscritto di CRP, secondo

[470]Cf. nota 14 di *Gödel 1947*.

cui *ogni insieme ha esistenza indipendente e realtà oggettiva.* In simboli, avremo il seguente schema:

$$\mathsf{IRP} \qquad \forall x(Set(x) \rightarrow (\mathcal{IE}(x) \wedge \mathcal{OR}(x))).$$

Per Gödel il concetto oggettivo di insieme è preesistente rispetto ad ogni sua possibile caratterizzazione e viene da noi scoperto e progressivamente conosciuto in modo sempre più comprensivo. Questo punto di vista sembra testimoniato, in questa prima edizione del *Cantor paper* dalla seguente affermazione:[471]

> ... gli assiomi della teoria degli insiemi non costituiscono un sistema in sè chiuso, ma anzi, esattamente al contrario, proprio *il concetto di insieme* sul quale essi sono basati suggerisce la loro estensione mediante nuovi assiomi ...

Quali esempi concreti di nuovi assiomi insiemistici, come anticipato nel capitolo 11, Gödel cita gli assiomi forti dell'infinito ed in particolare l'*ipotesi dei cardinali inaccessibili* e *l'ipotesi dei cardinali di Mahlo*.

Secondo l'autore, anche se sul tema degli assiomi forti dell'infinito o dei *grandi cardinali* si sa ancora molto poco,[472] tuttavia la loro stessa esistenza evidenzia il fatto che l'attuale teoria degli insiemi è incompleta e che tuttavia può essere "integrata in modo non arbitrario mediante nuovi assiomi che sono solo la naturale prosecuzione di quelli finora accettati".[473]

Da questa prima edizione dell'articolo emergono due fatti che sembra non siano mai stati sottolineati con sufficiente chiarezza nella letteratura secondaria. Il primo è che Gödel, già negli anni Quaranta, sembra essere del tutto consapevole del fatto che l'assunzione dell'esistenza di *grandi cardinali piccoli*[474] non è sufficiente a fornire una descrizione dell'universo insiemistico che possa risolvere il problema del continuo.

Il secondo è che l'autore non ha mai limitato l'ambito di estendibilità degli assiomi della teoria degli insiemi ai soli assiomi dell'infinito. Infatti a pagina 182 di *Gödel 1947* si dice chiaramente che oltre agli assiomi dei grandi cardinali:

> ... può anche darsi che ... esistano ulteriori assiomi della teoria degli insiemi (finora sconosciuti) che una più profonda comprensione dei concetti base della

[471]Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 181.

[472]E di fatto oggi questo campo è una branca a sé stante della teoria degli insiemi.

[473]Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 182.

[474]Intuitivamente tutti quelli compresi fra gli inaccessibili e i misurabili. Si veda al riguardo *Kanamori 1994*.

> logica e della matematica ci permetterebbe di riconoscere come implicati da questi concetti.[475]

Da quest'ultima citazione emerge un importante elemento dell'approccio gödeliano ai fondamenti cui abbiamo accennato sopra: la natura *mediata* e *progressiva* dell'intuizione che noi abbiamo dei concetti logici e matematici. Di fatto, è importante sottolinearlo, Gödel qui non parla ancora di *intuizione dei concetti*, ma solo di *comprensione dei concetti*. Secondo l'autore, questa nostra facoltà di comprendere i concetti logico-matematici costituisce un modo per individuare nuovi assiomi per la matematica sulla base della loro *necessità intrinseca* (criterio *epistemico*).

Tuttavia la necessità intrinseca non è, a detta dell'autore, l'unica via utile per individuare nuovi assiomi. Un secondo criterio euristico sarebbe quello di determinare la validità di un candidato come nuovo assioma:[476]

> ... per via induttiva, studiandone il "successo" ossia la fecondità in conseguenze ed in particolare in conseguenze "verificabili", conseguenze cioè dimostrabili senza il nuovo assioma, ma le cui dimostrazioni per mezzo del nuovo assioma siano considerevolmente più semplici e più facili da scoprire e rendano possibile condensare in un'unica dimostrazione molte dimostrazioni diverse.

Indichiamo questo come il criterio *induttivo*.

Un terzo criterio di valutazione indicato da Gödel è quello basato sulla seguente osservazione:[477]

> ... potrebbero esistere assiomi così ricchi di conseguenze verificabili, così illuminanti per un'intera disciplina, e che forniscono metodi così potenti per risolvere dati problemi (e addirittura per risolverli ... costruttivamente) che del tutto indipendentemente dalla loro necessità intrinseca, essi dovrebbero essere assunti, almeno nello stesso senso in cui si accetta una ben-fondata teoria fisica.

Chiamiamo questo criterio *sistematico*.

Dalle parole dell'autore sembrerebbe che il criterio induttivo sia indipendente da quello sistematico (e ad esso analogo) e che invece quello epistemico sia considerato prioritario rispetto a quello induttivo. Ciò che invece non è

[475]Si noti per inciso che la più recente proposta per una soluzione del problema del continuo, dovuta a Huge Woodin (Cf. *Woodin 2001* e *2001a*), si basa proprio su un'estensione dell'ordinaria teoria degli insiemi sia dal punto di vista logico che da quello matematico.

[476]Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pag. 182.

[477]Cf. *Gödel 1947* in *Gödel 1990*, pagg. 182-183.

molto chiaro è che relazione di priorità sussista fra il criterio epistemico e quello sistematico. La questione sembra di un qualche interesse perché di recente c'è stato chi, come ad esempio Penelope Maddy,[478] anche con esplicito riferimento a Gödel, ha rivendicato una priorità del criterio sistematico su quello epistemico nel tentativo di fondare un approccio "naturalistico" in filosofia della matematica.

15.3. Oggettualità empirica

Come abbiamo sottolineato analizzando il *Russell paper*, il realismo concettuale che caratterizza la filosofia della matematica gödeliana negli anni Quaranta è già fortemente legato ad un'analogia fra matematica e scienze empiriche la quale, in ambito ontologico, riconosce pari dignità a oggetti matematici e oggetti empirici e, in ambito epistemologico, riconosce un rapporto per lo meno di somiglianza fra *comprensione* dei concetti e *percezione* sensibile.

Il problema che rende difficile (se non impossibile) una profonda e sistematica comprensione di quest'analogia sta nel fatto che Gödel, in nessuno degli articoli relativi ai fondamenti e alla filosofia della matematica, definisce che cosa lui intenda per "oggetto empirico".

Esiste tuttavia un luogo in cui l'autore si è almeno in parte confrontato col problema degli oggetti empirici e cioè l'articolo relativo al rapporto fra filosofia idealistica e teoria della relatività. E' proprio a questo articolo (ed in particolare alle versioni preparatorie pubblicate nel terzo volume dei *Collected Works*) che ci rivolgeremo, brevemente, nel tentativo di dare qualche elemento di leggibilità e di decifrabilità all'analogia gödeliana.

15.3.1. Dal 1946 al 1949

Fra il 1946 e il 1949 Gödel lavorò alla stesura di un articolo, da inserire nel volume relativo ad Albert Einstein curato da Schlipp, che verrà poi pubblicato sotto il titolo di "An observation on the relation between theory of relativity and idealistic philosophy" (*Gödel 1949a*). Dall'analisi del *Nachlass* è poi emerso che l'autore, in fase preparatoria, redasse ben cinque versioni dell'articolo (indicate dai curatori con le lettere A, B1, B2, C1, C2), due delle quali (la B2 e la C1) sono state pubblicate nel terzo volume dei *Collected*

[478] Cf. *Maddy 1996* e *1997*.

Works col titolo “Some observations about the relationship between theory of relativity and Kantian philosophy”.

Come osserva lo stesso curatore dei due articoli inediti, Howard Stein,[479] le cinque versioni preparatorie di *Gödel 1949a* sono tutt’altro che “mere bozze preliminari dell’articolo”, ma costituiscono piuttosto dei saggi ben diversi sia formalmente che contenutisticamente da quello definitivo. Inoltre, essi rivelano molto più di *Gödel 1949a* del punto di vista gödeliano sulla filosofia della fisica e sulla gnoseologia in senso lato.

Nel suo *1949a* Gödel si occupa infatti di mostrare come la teoria della relatività costituisca in qualche modo una conferma della dottrina, che lui attribuisce a “Parmenide, Kant e i moderni idealisti”, secondo cui il mutamento è illusorio. D’altro canto, nei due articoli *Gödel *1946/49-B2* e *Gödel *1946/49-C1* l’autore si occupa invece di alcune linee di convergenza fra teoria della relatività e filosofia kantiana e in particolare rispetto alla loro concezione di spazio e tempo.[480]

15.3.2. Due tesi sul kantismo

Howard Stein nella sua “Nota introduttiva” ai due articoli evidenzia molto bene le tesi fondamentali in essi sostenute da Gödel. Il nostro autore vuole mostrare infatti che:

1. la dottrina kantiana dell’idealità trascendentale dello spazio e del tempo è sostenuta dalla teoria della relatività;

2. se si assume la teoria della relatività come descrizione in qualche misura fedele della realtà fisica, allora la dottrina kantiana nel suo complesso richiede una certa revisione.

Il primo punto è ben espresso all’inizio di *Gödel *1946/49-B2*, dove possiamo leggere:[481]

> E’ un fatto notevole, cui tuttavia è stata prestata poca attenzione nelle correnti discussioni filosofiche, che almeno in un punto la teoria della relatività ha fornito una conferma davvero sorprendente delle dottrine kantiane.

[479] Cf. *Stein 1995*.

[480] Perciò chiameremo le due versioni preparatorie qui in esame *Kant papers*.

[481] Cf. *Gödel 1995*, pag. 230.

L'autore si affretta a puntualizzare[482] che lui non aderisce alla filosofia di Kant e tuttavia il fatto stesso di considerare quest'autore indica un suo particolare interesse[483] per la la filosofia kantiana.[484]

Entrambi i *Kant papers* costituiscono in gran parte un elenco di punti di contatto fra la concezione dello spazio e del tempo sostenuta da Kant nei *Prolegomeni* e nella prima *Critica* e quelle che caratterizzano la teoria della relatività di Einstein. Tuttavia, come mostrato molto bene da Stein, in varie occasioni Gödel sembra avere una visione non certo filologicamente corretta della filosofia kantiana, cui lui attribuisce un eccessivo soggettivismo.

Il secondo punto, cui l'autore dedica gli ultimi due paragrafi di *Gödel *1946/49-B2*, costituisce per noi un elemento di straordinario interesse in quanto in esso sembra possibile scorgere alcune delle linee caratterizzanti una possibile interpretazione gödeliana della nozione di *oggetto empirico*.

15.3.3. Oggetti di esperienza

Nel paragrafo VII di *Gödel *1946/49-B2* l'autore deve ammettere che esiste un punto su cui kantismo e relatività divergono in modo essenziale, al punto di entrare in contraddizione, cioè rispetto alla "opinione" kantiana secondo cui le scienze naturali nel descrivere il mondo fisico dovrebbero necessariamente "basarsi sulle forme della nostra percezione" e di conseguenza non potrebbero far altro che "stabilire relazioni fra apparenze".

Per Gödel questo punto, che è di fatto il cuore dell'idealismo trascendentale, deriverebbe dall'assunzione kantiana della non-conoscibilità di principio delle *Dingen-an-sich* ossia dei *noumeni*. Nelle sue parole:[485]

> Questo punto di vista di Kant ha senza dubbio la sua origine nella sua convinzione della non-conoscibilità (almeno per ragioni teoriche) delle cose in sè.

In nota[486] l'autore afferma che la soggettività trascendentale della conoscenza e l'inconoscibilità dei noumeni non costituiscono due tesi equivalenti in senso stretto. Secondo Gödel:[487]

---

[482] Cf. la nota 1 di *Gödel *1946/49-B2*.

[483] Interesse per altro confermato in *Dawson 1997*.

[484] In particolare per la *Critica della ragion pura* e, forse anche in misura maggiore, per i *Prolegomeni ad ogni futura metafisica che vorrà presentarsi come scienza*.

[485] Cf. *Gödel *1946/49-B2* in *Gödel 1995*, pag. 244.

[486] Cf. la nota 35 in *Gödel *1946/49-B2*.

[487] Cf. *Gödel *1946/49-B2* in *Gödel 1995*, pag. 244.

> Esiste, tuttavia, una certa affinità fra di esse, nella misura in cui il fatto di abbandonare le nostre forme di pensiero è almeno un primo passo verso una conoscenza delle cose in sè.

Di conseguenza, sostiene Gödel, è proprio relativamente alla tesi dell'inconoscibilità della realtà noumenica che l'idealismo kantiano andrebbe modificato se si desidera che l'accordo fra kantismo e relatività sia completo. Secondo l'autore, quindi, l'idealismo trascendentale dovrebbe assumere che:[488]

> ... sia possibile per la conoscenza scientifica, almeno parzialmente e *passo dopo passo*, andare oltre le apparenze [i fenomeni] e avvicinarsi al mondo delle cose [in sè].[489]

Secondo Gödel neppure lo stesso Kant avrebbe escluso nel modo più assoluto la possibilità di una conoscenza anche teoretica, giacchè Kant la ammetteva in ambito pratico, delle *Dingen-an-sich*. Il nostro afferma infatti che Kant "sosteneva che il concetto di cosa-in-sè fosse sensato", sottolineava il fatto che occorreva assumerne l'esistenza e, pur affermandone l'inconoscibilità, non la considerava come "una conseguenza necessaria della natura di tutta la conoscenza".[490]

Su questo punto Gödel afferma qualcosa di certamente inaccettabile dal punto di vista di un kantiano, ma mette anche in rilievo un genuino punto debole dell'idealismo trascendentale e cioè il problema di conciliare l'assoluta inconoscibilità e l'assunzione di esistenza delle *Dingen-an-sich*.

Questo punto viene rilevato anche in *Gödel *1946/49-C1* dove l'autore osserva come Kant stesso avrebbe asserito che le cose-in-sè "esistono, modificano la nostra sensibilità e non esistono nello spazio e nel tempo".[491]

Sembra così che Gödel considerasse la filosofia kantiana stessa come viziata da una tensione interna dovuta al mancato riconoscimento della possibilità di una conoscenza sempre parziale, ma progressivamente perfettibile, delle *Dingen-an-sich*.

15.3.4. Realismo metafisico

Come si sarà notato la seconda delle tesi sul kantismo sostenuta da Gödel sembra improntata (oltre che viziata) da una nozione positiva di *cosa-in-sè*

[488]Cf. *Gödel *1946/49-B2*, in *Gödel 1995*pag. 244.
[489]Il corsivo è mio.
[490]Cf. *Gödel *1946/49-B2* in *Gödel 1995*, pag. 245.
[491]Cf. *Gödel *1946/49-C1* in *Gödel 1995*, pag. 259.

del tutto estranea alla nozione puramente negativa usata da Kant per lo meno nella *Critica della ragion pura.* Nella prima *Critica* leggiamo infatti:[492]

> Il concetto di noumeno, ossia di una cosa da pensarsi non come oggetto dei sensi ma come cosa in sè (unicamente per mezzo di un intelletto puro), non importa alcuna contraddizione interna ... Questo concetto è anzi necessario, affinchè l'intuizione sensibile non venga estesa fino alle cose in sè ... In breve, la possibilità stessa di tali noumeni non risulta comprensibile, e il territorio che si estende al di là della sfera dei fenomeni è (per noi) vuoto ...

E poco dopo:[493]

> Quindi il concetto di noumeno non è altro che un concetto limite, per circoscrivere le pretese della sensibilità ed è quindi soltanto di uso negativo.

Su questo punto l'approccio gödeliano alle nozioni di cosa-in-sè e di oggetto di esperienza sembra quindi irriducibilmente distinto da quello kantiano. La distanza che separa Gödel da Kant sembra dovuta più che ad un'incomprensione del testo della *Critica*,[494] ad una concezione *ingenua* degli oggetti empirici e della nostra conoscenza di essi.

Quello che sembra emergere dalla lettura dei *Kant papers* è una concezione della conoscenza empirica fondata su un certo *realismo metafisico* secondo cui gli oggetti della fisica sono una realtà in senso forte alla quale il progredire delle conoscenze scientifiche ci consente di avvicinarci passo dopo passo. Nell'ottica gödeliana sembrerebbe che l'oggetto empirico sia sdoppiato in una "realtà" epistemica fornita dalla scienza e da una "realtà" assoluta di cui la prima è un'immagine più o meno fedele.

Questo punto di vista sembra testimoniato, fra le altre, da affermazioni come questa:[495]

> Nel presente, imperfetto stato della fisica ... non si può sostenere con un ragionevole grado di certezza che lo schema dello spazio-tempo della teoria della relatività descriva davvero *la struttura oggettiva del mondo materiale.* Forse esso può essere considerato solo un passo *oltre le apparenze* e *verso le cose* (cioè come un "livello di oggettivazione" che sarà seguito da altri).[496]

[492]Cf. *Kant 1967*, A254/B310 e seguenti.
[493]Cf. *Kant 1967*, A255/B311.
[494]O forse ad un'incapacità di riconsegnare le giuste proporzioni ai *Prolegomeni* rispetto alla *Critica.*
[495]Cf. *Gödel *1946/49-B2* in *Gödel 1995*, pag. 240.
[496]Il corsivo è mio.

L'idea del procedere della conoscenza scientifica come una successione di livelli di oggettivazione ottenuti tramite la progressiva rimozione di certi elementi soggettivi viene ripresa esplicitamente da Gödel dalla monografia di Karl Bollert intitolata *Einsteins Relativitätstheorie und ihre Stellung im System der Gesamterfahrung* pubblicata nel 1921 a Lipsia.

Nella nota 6 di *Gödel *1946/49-C1*, a proposito dell'esistenza, in certi universi relativistici, di relazioni temporali assolute fra eventi, l'autore afferma che questo fatto, pur non contraddicendo la dottrina kantiana del tempo, contraddice tuttavia il punto di vista di Kant secondo cui le cose-in-sè e "il correlato oggettivo dell'idea di tempo" non sono conoscibili né per via sensibile né per via intellettuale.

In tal senso, aggiunge Gödel, il disaccordo fra relatività e filosofia kantiana resterebbe presente anche se si sostenesse, non già che la teoria della relatività fornisce una conoscenza completa del "correlato oggettivo dell'idea del tempo", ma soltanto che essa "fa un passo in questa direzione".

Qui l'autore parla di un "correlato oggettivo dell'idea di tempo" che sembra almeno in parte confermare una *concezione metafisica ingenua* della realtà empirica (e non solo di quella materiale) per cui alla nostra "idea" o rappresentazione soggettiva del tempo dovrebbe corrispondere una realtà oggettiva indipendente ma non assolutamente trascendente, né inconoscibile in linea di principio.

Gli anni Cinquanta

Come negli anni Quaranta anche nel decennio successivo Gödel si dedicò più allo studio di questioni filosofiche e fondazionali che a quello di problemi tecnici e matematici. Di fatto l'unica pubblicazione gödeliana degli anni Cinquanta fu l'articolo del '58 sulla "Dialectica interpretation" il quale risaliva però al 1941.

Le ricerche gödeliane furono in quegli anni rivolte sostanzialmente all'approfondimento di temi filosofici incentrati sul problema della fondazione del realismo in matematica e sulla riflessione sull'incompletezza come fenomeno matematico e metamatematico.

Al riguardo sembra opportuno analizzare due fonti inedite che testimoniano questo sforzo di approfondimento e raffinamento del proprio punto di vista filosofico, affrontato da Gödel a partire dagli anni Cinquanta.

16. Conoscenze incomplete

Nel dicembre del 1951 Gödel fu chiamato alla Brown University per la celebre conferenza che si teneva annualmente in onore di Josiah Willard Gibbs. Il testo manoscritto di quella conferenza è stato ritrovato nel *Nachlass* ed è stato pubblicato nel terzo volume dei *Collected Works* preceduto da una ricca nota introduttiva di George Boolos.[497]

La *Gibbs lecture* presenta una straordinaria coesione e un notevole interesse epistemologico, difficili da trovare in altri luoghi dell'opera gödeliana. Per certi versi questo articolo costituisce un rafforzamento di temi tipici degli anni Quaranta ma per altri aspetti esso introduce elementi di forte novità.

16.1. Incompletabilità della matematica

Come sottolinea il titolo stesso della *Gibbs lecture*, "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications",[498] il tema di questa conferenza riguarda sì alcuni fra quelli che Gödel considerava i più importanti risultati metamatematici degli anni Trenta e Quaranta, ma non di per se stessi, quanto per le loro "implicazioni per i problemi filosofici tradizionali sulla natura della matematica".[499]

[497]Cf. *Boolos 1995*.
[498]Cf. *Gödel *1951*.
[499]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 304.

I risultati metamatematici in questione sono naturalmente i due teoremi di incompletezza, non nella loro forma originaria, bensì in quella da essi assunta sulla base di successivi risultati ed in particolare della precisazione della nozione di *procedura finita*. Gödel ribadisce qui con decisione che la definizione che meglio ha saputo catturare la nozione di *procedura finita* è quella, dovuta a Turing, la quale riduce tale concetto a quello di "una macchina con un numero finito di parti".[500]

E' proprio in virtù di questo grande risultato nell'ambito della matematizzazione del concetto di algoritmo che, secondo l'autore, i teoremi di incompletezza "hanno assunto una forma molto più soddisfacente di quella che avevano in origine".[501] Ed è alle conseguenze filosofiche derivanti da questa nuova forma dei suoi risultati che Gödel vuole rivolgere la propria attenzione come ad un tema "mai discusso adeguatamente".

L'autore considera i risultati di incompletezza come "aspetti differenti" o manifestazioni distinte di un unico fatto fondamentale: il fenomeno dell'"incompletabilità o inesauribilità della matematica". Tali manifestazioni, secondo Gödel, emergono nel modo più semplice quando si tenta di assiomatizzare la "matematica propria". Egli distingue nettamente due parti della matematica: da un lato, *i sistemi ipotetico-deduttivi* (fra i quali lui cita la geometria) la verità dei cui assiomi e teoremi è *condizionale* e, dall'altro, *la matematica propria* (di cui sembra far parte per lo meno l'aritmetica finitaria) la verità dei cui assiomi e teoremi è invece *assoluta*.

L'esistenza di proposizioni appartenenti alla matematica propria risulta chiara, secondo l'autore, se si considerano teoremi implicativi della forma:

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n \rightarrow \varphi$$

dove $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sono gli assiomi di una certa teoria $\mathbf{T}$ e φ è un teorema di $\mathbf{T}$. Gödel considera inoltre come proposizioni della matematica propria tutti i teoremi dell'aritmetica finitaria quali ad esempio $2 + 2 = 4$.

In ambito assiomatico la differenza fra matematica ipotetica-deduttiva e matematica propria sta nel fatto che, mentre gli assiomi della prima sono in qualche modo "arbitrari", gli assiomi della seconda invece non lo sono e al contrario "devono essere proposizioni matematiche corrette e inoltre evidenti senza dimostrazione".[502] L'autore osserva, con implicito riferimento a Hilbert

[500]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 305.
[501]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 304.
[502]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 305.

e secondo una sua convinzione da noi più volte sottolineata, che è impossibile evitare di assumere certe proposizioni e certe regole come "evidenti senza dimostrazioni" dal momento che le dimostrazioni matematiche necessitano sempre di qualche "punto di partenza".

Quelli che invece sono ampiamente discutibili e discussi, dice Gödel, sono i limiti della matematica propria. E di fatto finitisti, intuizionisti, predicativisti e platonisti hanno ciascuno una differente idea di quale sia l'estensione della matematica propria.[503]

16.1.1. Incompletabilità della teoria degli insiemi

Chi considera la matematica propria come estesa nella massima misura possibile e ritiene che "tutta la matematica sia riducibile alla teoria degli insiemi astratta", si trova di fronte, a detta dell'autore, alla manifestazione "più semplice e naturale" del fenomeno dell'incompletabilità della matematica.

Se si tenta di assiomatizzare la nozione cantoriana di insieme, osserva Gödel, si approda, anziché ad un numero finito di assiomi come in geometria, ad un'infinità di assiomi la quale può a sua volta essere estesa indefinitamente. Questa situazione costitutivamente non-finita è ulteriormente "aggravata" dal fatto che non sembra possibile "comprendere tutti questi assiomi in una regola finita che li produca".[504]

Secondo l'autore, ciò è dovuto al fatto che per evitare i paradossi senza ricorrere a strumenti estranei ai contenuti e ai metodi della matematica moderna:[505]

> ... il concetto di insieme deve essere assiomatizzato *per passi*.[506]

Si noti come in questo passo ricorra un'espressione analoga a quella usata da Gödel nei *Kant papers* per descrivere il modo in cui la fisica può ottenere una conoscenza sempre più adeguata delle cose-in-sè.

L'autore descrive quindi in che senso ogni tentativo di assiomatizzare il concetto di insieme, da un lato, dovrà procedere per stadi e, dall'altro, non potrà mai giungere ad una conclusione. Ne proponiamo la seguente schematizzazione e (parziale) semplificazione.

---

[503] Dai primi che ammettono solo l'aritmetica finitaria agli ultimi che accettano l'intera teoria degli insiemi.

[504] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 306.

[505] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 306.

[506] In inglese: "*in a stepways manner*".

Il primo passo di un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi consiste nella considerazione di certi oggetti di base, ad esempio i numeri interi. Abbiamo quindi il primo universo di discorso, $V_0 = \mathbb{N}$, e il sistema formale di zeresimo livello ad esso associato, $\mathbf{T}_0$, i cui assiomi sono poi quelli di **PA**.

Nel secondo passo di questo processo di assiomatizzazione della matematica propria si considera l'universo degli insiemi di numeri naturali $\wp(V_0)$ dove $\wp(V_0)$ indica l'insieme potenza di V_0. Indichiamo con V_1 questo secondo universo di discorso. Alla collezione degli insiemi di numeri naturali associamo il sistema assiomatico "di primo livello" $\mathbf{T}_1$.

Il terzo passo consiste quindi nel considerare l'universo V_2 (ossia $\wp(V_1)$) di tutti gli insiemi di insiemi di interi cui viene associata la teoria $\mathbf{T}_2$ degli assiomi "di secondo livello".

Questa procedura può poi essere generalizzata ad ogni intero n, in modo tale da ottenere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la coppia $\langle V_n, \mathbf{T}_n \rangle$ dell'n-esimo universo insiemistico e del relativo sistema assiomatico.

A questo punto si considera la riunione di tutti gli universi V_n ossia la collezione $\bigcup_{n\in\omega} V_n$ ottenendo così la coppia $\langle V_\omega, \mathbf{T}_\omega \rangle$ e si può quindi ricominciare da capo col processo precedente, dove a ciascun indice n si sostituisca l'indice $\omega + n$.

Si può quindi generalizzare il processo ad un ordinale qualsiasi α, ottenendo la coppia $\langle V_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle$, dove l'assioma caratteristico di $\mathbf{T}_\alpha$ stabilisce che *per ogni numero ordinale α esiste l'insieme ottenuto iterando α volte l'operazione di "insieme di" a partire da V_0*. Esso avrà quindi la seguente forma:

$$\forall x(On(x) \to \exists y(y = \underbrace{\wp \cdots \wp}_{x\text{-volte}}(V_0))) \tag{1}$$

dove $On(x)$ sta per "x è un numero ordinale".

Ma la procedura descritta sopra può essere ulteriormente generalizzata ammettendo un assioma secondo cui, *per ogni numero ordinale α, esiste l'insieme ottenuto iterando α volte l'operazione di "insieme di" a partire da qualsiasi insieme dato*. In simboli:

$$\forall x \forall y(On(x) \wedge Set(y) \to \exists z(z = \underbrace{\wp \cdots \wp}_{x\text{-volte}}(y))) \tag{2}$$

dove $Set(y)$ sta per "y è un insieme".

Il passo successivo sarà quello di ammettere che non solo la potenza, ma *qualsiasi operazione da insiemi su insiemi possa essere iterata transfinitamente su qualsiasi insieme dato*. Avremo quindi un nuovo universo caratterizzato da quest'ultimo assioma:

$$\forall x \forall y \forall z (On(x) \wedge Set(y) \wedge Opr(z) \rightarrow \exists w (w = \underbrace{z \cdots z}_{x\text{-volte}}(y))) \tag{3}$$

dove $Opr(z)$ sta per "z è un'operazione da insiemi su insiemi".

Anche se con l'ultimo assioma può sembrare che tutti gli elementi generalizzabili siano stati generalizzati, si può ancora procedere assumendo, per esempio, *l'esistenza di un insieme che sia chiuso rispetto allo schema* (3) ossia ammettendo il seguente assioma:

$$\exists v \forall x \forall y \forall z (On(x) \wedge Set(y) \wedge Opr(z) \wedge y \in v \rightarrow \exists w (w = \underbrace{z \cdots z}_{x\text{-volte}}(y) \wedge w \in v)).$$

Naturalmente si può ricominciare ad applicare il procedimento visto sopra a questo nuovo insieme e così via senza mai ottenere un punto di arrivo.

Questa, secondo l'autore, la più semplice e concettualmente perspicua manifestazione del fenomeno dell'incompletabilità della matematica propria.

16.1.2. Infinito superiore e teoria dei numeri

Gödel ammette che la gerarchia di universi insiemistici e relativi sistemi formali da lui descritta risulta essere enormemente sovradimensionata rispetto all'attuale pratica matematica e che di fatto:[507]

> ... il $99,9\%$ della matematica di oggi è contenuta nei primi tre livelli della gerarchia.

Di conseguenza, per gli scopi pratici la matematica è riducibile addirittura a un numero finito di assiomi.

Tuttavia, secondo l'autore, questo stato di cose è un "mero accidente storico" che potrebbe essere la spia del fatto che ben-noti problemi matematici insoluti, quali l'ipotesi di Riemann, siano tali proprio per la mancanza di un pieno sviluppo della matematica relativa ai livelli superiori della gerarchia.

A testimonianza del fatto che l'infinito superiore non costituisce affatto una mera astrazione nel dominio del transfinito del tutto inutile per il *working mathematician*, Gödel ricorda che è possibile dimostrare che gli assiomi forti dell'infinito hanno conseguenze riguardanti la teoria dei numeri. Per la precisione, ogni assioma forte dell'infinito "implica la soluzione di certi

[507]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 307.

problemi diofantei che sarebbero stati indecidibili sulla base degli assiomi precedenti".[508]

L'autore spiega che è possibile associare ad ogni assioma insiemistico φ_α un polinomio P_α decidibile sulla base di φ_α e di grado ≤ 4. Si tratta però ancora di un risultato puramente teorico che la matematica attuale non è in grado di sfruttare e tuttavia:[509]

> Qualche genere di teoria dei numeri insiemistica, ancora da scoprire, otterrà certamente molto di più.

L'idea di Gödel è quindi che, mentre dal punto di vista *fondazionale* è già stato evidenziato il nesso fra livelli superiori e livelli base della gerarchia, occorre invece fare ancora molti progressi dal punto di vista *matematico* nel senso ad esempio di ottenere una qualche branca dell'aritmetica capace di sfruttare i principi della teoria degli insiemi.

16.2. Incompletabilità e incompletezza

Per quanto semplice, l'esempio precedente resta vincolato ad una filosofia della matematica molto forte che assume totalità transfinite in atto come oggetti matematici non problematici. In tal senso, dice Gödel, è necessario considerare un secondo esempio, più neutro e generale, di incompletabilità della matematica propria: il fenomeno dell'incompletezza.

L'autore enuncia qui i due teoremi di incompletezza in una forma molto più generale e intuitiva di quella vista nel capitolo 2. Il primo viene da lui formulato con riferimento ai problemi diofantei come segue:

INC_1 Per ogni sistema formale $\mathbf{T}$ ben-definito e corretto esistono problemi diofantei in esso irresolubili.

Gödel afferma che questo primo teorema di incompletezza è equivalente al seguente:

INC_1^* Non esiste alcuna macchina di Turing capace di risolvere ogni problema diofanteo.

L'autore enuncia quindi una versione informale del secondo teorema di incompletezza che può essere formulato come segue:

[508] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 307.
[509] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 307-308.

INC_2 Ogni sistema formale ben-definito, **T**, che sia corretto, noncontraddittorio e sufficientemente potente non può dimostrare la propria noncontraddittorietà.

16.2.1. L'argomento epistemico

Secondo Gödel è proprio il secondo teorema di incompletezza, INC_2, che "rende particolarmente evidente l'incompletabilità della matematica" e a testimonianza e spiegazione di questa sua affermazione egli enuncia un argomento di cui proponiamo la seguente lettura e formalizzazione.

Indichiamo con $\boxdot$ l'operatore epistemico di "conoscenza matematica" tale che $\boxdot\varphi$ stia per "io percepisco con certezza matematica la verità di φ" e con $\Box_{\mathbf{T}}$ l'operatore di "dimostrabilità in **T**" tale che $\Box_{\mathbf{T}}\varphi$ stia per "φ è dimostrabile in **T**". L'argomento di Gödel è volto a dimostrare che, sulla base del secondo teorema di incompletezza, se assumo che esista un sistema formale ben-definito, **T**, che dimostra solo proposizioni percepibili con certezza matematica come vere, in breve:

$$\forall\varphi(\Box_{\mathbf{T}}\varphi \to \boxdot\varphi) \tag{1}$$

ed inoltre affermo di percepire con certezza matematica la completezza del sistema **T**, in simboli:

$$\boxdot\forall\varphi(\varphi \to \Box_{\mathbf{T}}\varphi), \tag{2}$$

arrivo ad una contraddizione.

Assumiamo infatti che ogni proposizione percepita matematicamente come vera sia vera, cioè che:

$$\forall\varphi(\boxdot\varphi \to \varphi). \tag{3}$$

Per (1) e (3) otteniamo la correttezza di **T** ossia:

$$\forall\varphi(\Box_{\mathbf{T}}\varphi \to \varphi) \tag{4}$$

e di conseguenza **T** è noncontraddittorio, in simboli:

$$Wid(\mathbf{T}). \tag{5}$$

Se così non fosse, per $\varphi := (\alpha \wedge \neg\alpha)$, avremmo:

$$\Box_{\mathbf{T}}(\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \neg(\alpha \wedge \neg\alpha). \tag{6}$$

Per INC_2 sappiamo che:

$$\neg\Box_{\mathbf{T}} Wid(\mathbf{T}) \tag{7}$$

e dunque, per (5) e (7), che:

$$\exists\varphi(\varphi \wedge \neg\Box_{\mathbf{T}}\varphi) \tag{8}$$

Ma per (2) abbiamo che:

$$\boxdot\forall\varphi(\varphi \rightarrow \Box_{\mathbf{T}}\varphi) \tag{9}$$

e per (3):

$$\forall\varphi(\varphi \rightarrow \Box_{\mathbf{T}}\varphi). \tag{10}$$

Quindi, per logica:

$$\neg\exists\varphi(\varphi \wedge \neg\Box_{\mathbf{T}}\varphi) \tag{11}$$

che è assurdo per (8).

Questo argomento, spiega Gödel, non vale più se si sostituisce alla *matematica in senso oggettivo* (cioè l'insieme delle proposizioni matematiche vere) la *matematica in senso soggettivo* (cioè l'insieme delle proposizioni matematiche dimostrabili).

16.2.2. Incompletabilità forte e debole

Mentre è chiaro che nessun sistema formale ben-definito, $\mathbf{T}$, può caratterizzare adeguatamente la matematica oggettiva (poiché altrimenti avremmo $Wid(\mathbf{T})$ e $\mathbf{T} \nvdash Wid(\mathbf{T})$), secondo Gödel è invece possibile che esista un sistema formale ben-definito, $\mathbf{S}$, capace di caratterizzare la matematica soggettiva. In tal caso, afferma l'autore, è evidente che non potremmo mai conoscere con certezza matematica la correttezza del sistema $\mathbf{S}$, cioè non si darà mai che:

$$\boxdot\forall\varphi(\Box_{\mathbf{S}}\varphi \rightarrow \varphi),$$

dove $\Box_{\mathbf{S}}\varphi$ sta per "φ è dimostrabile in $\mathbf{S}$". Al massimo, prosegue l'autore, potremmo conoscere matematicamente la verità di una proposizione dopo l'altra. Della verità di tutte quante le proposizioni della matematica soggettiva si potrebbe avere al più certezza empirica basata su "un numero sufficiente di istanze o mediante altre inferenze induttive".[510]

[510]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 309.

Se indichiamo con $\Diamond\varphi$ la proposizione "io conosco con certezza empirica la verità della proposizione φ" avremo quindi che, a detta di Gödel, è possibile assumere:

$$\Diamond\forall\varphi(\Box_{\mathbf{S}}\varphi \to \varphi).$$

Da ciò si potrebbe derivare che "la mente umana (nell'ambito della matematica pura) *è* equivalente ad una macchina finita che, tuttavia, è incapace di comprendere completamente il proprio funzionamento".[511]

Questo stato di cose, conclude Gödel, ben lungi dal contraddire il fenomeno dell'inesauribilità della matematica, ne sarebbe invece la manifestazione più cristallina. Se così fosse, infatti, la matematica oggettiva non solo non potrebbe essere mai caratterizzata adeguatamente da nessun sistema formale ben-definito, ma conterrebbe addirittura delle proposizioni *assolutamente indecidibili*, cioè indecidibili "per *qualsiasi* dimostrazione matematica che la mente umana possa concepire".[512] In particolare, precisa Gödel, si avrebbe l'esistenza di problemi diofantei che sono irresolubili per qualsiasi strumento razionale la mente umana sarà mai in grado di escogitare.

Si profilano quindi due forme distinte del fenomeno dell'inesauribilità della matematica. La prima, che potremmo chiamare *incompletabilità debole*, può essere espressa come segue:

INC_w Non esiste alcun sistema formale sufficientemente potente $\mathbf{T}$ capace di dimostrare tutte le proposizioni matematiche vere.

La seconda, che chiameremo *incompletabilità forte*, avrà invece la seguente forma:

INC_s Esistono proposizioni matematiche vere assolutamente indecidibili, cioè indimostrabili con qualsiasi argomento matematico.

16.2.3. La tesi di Gödel

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, Gödel ritiene di aver mostrato che se si potesse assumere il seguente *principio di caratterizzabilità della matematica soggettiva*:

SMC Esiste un sistema formale $\mathbf{S}$ capace di dimostrare ogni proposizione matematica dimostrabile,

[511]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pagg. 309-310.
[512]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 310.

allora si otterrebbe una sorta di *principio di Turing* secondo il quale “la mente umana è equivalente ad una macchina finita”,[513] e di conseguenza si arriverebbe alla incompletabilità forte della matematica oggettiva espressa da INC_s.

Dunque, il nostro autore ritiene di aver argomentato a favore della seguente implicazione:

$$\mathsf{SMC} \Rightarrow \mathsf{INC}_s,$$

secondo la quale: *se esiste un sistema formale capace di dimostrare ogni proposizione matematica dimostrabile, allora esistono proposizioni matematiche vere ma assolutamente indecidibili.*

Se si considera quest'ultima implicazione in forma disgiuntiva si otterrà la seguente *alternativa fondamentale* (*tesi di Gödel*):

$$\neg\mathsf{SMC} \vee \mathsf{INC}_s. \tag{GT}$$

Intuitivamente GT afferma che: *o nessuna macchina di Turing può rappresentare adeguatamente la mente umana oppure esistono problemi matematici assolutamente irresolubili.*[514]

Gödel osserva che l'alternativa non esclude che entrambi i disgiunti siano veri, di conseguenza, in linea di principio, GT dà luogo alle seguenti tre possibilità:

(i) $\neg\mathsf{SMC}$ è vero e INC_s è falso;

(ii) $\neg\mathsf{SMC}$ è falso e INC_s è vero;

(iii) $\neg\mathsf{SMC}$ e INC_s sono entrambi veri.

L'autore ritiene che GT meriti particolare attenzione, da un lato, per il suo grande interesse filosofico e, dall'altro, in quanto costituisce una “codifica” del fenomeno dell'incompletabilità della matematica “del tutto indipendente dal particolare punto di vista assunto rispetto ai fondamenti della matematica”.[515]

[513]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pagg. 309-310.

[514]Nei termini usati da Gödel avremo cioè che: “O la matematica è incompletabile in questo senso, che i suoi assiomi non possono mai essere compresi in una regola finita, ossia la mente umana (persino nell'ambito della matematica pura) sorpassa infinitamente le capacità di una macchina finita oppure esistono problemi diofantei assolutamente irresolubili.” (*Gödel *1951*, pag. 310.)

[515]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 310.

16.2.4. Incompletabilità e materialismo

Per Gödel le conseguenze filosofiche di entrambi i corni dell'alternativa fondamentale risultano essere "chiaramente opposte alla filosofia materialista".[516] La prima alternativa di GT, la possibilità (i) del precedente paragrafo:[517]

> ... sembra implicare che il funzionamento della mente umana non può essere ridotto al funzionamento del cervello, che secondo ogni apparenza è una macchina finita con un numero finito di parti, cioè i neuroni e le loro connessioni.

Dunque, secondo la prima alternativa, varrebbe una forma di "vitalismo" ossia di dualismo per cui la mente andrebbe considerata come qualcosa di irriducibile e quindi di ontologicamente distinto dal cervello. Sembra perciò del tutto evidente in che senso Gödel consideri questa alternativa come un forte argomento anti-materialista.

La seconda alternativa di GT, la possibilità (ii), essendo in netto contrasto col costruttivismo matematico, sembrerebbe corroborare la tesi filosofica secondo cui:[518]

> ... gli oggetti e i fatti matematici (o almeno *qualcosa* in essi) esistono oggettivamente e indipendentemente dai nostri atti mentali e dalle nostre decisioni...[519]

Dunque, il secondo corno dell'alternativa,[520] parrebbe implicare "una qualche forma di platonismo o "realismo" rispetto agli oggetti matematici"[521] e sarebbe quindi anch'esso in tensione con la "filosofia materialista" ed in particolare con qualsiasi forma di riduzionismo empirista.

16.3. Realismo matematico

Come abbiamo visto nel precedente paragrafo, Gödel parla ora di realtà oggettiva e indipendente di *oggetti e fatti matematici*, e quindi possiamo dire che all'inizio degli anni Cinquanta emerge una terza, in parte inedita,

[516]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 311.
[517]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 311.
[518]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 311.
[519]Il corsivo è mio.
[520]Il punto (ii) di cui sopra.
[521]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pagg. 311-312.

versione del realismo ontologico gödeliano in cui non si considerano né i concetti matematici (come nella prima formulazione nel *Russell paper*), né le classi e gli insiemi (come nella seconda importante formulazione in *Gödel 1947*), bensì per la prima volta in modo esplicito gli *oggetti* della matematica e le *relazioni* fra essi sussistenti.[522]

Ci troviamo quindi ora di fronte ad un nuovo principio distinto sia da quello di *realtà concettuale* (CRP) che da quello di *realtà insiemistica* (IRP), che potremmo schematizzare, usando il solito formalismo, come segue:

$$\textsf{MRP} \qquad \forall x((\mathcal{MO}(x) \vee \mathcal{MF}(x)) \rightarrow (\mathcal{IE}(x) \wedge \mathcal{OR}(x))),$$

dove $\mathcal{MF}(x)$ sta per "x è un fatto matematico". Si tratta quindi di un *principio di realtà matematica* secondo cui *ogni oggetto o fatto matematico ha esistenza indipendente e realtà oggettiva*. Si noti che esso può sembrare più ampio sia di CRP che di IRP e tuttavia, pur essendo probabilmente più generale di IRP, parrebbe invece essere più specifico di CRP.[523]

Nella nota 17 della *Gibbs lecture* troviamo un ampio commento su che cosa si debba intendere per realtà oggettiva e indipendente degli oggetti e dei fatti matematici. Gödel ammette che:[524]

> Non esiste nessun termine di sufficiente generalità per esprimere esattamente la conclusione qui tratta, la quale dice solo che gli oggetti e i teoremi della matematica sono *oggettivi* e *indipendenti* dal nostro libero arbitrio e dai nostri atti creativi tanto quanto lo è il mondo fisico.

Quindi, come abbiamo suggerito, in MRP l'autore tien ferme le due caratteristiche della *realtà oggettiva* e della *esistenza indipendente*, applicandole tuttavia esplicitamente a oggetti quali numeri, funzioni e insiemi, e a fatti quali relazioni fra numeri, funzioni e insiemi.

Ancora una volta interviene qui l'analogia fra matematica e scienze empiriche e tuttavia in questa sede essa viene sfruttata per chiarire un fatto del tutto assente dalle precedenti formulazioni del realismo gödeliano ossia il fatto che, secondo l'autore, MRP non dice nulla rispetto al problema se gli

[522]Almeno così pare che i fatti matematici debbano essere considerati. Di fatto la nota 17 di *Gödel *1951*, sembra suggerire che per "fatti matematici" Gödel intenda il contenuto dei teoremi della matematica.

[523]Ma qui la cose non sono poi così chiare. Si potrebbe infatti argomentare che non ogni oggetto o fatto matematico debba necessariamente essere un concetto matematico e viceversa. In tal senso si potrebbe pensare che CRP e MRP siano due principi inconfrontabili.

[524]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.

oggetti matematici siano collocati "nella natura, nella mente umana o in nessuna delle due" ossia non decide in senso empirista, psicologista o platonista sulla natura degli oggetti matematici.

Ci troviamo quindi di fronte ad una riflessione apparentemente nuova. Mentre negli anni Quaranta un principio come CRP determinava immediatamente quale lettura andasse fatta dei concetti matematici, cioè quella platonista, qui invece sembra che per Gödel si diano due assunzioni distinte. La prima, sintetizzata dal principio MRP, non parla della natura degli oggetti matematici, ma li caratterizza dal punto di vista epistemologico, mentre la seconda, ne determina l'essenza, e quindi li caratterizza dal punto di vista ontologico.

L'autore chiarisce[525] che la scelta fra le tre possibili caratterizzazioni ontologiche degli oggetti matematici cade necessariamente sull'ultima, infatti:[526]

> La situazione reale ... è che se si assume l'oggettività della matematica segue immediatamente che i suoi oggetti devono essere totalmente diversi dagli oggetti sensibili ...

e quindi l'ipotesi empirista e quella psicologista vengono a cadere.

Le ragioni avanzate da Gödel a favore della sua tesi secondo cui da MRP seguirebbe la *realtà metafisica* (o platonica) degli oggetti matematici sono le seguenti:

1. i teoremi della matematica non dicono nulla sul mondo spazio-temporale, quindi in particolare sui fatti empirici esterni (la natura) e sui fatti empirici interni (la mente);[527]

2. i fatti matematici sono conoscibili deduttivamente, mentre i fatti empirici solo induttivamente;[528]

3. gli oggetti matematici possono esser conosciuti *a priori* cioè per via puramente intellettuale, gli oggetti empirici invece solo *a posteriori*, cioè necessariamente mediante i sensi.[529]

Senza voler sovrastimare questo testo, sembra però innegabile che questa argomentazione costituisca un'ulteriore novità rispetto agli articoli filosofici

[525]Cf. la nota 18 *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.
[526]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.
[527]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.
[528]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.
[529]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.

degli anni Quaranta, se non per i contenuti (che in effetti sono molto simili) certamente per la forma che comincia ad assumere un carattere appunto *argomentativo* e *problematico*, laddove nel decennio precedente avevano invece un'impronta *descrittiva* e *apodittica*. In altri termini, a partire almeno dal 1951, il realismo ontologico gödeliano non è più un semplice *fatto matematico*, ma è invece visto da Gödel come un problema da risolvere, come una *tesi da dimostrare*.

Negli anni Quaranta si ha un platonismo che trova sì la propria *ratio cognoscendi* nella presenza ineliminabile di metodi impredicativi e non-costruttivi nel corpus della matematica in senso proprio, ma trova di fatto la propria *ratio essendi*, la sua fondazione ultima, nel suo essere per così dire un *fatto evidente*. Nella *Gibbs lecture* invece abbiamo che la *stabilità* semantica (oggettività) e l'*assolutezza* ontologica (indipendenza) di oggetti e fatti matematici sono visti come conseguenza (possibile) di un fenomeno matematicamente documentato e dimostrato, mentre il platonismo è individuato, tramite un'argomentazione (anche se non ancora mediante una dimostrazione), come conseguenza di tali proprietà di stabilità e assolutezza.

16.3.1. Argomenti di plausibilità

Gödel sostiene che il primo corno di GT, non è al momento decidibile e tuttavia sembra almeno plausibile in quanto "in pieno accordo con le opinioni di alcuni dei maggiori esperti di fisiologia nervosa e cerebrale".[530] Dunque sulla prima delle possibilità aperte da GT l'autore sembra piuttosto scettico anche se propenso per la sua validità.

Sul secondo corno di GT e sulle sue conseguenze filosofiche Gödel si sofferma invece ampiamente, cercando di rispondere ad una serie di obiezioni al platonismo che essa sembra implicare. La prima obiezione considerata dall'autore è la seguente: *il costruttivismo matematico non è affatto escluso da* MRP, *infatti un oggetto da noi costruito può essere indipendente, oggettivo e parzialmente sconosciuto persino al suo stesso costruttore.*

La risposta di Gödel a questa prima obiezione è che anche se la matematica fosse una nostra costruzione, non potrebbe mai essere costruita dal nulla. Dunque il materiale iniziale da cui noi costruiamo la matematica dovrebbe comunque essere inteso come una realtà (metafisica) assoluta e stabile. In secondo luogo, ammesso che noi usiamo uno strumento per costruire la mate-

[530]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 312.

matica, essa continuerebbe ad esprimere alcuni fatti oggettivi e indipendenti, cioè certe proprietà di questo strumento.

Una seconda obiezione considerata da Gödel è questa: *poiché non si può verificare caso per caso la validità di una proposizione relativa a tutti gli interi, il significato di tale proposizione potrà essere solo l'esistenza di una dimostrazione generale e quindi in ultima analisi una certa nostra costruzione.*

L'autore risponde affermando che è possibile congetturare che una certa proposizione universale φ sia vera ed allo stesso tempo ipotizzare che "non esista alcuna dimostrazione generale" di φ. L'esempio proposto è quello di un'equazione della forma:

$$F(n) = G(n)$$

che sia verificabile per ogni numero naturale $n < m$ dove m è un intero molto grande. Si tratta di un analogo della congettura di Goldbach, in cui la verità della proposizione universale:

$$\forall n(F(n) = G(n))$$

può essere congetturata su base probabilistica, sebbene non dimostrata matematicamente, né con probabilità 1.

16.3.2. Metodi deduttivi e induttivi

Nella risposta data da Gödel alla seconda delle due obiezioni al realismo matematico viste sopra, emerge un elemento di approfondimento dell'analogia fra matematica e scienze empiriche per quanto riguarda *il metodo*. Secondo l'autore, le generalizzazioni per induzione ed in particolare l'*inductio per enumerationem simplicem* non dovrebbero essere escluse dal novero dei metodi matematici. I matematici hanno invece un "innato rifiuto" nei confronti dei metodi induttivi, cui attribuiscono al massimo "un significato euristico".

Ma questo rifiuto dei metodi induttivi *deboli*, sostiene Gödel, è ancora dovuto al pregiudizio secondo cui oggetti e fatti matematici, in realtà, non esistono. Secondo l'autore invece essi esistono almeno tanto quanto i fatti e gli oggetti della fisica e quindi non sembrano esserci motivi per non applicare i metodi induttivi anche in matematica.

Gödel attribuisce questo atteggiamento *metodologicamente restrittivo* dei matematici ad una sorta di *conservatorismo* per cui in matematica si è mantenuto un atteggiamento già da tempo abbandonato da tutte le altre scienze ossia il metodo deduttivo che parte da assunzioni certe e trasmette lo stesso grado di certezza dalle premesse alle conclusioni dell'argomentazione, ottenendo così generalizzazioni solo se assolutamente certe.

Secondo l'autore, pretendere che in matematica i metodi deduttivi detengano l'assoluto monopolio sarebbe probabilmente un errore, sarebbe un po' come tentare di vincolare la fisica al solo uso di questi metodi. In questo senso, aggiunge Gödel, la seconda alternativa di GT non favorisce esclusivamente la "filosofia razionalista ed idealista", ma anche "il punto di vista empirista" almeno nella misura in cui i metodi induttivi si possono considerare come metodi essenzialmente empirici.

16.3.3. Argomenti indipendenti

L'analisi critica del platonismo matematico viene ulteriormente approfondita dall'autore. Gödel sostiene che il "realismo concettuale" derivante dal secondo corno di GT è sostenuto anche dai "moderni sviluppi nei fondamenti della matematica"[531] che sono indipendenti dalla soluzione dell'alternativa fondamentale.

1. Questi recenti sviluppi forniscono, secondo l'autore, una tale chiarificazione dei fondamenti della matematica da escludere ogni concezione costruttivista. Se infatti la matematica fosse una nostra costruzione, un'eventuale ignoranza del costruttore dovrebbe essere attribuita alla mancanza di una esatta comprensione[532] dell'oggetto costruito. Ma, sostiene Gödel, i recenti sviluppi nell'ambito dei fondamenti non sembrano lasciare alcun margine di inesattezza e quindi dovrebbero aver reso possibile la soluzione di ogni problema matematico aperto.[533] Di fatto questo non si è realizzato ma al contrario "ciò non è stato praticamente di nessun aiuto per la soluzione dei problemi matematici".[534]

2. Un costruttore[535] è normalmente libero da ogni vincolo (tranne al massimo dal materiale usato) nella sua attività. Analogamente, se la matematica fosse una costruzione, al di là di un materiale iniziale che potrebbe essere rappresentato ad esempio dagli assiomi, dovrebbe per il resto essere completamente libera. Tuttavia, osserva Gödel, il matematico non è affatto

[531]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 314.

[532]Gödel parla di "chiara realizzazione".

[533]Cioè, dal punto di vista costruttivista, l'esatta comprensione di ogni aspetto interessante dell'oggetto costruito.

[534]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 314.

[535]Gödel parla di "creatore".

libero di stabilire la verità di un teorema e di conseguenza ogni teorema ne limita la libertà di costruzione ed allo stesso tempo mette a nudo una realtà indipendente dall'attività costruttrice del matematico.

3. Dal punto di vista costruttivo interi e insiemi di interi vanno considerati come oggetti distinti. Talvolta in aritmetica la dimostrazione di un teorema sugli interi fa uso del concetto di insieme di interi. Ma, osserva l'autore, non si vede il motivo per cui la *conoscenza* di una proprietà di un dato oggetto $\mathcal{O}_1$ debba dipendere dalla *costruzione* di un secondo oggetto $\mathcal{O}_2$ completamente diverso dal primo.[536]

16.4. Matematica e convenzione

Secondo l'autore esiste una formulazione del costruttivismo matematico che si distingue dalle altre per essere "la più precisa" e "la più radicale":[537] *il convenzionalismo matematico*. Questo punto di vista, spiega l'autore, "interpreta le proposizioni matematiche come se esprimessero solo certi aspetti delle convenzioni sintattiche (o linguistiche)".[538] Gödel approfondisce la definizione di questa posizione filosofica[539] dicendo che per convenzioni sintattiche lui intende quelle convenzioni che parlano solo di "espressioni simboliche" ed in particolare stabiliscono le regole puramente formali[540] relative al significato ed alla verità di tali espressioni.

L'autore osserva che, sotto un'interpretazione opportunamente generale dell'espressione "regola sintattica", il convenzionalismo matematico ammette come caso particolare il formalismo.[541] Di conseguenza un'eventuale realizzazione del programma di Hilbert avrebbe rappresentato una prova a vantaggio del punto di vista convenzionalista. Viceversa un'eventuale dimostrazione di fattibilità del convenzionalismo matematico, implicherebbe la fattibilità di un qualche genere di programma formalista.

I riferimenti citati a proposito del convenzionalismo matematico riguardano naturalmente il Circolo di Vienna con cui l'autore fu in stretto contatto

[536]Questo terzo argomento ci sembra poco convincente o per lo meno poco conclusivo e in effetti lo stesso Gödel definisce questa come una "situazione molto strana" ma non contraddittoria né paradossale in senso stretto.

[537]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 315.

[538]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 315.

[539]Cf. la nota 23 di *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 315.

[540]Cioè: "tali che non implichino la verità o falsità di nessuna proposizione fattuale".

[541]Nei termini usati dal nostro: "la fondazione formalistica della matematica".

negli anni dell'università. In particolare egli menziona il suo maestro Hans Hahn, e il suo collega Rudolf Carnap. Del primo viene citato l'articolo "Logique, mathématiques et connaissance de la réalité"[542] e del secondo il famoso articolo "Formalwissenschaft und Realwissenschaft"[543] e la monografia *Le problème de la logique de la science. Science formelle et science du réel*.[544]

Anche se è chiaro che costruttivismo e convenzionalismo sono distinti nelle loro formulazioni, l'autore avanza il dubbio che di fatto queste due posizioni possano collassare dal momento che anche il convenzionalismo nega l'esistenza oggettiva di oggetti matematici ed inoltre perché per i costruttivisti l'esistenza degli oggetti matematici consiste nella loro costruibilità mentale e i convenzionalisti sarebbero probabilmente pronti ad ammettere che "noi immaginiamo oggetti" corrispondenti ai simboli matematici.

16.4.1. Convenzione e tautologicità

L'ulteriore caratterizzazione del convenzionalismo matematico data da Gödel richiama le considerazioni fatte a proposito dell'analiticità nel *Russell paper*. In particolare l'autore afferma che per i convenzionalisti le proposizioni matematiche sono tanto "vuote di contenuto" quanto le proposizioni analitiche nel senso tautologico della parola. L'esempio suggerito dall'autore è quello della proposizione "tutti gli stalloni sono cavalli" che richiama l'esempio kantiano "tutti gli scapoli sono uomini non sposati".

Dunque avremo che il convenzionalismo matematico può essere ridotto al seguente *principio di vacuità materiale*:

MVP Le verità matematiche sono analitiche nel senso tautologico del termine, in simboli:

$$\forall\varphi(Tmp(\varphi) \rightarrow Taut(\varphi))$$

dove $Tmp(\varphi)$ sta per "φ è una proposizione matematica vera" e $Taut(\varphi)$ sta per "φ è una proposizione tautologica".

Come sappiamo già sulla base del *Russell paper* l'autore considerava falso questo principio e propendeva invece per il seguente *principio di analiticità concettuale*:

[542] Cf. *Hahn 1935*.
[543] Cf. *Carnap 1935*.
[544] Cf. *Carnap 1935a*.

CAP Le verità matematiche sono analitiche nel senso concettuale del termine, in breve:

$$\forall\varphi(Tmp(\varphi) \rightarrow Conc(\varphi)),$$

dove $Conc(\varphi)$ sta per "φ è una proposizione vera sulla base del significato concettuale dei termini in essa occorrenti".

Gödel osserva che la forma più comune di convenzione sintattica è la definizione (sia essa esplicita o implicita) e che quindi il modo più semplice di descrivere il convenzionalismo matematico sta nell'affermazione secondo cui i teoremi matematici sono veri "solo sulla base della definizione dei termini in essi occorrenti".[545] Di conseguenza, secondo il punto di vista convenzionalista, "col successivo rimpiazzamento di tutti i termini coi loro *definientia*, qualsiasi teorema può essere ridotto ad una tautologia esplicita, $a = a$".[546]

Ovviamente, come già nel *Russell paper*, Gödel si rifà ai teoremi di incompletezza ed in particolare a INC_1^* per sottolineare l'insostenibilità del convenzionalismo ed in particolare di MVP. Se infatti assumiamo MVP, otteniamo un algoritmo (basato sulla sostituzione di ogni *definiens* col suo *definiendum*) per decidere ogni problema matematico e quindi in particolare ogni problema diofanteo, ma questo contraddice appunto INC_1^*.

16.4.2. Una *petitio principii*

Certo non tutte le convenzioni sintattiche sono definizioni e quindi l'argomento proposto dall'autore funziona solo nel caso semplificato di un *convenzionalismo puramente definizionale*. Tuttavia Gödel elabora un argomento volto a dimostrare che anche la forma più generale di convenzionalismo è insostenibile. Questa versione generale, dice l'autore, deve dimostrare almeno la seguente affermazione:[547]

> Ogni proposizione matematica dimostrabile può essere dedotta soltanto sulla base delle regole sulla verità e falsità degli enunciati ... e le negazioni delle proposizioni matematiche dimostrabili non possono essere derivate in questo modo.

Gödel osserva che per la logica matematica il teorema di cui sopra è dimostrabile e che tuttavia per poter realizzare tale dimostrazione occorre pre-

[545]Cf. *Gödel *1995* in *Gödel 1995*, pag. 316.
[546]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 316.
[547]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 316.

supporre la verità degli assiomi logici stessi per lo meno “in riferimento a simboli, combinazioni di simboli, insiemi di tali combinazioni”.[548]

Dunque, secondo l'autore, la debolezza del convenzionalismo è costitutiva, infatti questo punto di vista per dimostrare la tautologicità degli assiomi della matematica è costretto ad assumerne la verità. Egli accusa cioè il convenzionalismo matematico di essere viziato da una *petitio principii* per cui, anziché dimostrare la verità degli assiomi mostrandone la tautologicità, esso finisce surrettiziamente per dimostrarne la tautologicità assumendone la verità.

16.4.3. Tautologicità e noncontraddittorietà

Gödel elabora un ulteriore argomento volto a refutare il convenzionalismo matematico e basato ancora una volta sull'incompletezza, ma in questo caso su INC_2. Secondo l'autore, dai risultati di incompletezza segue che “una dimostrazione del carattere tautologico (in un opportuno linguaggio) degli assiomi matematici è al tempo stesso una dimostrazione della loro noncontraddittorietà e non la si può ottenere con metodi dimostrativi più deboli di quelli contenuti in questi stessi assiomi”.[549]

E' inoltre noto, in base a INC_2, che per dimostrare la noncontraddittorietà dell'aritmetica classica e di qualsiasi sistema più forte si deve ricorrere a certi concetti astratti ossia a concetti “che non si riferiscono agli oggetti sensibili di cui i simboli sono un particolare tipo”.[550] Ma ovviamente tali concetti astratti sono, per definizione, “non-sintattici” e quindi si può affermare che:[551]

> *... non esiste nessuna giustificazione razionale della nostra credenza precritica relativa all'applicabilità e noncontraddittorietà della matematica classica ... sulla base di un'interpretazione sintattica.*

Gödel dedica un'importante nota[552] della *Gibbs lecture* alla nozione di *concetto astratto*. Quali esempi matematici di concetti astratti egli cita il concetto di *insieme*, quello di *funzione di interi*, quello di *dimostrazione*,[553]

[548] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 317.
[549] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 317.
[550] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 318.
[551] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 318.
[552] Cf. la nota 27 a pag. 318.
[553] Nel senso di conoscibilità della verità di una certa proposizione.

quello di *derivabilità*,[554] ed infine il concetto di *esistenza*.[555] L'autore spiega quindi che "la necessità di tali concetti per la dimostrazione di noncontraddittorietà della matematica classica risulta dal fatto che i simboli possono essere mappati sugli interi, e perciò la teoria dei numeri finitaria (e, *a fortiori*, quella classica) contiene tutte le dimostrazioni basate soltanto su di essi".[556] Tuttavia Gödel è ancora cauto su questo argomento, infatti egli ritiene che la certezza di tale necessità dei concetti astratti non sia "assolutamente conclusiva", dal momento che il problema dell'assiomatizzazione dei "concetti non-astratti" non sarebbe stato approfondito sufficientemente.

Dunque ancora negli anni Cinquanta l'autore ammette che non è stata detta una parola definitiva su quali siano i reali confini della matematica finitaria[557] pur considerando rassicurante il fatto che la necessità dei concetti astratti sia stata riconosciuta "persino dai principali formalisti".[558]

16.4.4. Convenzione e concetto

Un ultimo argomento contro il convenzionalismo emerge dalla considerazione di quello che Gödel considera l'unico elemento "del tutto corretto" del convenzionalismo matematico. L'autore ribadisce che questo punto di vista asserisce essenzialmente che:

- *non esistono fatti matematici*;
- le proposizioni matematicamente vere sono *analiticamente vere*;
- le proposizioni matematicamente vere sono *vuote di contenuto*.

Secondo Gödel il punto di vista convenzionalista contiene un grano di verità laddove afferma che le proposizioni matematiche non dicono assolutamente niente a proposito della "realtà fisica o psichica" dal momento che esse sono vere in virtù dei termini in esse occorrenti, del tutto indipendentemente dal mondo delle cose spazialmente e temporalmente determinate.

[554] Gödel non chiarisce cosa intenda col termine "derivabilità", ma potrebbe trattarsi della nozione di "dimostrabilità formale".

[555] Nel senso della quantificazione esistenziale illimitata.

[556] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 318.

[557] Gödel tornò nuovamente su questo problema nel 1958. Cf. al riguardo il capitolo 3.

[558] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag.318.

Dunque il platonista e il convenzionalista possono trovarsi d'accordo sul fatto che i teoremi dell'aritmetica siano *vuoti di contenuto empirico e sensibile*. Lo scarto fra i due sta nel fatto che il secondo, a differenza del primo, sostiene anche che essi sono *vuoti di contenuto concettuale* e quindi abbraccia quello che sopra abbiamo chiamato un *principio di vacuità materiale* (MVP). L'unico contenuto che il convenzionalista ammette per le proposizioni matematiche vere è quello, paradossalmente, formale, relativo alle regole sintattiche che ne stabiliscono significato e validità.

Gödel rileva che l'elemento fuorviante del convenzionalismo sta nel fatto di considerare il significato dei termini matematici come "qualcosa di costruito dall'uomo" e in ultima istanza come costituito di mere convenzioni relative all'uso dei simboli matematici.

Qui l'autore evidenzia implicitamente la differenza essenziale fra costruttivismo e convenzionalismo: per il primo i termini matematici denotano concetti non necessariamente convenzionali, per il secondo invece essi denotano regole in tutto e per tutto arbitrarie.

16.5. Per una fondazione rigorosa del platonismo

Nelle pagine conclusive della *Gibbs lecture* troviamo una possibile soluzione del problema relativo a che relazione sussista fra le due forme di platonismo rappresentate da CRP e MRP. Un argomento a favore di una loro equivalenza sembra emergere dalla seguente affermazione dell'autore:[559]

> La verità, io credo, è che *questi concetti* [denotati dai termini matematici] formano una realtà oggettiva di per se stessi, che non può essere creata o modificata, ma solo percepita e descritta.

Gödel aggiunge subito dopo che:[560]

> ... una proposizione matematica, pur non dicendo nulla sulla realtà spazio-temporale, può comunque avere un contenuto matematico molto adeguato nella misura in cui dice qualcosa a proposito di *relazioni fra concetti*.

Come si sarà notato, queste due affermazioni ricalcano strutturalmente l'esposizione del platonismo matematico nella prima parte della *Gibbs lecture* vista sopra, con la sola differenza che qui i *concetti matematici* sostituiscono gli *oggetti matematici* e le *relazioni fra concetti* sostituiscono le *relazioni fra*

[559] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 320.
[560] Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 320.

oggetti matematici. Sembra possibile quindi che Gödel ammettesse non solo il principio secondo cui ogni oggetto matematico è un concetto o una classe, in breve lo schema SRP visto sopra,[561] ma addirittura il seguente *principio di equivalenza fra oggetti e concetti matematici*:

$$\text{OCP} \qquad \forall x(\mathcal{MO}(x) \leftrightarrow \mathcal{MC}(x))$$

dove $\mathcal{MC}(x)$ sta per "x è un concetto matematico".

In questa sede l'autore, oltre a confermare il fatto che il suo realismo ontologico si configura fondamentalmente come una forma di realismo concettuale, approfondisce anche l'analogia fra matematica e scienze empiriche nei seguenti termini:[562]

> ... la nostra conoscenza del *mondo dei concetti* può essere tanto limitata e incompleta quanto quella del mondo delle cose. E' certamente innegabile che questa conoscenza, in certi casi, non solo è *incompleta* ma è anche *indistinta*.[563]

In questo passo compare per la prima volta l'espressione "mondo dei concetti" che renderebbe plausibile interpretare il punto di vista gödeliano sugli oggetti matematici in senso strettamente platonista. Gödel sottolinea il fatto di aver distinto intenzionalmente un "mondo dei concetti" da un "mondo delle cose" per evidenziare l'insostenibilità di quella forma di realismo[564] "secondo cui i concetti sono parti o aspetti delle cose".[565]

L'autore parla inoltre di una conoscenza del dominio dei concetti che sarebbe non solo "limitata e incompleta", il che è stato da lui ampiamente documentato, ma anche "indistinta" ossia poco chiara e definita. Questo nuovo elemento attribuito dal nostro alla conoscenza matematica, sembra ispirato alla storia della teoria degli insiemi, infatti Gödel osserva che questa mancanza di chiarezza si manifesta:[566]

> ... nei paradossi della teoria degli insiemi, che sono frequentemente addotti come confutazione del platonismo, ma ... del tutto ingiustamente. Talvolta le nostre percezioni visive contraddicono le nostre percezioni tattili, ad esempio nel caso di un bastone immerso nell'acqua, ma *nessuno* nel pieno delle sue facoltà mentali *concluderà da questo fatto che il mondo esterno non esiste*.[567]

[561]Cf. il cap. 14, par. 14.3.2.
[562]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 321.
[563]Il corsivo è mio.
[564]Che Gödel indica come "realismo aristotelico".
[565]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 321.
[566]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 321.
[567]Il corsivo è mio.

Come si vede dagli ultimi due passi citati, l'autore sembra sostenere un realismo platonista sia per quanto riguarda "il mondo delle cose" che per quanto concerne "il mondo dei concetti".

Quale progresso reale è dunque possibile registrare nella *Gibbs lecture* se di fatto Gödel mantiene quasi invariato CRP ed inoltre sembra confermare una lettura platonista di questo principio?

A nostro parere qui si può rilevare un notevole mutamento di prospettiva, non tanto nel *merito*, quanto piuttosto nel *metodo*. Infatti nella *Gibbs lecture* vengono presentati vari argomenti apparentemente contrari al convenzionalismo, ma di fatto volti a fornire una sorta di "argomento per assurdo" a favore del realismo concettuale.

Dunque Gödel non propone più il platonismo come una semplice *evidenza*, come *un fatto matematico*, ma come qualcosa da *dimostrare*, da *fondare in modo rigoroso*. L'autore è d'altro canto ben conscio del fatto che le argomentazioni da lui proposte non sono affatto definitive ossia che esse non "costituiscono una vera dimostrazione di questo punto di vista sulla natura della matematica".[568]

Egli ritiene tuttavia di aver in qualche modo "tagliato fuori" il convenzionalismo matematico dal novero delle possibili alternative al realismo concettuale e di aver fornito "alcuni argomenti forti" contro il costruttivismo matematico in generale. Oltre a queste due posizioni egli considera fra le possibili alternative al realismo, lo psicologismo e il "realismo aristotelico", e conclude che, per "fondare il realismo platonista" occorrerebbe, prima, confutare tutte le teorie ad esso alternative e, poi, dimostrare che tali alternative "esauriscono tutte le possibilità".[569]

La conclusione della *Gibbs lecture* ricorda un po' quella del *Russell paper* per gli elementi di razionalismo e ottimismo epistemologico. Vi leggiamo infatti:[570]

> Ho l'impressione che dopo una sufficiente *chiarificazione dei concetti* in questione, sarà possibile condurre queste discussioni con rigore matematico e che allora il risultato sarà che ... il punto di vista platonista è il solo sostenibile.

In realtà, come vedremo nel prossimo capitolo, lo stesso Gödel non fu del tutto soddisfatto della confutazione del convenzionalismo da lui proposta,

[568]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 321-322.
[569]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 322.
[570]Cf. *Gödel *1951* in *Gödel 1995*, pag. 322.

tanto è vero che nei *Carnap papers* tentò di formulare un nuovo elaborato argomento contro questo punto di vista.

17. Contro il positivismo

Nel corso degli anni Cinquanta Gödel pubblicò esclusivamente l'articolo sulla "Dialectica interpretation" di cui si è già detto molto, ma questo non significa che questo decennio sia stato per lui poco produttivo. Al contrario dal 1953 al 1959 egli lavorò alacremente alla stesura dell' articolo intitolato "Is mathematics syntax of language?" dedicato a Rudolf Carnap e rimasto inedito fino al 1995.

La vicenda di questo articolo, di cui sono state rinvenute ben sei versioni distinte nel *Nachlass* e sul quale Gödel e Schlipp intrattennero un carteggio oggi documentato nel quinto volume dei *Collected Works*,[571] è per noi particolarmente significativa in quanto, come osservato di recente in *Kennedy et van Atten 2003*, con la decisione dell'autore di non pubblicare questo lavoro sembra che le sue riflessioni abbiano in qualche modo raggiunto un "punto morto" nell'ambito del progetto, emerso con chiarezza nella *Gibbs lecture*, di fornire una fondazione rigorosa del platonismo.

In questo capitolo tenteremo di illustrare l'argomento fondamentale presentato nella terza versione dell'articolo (*Gödel *1953/59*) che per certi aspetti costituisce un approfondimento di argomenti della *Gibbs lecture* e per altri rappresenta una completa novità, ad esempio per quanto riguarda le dichiarazioni apertamente anti-positiviste.

Questo cambiamento di interlocutore e di obiettivo polemico può essere forse interpretato come un'ulteriore spia di quel passaggio da un'attitudine esclusivamente fondazionale e metamatematica ad una più squisitamente filosofica che abbiamo registrato nella *Gibbs lecture*.

17.1. Il "programma sintattico"

Un'evidente differenza strutturale che distingue la *Gibbs lecture* dal *Carnap paper* sta nel fatto che, anche restringendo l'attenzione al solo caso del convenzionalismo matematico, nella prima si trovano una serie di argomentazioni brevi e di fatto scarsamente convincenti, mentre nel secondo troviamo un unico lungo argomento in cui si ha l'impressione che l'autore tenti di realizzare quella completa chiarificazione dei concetti in gioco, che veniva invocata alla fine di *Gödel *1951* in funzione programmatica.

La terza versione del *Carnap paper*, databile probabilmente verso la metà

[571] Cf. *Gödel 2003a*, pagg. 213-253.

degli anni Cinquanta, si apre con una precisa e circoscritta caratterizzazione dell'argomento e del punto di vista filosofico in questione. Vi leggiamo infatti:[572]

> Verso il 1930 R.Carnap, H.Hahn e M.Schilck, in gran parte sotto l'influenza di L.Wittgenstein, svilupparono una concezione della natura della matematica che può essere caratterizzata come una combinazione di nominalismo e convenzionalismo.

Abbiamo quindi una distinzione terminologica fra "nominalismo" e "convenzionalismo" del tutto assente nella *Gibbs lecture* dove le due espressioni venivano usate come sinonime.

Come si sa l'articolo avrebbe dovuto essere dedicato ai contributi logici di Carnap e tuttavia fin dall'inizio risulta chiaro che l'autore intende invece allargare il discorso ai principali esponenti del Circolo di Vienna. Essendo interessato qui alle posizioni dei neo-positivisti in filosofia della matematica, Gödel descrive l'approccio di Hahn, Carnap e Schlick come il "punto di vista sintattico" o anche come il "programma sintattico".

Sembrerebbe che il *programma sintattico* coincida sostanzialmente col convenzionalismo matematico che Gödel vuole confutare nella *Gibbs lecture* e infatti l'autore afferma che secondo questo punto di vista la matematica è riducibile o addirittura non è altro che "sintassi del linguaggio".[573]

Naturalmente, trattandosi di un articolo su Carnap, Gödel si sofferma con particolare attenzione sulla posizione di quest'ultimo e ne riporta in nota[574] una citazione dalla già menzionata monografia *Le problème de la logique de la science* in cui, fra le altre cose, si leggeva:[575]

> Nell'aggiungere le scienze formali alle scienze fattuali, non viene introdotto alcun nuovo ambito di oggetti ... Le scienze formali non hanno affatto oggetti; esse sono sistemi di proposizioni ausiliarie senza oggetti e senza contenuto.

Egli puntualizza che, molto probabilmente, Carnap negli anni Cinquanta non sosteneva più una posizione di questo tipo e che certe tesi radicali sulla natura della matematica furono sostenute solo da Hahn e Schlick.

Di fatto l'autore dichiara di non essere interessato in particolare alla posizione di Carnap quanto piuttosto alla "relazione fra sintassi e matematica"

---

[572] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 334.
[573] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 335.
[574] Cf. la nota 9 di *Gödel *1953/59*.
[575] Cf. *Carnap 1935a*, pag. 37.

ed in particolare al problema dell'effettiva legittimità filosofica del *programma sintattico.* Nella nota 9 dell'articolo egli osserva infatti che, pur essendo state date dettagliate presentazioni di questo programma, non sono invece stati mai discussi in modo approfondito "i risultati negativi relativi alla sua fattibilità".[576]

17.1.1. Convenzioni sintattiche

La definizione dell'espressione "convenzione sintattica" data da Gödel nel *Carnap paper* è molto simile a quella proposta nella *Gibbs lecture*, infatti a pagina 336 di *Gödel *1953/59* si legge:

> Le convenzioni sintattiche considerate in questo programma sono quelle mediante le quali viene definito *l'uso*[577] di un certo simbolo a ... stabilendo regole relative alla verità (o asseribilità) di proposizioni contenenti a ... dove queste regole si riferiscono solo alla struttura esterna delle espressioni ...

Tuttavia qui l'autore porta anche tre esempi espliciti di tali regole, sottolineando il fatto che esse sono basate su di una concezione della verità logica secondo cui "il significato delle proposizioni è definito dalle regole (semantiche) che determinano in quali circostanze una data proposizione può essere asserita".[578]

Il primo esempio di regola sintattica considerato da Gödel può essere espresso come segue: *se le proposizioni φ e ψ coincidono tranne al massimo per qualche occorrenza del termine $1+1$, sostituito in ψ, dal termine 2, allora φ è vera se e solo se ψ è vera.* Si tratta cioè di una regola relativa all'uso della costante individuale 2.

La seconda regola considerata dall'autore riguarda il simbolo di uguaglianza fra termini, e può essere formulata come segue: *per ogni termine individuale chiuso t la proposizione $t = t$ è vera.*

Infine Gödel porta un esempio di regola relativa ai quantificatori, ossia: *dalla verità di $\varphi(t)$, dove t è un termine individuale chiuso, segue la verità della proposizione esistenziale $\exists x \varphi(x)$.*

L'autore osserva che, dal punto di vista convenzionalista, regole di questo tipo vengon dette "sintattiche" in quanto, non riferendosi ad alcun significato,

[576]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 336.
[577]Il corsivo è mio.
[578]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 336.

"asserzioni in conflitto con esse sono escluse già a causa della loro struttura, esattamente come asserzioni non conformi alle regole grammaticali".[579]

17.1.2. Realizzare il programma sintattico

Secondo l'autore, Rudolf Carnap tentò di realizzare il programma sintattico nella sua *Logische Syntax der Sprache* (1934) e un secondo tentativo di perseguire questo programma filosofico sarebbe "derivabile" dall'articolo di Ramsey "The foundations of mathematics" (1926). Come terzo ed ultimo esempio di "parziale elaborazione" del punto di vista sintattico egli considera infine il programma di Hilbert e tuttavia al riguardo si affretta a dire che lo sfondo filosofico del formalismo hilbertiano risulta essere notevolmente diverso da quello neo-positivista.

Gödel riconosce a questi tre tentativi un indubbio interesse tecnico e anche filosofico e tuttavia sostiene che nessuno dei tre è stato capace di fornire una reale legittimazione del punto di vista sintattico. Infatti, secondo il nostro autore, questi tre tentativi hanno saputo dimostrare soltanto due fatti insufficienti per una giustificazione della tesi neo-positivista sulla natura della matematica.

Sulla base dei tre tentativi citati, secondo Gödel, sarebbe stato sì possibile dimostrare che:

T1. "la matematica può essere interpretata come sintassi del linguaggio";

ma soltanto sotto una delle due seguenti condizioni:

T1.1. assegnare alle parole "sintassi", "linguaggio" e "interpretare" dei significati più generali o deboli di quanto non si faccia nel linguaggio comune;

T1.2. restringere il dominio della matematica ad una parte esigua della matematica classica nel senso usuale.

Chiaramente, nessuno dei tre approcci citati sembra essere disposto ad accettare una restrizione del corpus delle conoscenze matematiche ritenute valide e applicabili alle scienze empiriche (la condizione T1.2) e neppure un radicale allontanamento dal linguaggio comune nell'interpretazione di termini filosoficamente fondamentali quale "linguaggio" (la condizione T1.1). Quindi,

[579]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 336.

osserva Gödel, se i termini "linguaggio", "sintassi" e "interpretare" vengono considerati "nel loro senso ordinario", allora la proposizione T1 è confutabile. Dunque il primo obiettivo del programma sintattico sembra irraggiungibile a meno di stravolgimenti del punto di vista sintattico stesso.

D'altro canto, sulla base dei tre tentativi visti sopra si sarebbe potuto sì dimostrare che:

T2. "le proposizioni matematiche non hanno contenuto";[580]

ma solo assumendo l'ulteriore condizione di:

T2.1. restringere il significato del termine "contenuto" in un modo accettabile al massimo da un punto di vista strettamente empirista.

Secondo l'autore, la condizione T2.1, pur essendo apparentemente accettabile dal punto di vista sintattico ed in generale dal punto di vista empirista, ad un esame più attento risulta essere "non ben-fondato persino dal punto di vista empirista".[581] Di fatto, aggiunge Gödel, è proprio attraverso "l'esame del punto di vista sintattico" che arriviamo a cogliere nel modo più pieno e diretto la *realtà oggettiva* e l'*esistenza indipendente* di oggetti e fatti matematici e, di conseguenza, l'esistenza di un contenuto oggettivo delle proposizioni matematiche vere. In tal senso, anche se ancora non in modo immediatamente evidente come nel primo caso, anche il secondo obiettivo del programma sintattico sembra impossibile da dimostrare.

Qui Gödel torna a quel genere di "argomento per assurdo" osservato nel capitolo precedente secondo cui è proprio dall'analisi critica e dalla refutazione del punto di vista diametralmente opposto a quello platonista che si ottengono le ragioni e gli argomenti più forti a favore del platonismo stesso. L'autore afferma infatti che è proprio l'analisi del punto si vista sintattico che ci porta a ritenere che "esistono oggetti matematici che sono altrettanto oggettivi (cioè indipendenti dalle nostre convenzioni e costruzioni) degli oggetti e dei fatti fisici e psicologici"[582] e che tuttavia tali oggetti sono "di natura interamente indipendente".[583]

[580]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 337.
[581]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 337.
[582]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 337.
[583]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 337.

17.2. La matematica *non* è sintassi del linguaggio

La confutazione del primo obiettivo del programma sintattico richiede, secondo l'autore, un'analisi approfondita dei termini in gioco: "matematica", "sintassi", "linguaggio" ed "interpretare". La strategia di Gödel è quindi quella di mostrare che, da ogni punto di vista filosoficamente accettabile, compreso quello neo-positivista, questi termini hanno un significato per cui la tesi T1 del programma sintattico deve necessariamente fallire. A tal fine l'autore presenta una carrellata di condizioni che questa tesi deve soddisfare per essere verificata.

I. Matematica

Gödel osserva che gli esponenti del punto di vista sintattico mirano sì a dimostrare la dispensabilità dell'intuizione matematica, ma solo a condizione che tutta la matematica utilizzata e utilizzabile nelle scienze empiriche mantenga il suo solito grado di affidabilità e di certezza. In tal senso il termine "matematica" dovrà significare, nell'ambito del programma sintattico, "matematica classica".

Per spiegare il fatto che per l'uso comune e per il punto di vista sintattico il termine "matematica" debba essere interpretato nel modo più ampio possibile, Gödel osserva che nemmeno parti della matematica come la teoria del continuo possono essere considerate parte della fisica anzichè della matematica in quanto esse implicano "proposizioni il cui carattere puramente matematico non può essere contestato".[584]

Analogamente, osserva l'autore, è possibile sostenere che anche le parti più astratte della teoria degli insiemi, in quanto necessarie per risolvere certi problemi aritmetici (ad esempio certi problemi diofantei), devono essere considerate parte della matematica classica. In realtà, ai fini di una dimostrazione del fatto che il punto di vista sintattico ed in particolare il suo obiettivo T1 non è sostenibile, il termine "matematica" potrebbe persino essere interpretato come "matematica intuizionista".

Il punto è che, sia nel caso classico che in quello intuizionista, la matematica (nell'asserzione T1) deve essere intesa come "un sistema di proposizioni *conoscibili come vere*".[585]

Dunque, già sulla base di un'interpretazione plausibile dal punto di vista

[584]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 337.
[585]Il corsivo è mio.

neo-positivista del termine "matematica", la tesi T1 non sembra sostenibile dal momento che la questione "è esattamente se il contenuto intuitivo della matematica possa essere trascurato e ciononostante i teoremi della matematica possano essere asseriti e applicati".[586] L'analisi di questo primo punto sembra quindi colpire tutti e tre i tentativi di realizzazione del punto di vista sintattico considerati.

II. Linguaggio

Secondo l'autore il termine "linguaggio" va interpretato fondamentalmente in termini di "linguaggio finitario" nel senso hilbertiano dell'espressione. Gödel dice infatti che con questo termine si dovrà indicare un simbolismo che possa essere "esibito effettivamente" e usato concretamente. Inoltre si dovrà pretendere che le proposizioni di tale simbolismo "constino di un numero finito di simboli".[587]

In tal senso un tentativo di realizzare il programma sintattico fallisce di già nel momento in cui ammette l'utilizzo di proposizioni di lunghezza infinita. Tali proposizioni, commenta l'autore, devono necessariamente essere "oggetti puramente matematici", visto che non hanno esistenza spazio-temporale né sono costruibili concretamente.

Ma l'assunzione di oggetti puramente matematici e di una intuizione capace di conoscerli è proprio quello che il punto di vista sintattico si propone di evitare. In tal senso la proposta di Ramsey non ha successo neppure sotto questo secondo rispetto. La proposta di Carnap sembra violare questa condizione almeno per il fatto di ammettere classi infinite di proposizioni. L'approccio hilbertiano sembra quindi essere l'unico che la rispetta.

III. Regole

Come il termine "linguaggio" anche il termine "regola" ed in particolare l'espressione "regola sintattica" dovrà essere letto in termini finitari cioè all'incirca come *regola formulata in termini di un linguaggio finitario*. Secondo l'autore infatti, se le regole sintattiche dovessero contenere espressioni come "esiste un insieme infinito di espressioni con una certa proprietà", allora si assumerebbero surrettiziamente l'intuizione matematica o gli oggetti matematici che si vogliono invece eliminare.

[586] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pagg. 337-338.
[587] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 338.

Regole contenenti espressioni infinitarie sarebbero infatti o prive di senso oppure in netto contrasto col punto di vista sintattico. Ma è chiaro che, per lo meno l'approccio di Ramsey contravviene a questa condizione per lo stesso motivo per cui viola la condizione di cui sopra sul linguaggio. La scuola hilbertiana, anche se programmaticamente in linea con questa definizione del termine "regola", finisce poi di fatto col violarla ad esempio con l'ω-regola o con l'induzione transfinita.[588]

Il punto di vista di Carnap al riguardo sembra particolarmente interessante e Gödel gli dedica una nota[589] del *paper*, in cui ricorda che, all'obiezione secondo cui l'uso di regole transfinite presupporrebbe una forma di platonismo, Carnap rispondeva che è possibile utilizzare concetti transfiniti senza fare assunzioni metafisiche relative all'esistenza degli oggetti considerati. Gödel concorda con la risposta carnapiana nella misura in cui lo stesso può esser detto degli oggetti empirici, ma ribatte che, se si deve poter distinguere un oggetto fisico "reale" da uno puramente "fittizio" appartenente ad una teoria fisica sbagliata, *occorre poter attribuire un qualche tipo di esistenza, anche se non metafisica, al primo e non al secondo.*

Analogamente, nel caso degli oggetti matematici ed in particolare nel caso delle "entità matematiche transfinite", dovrò poter distinguere un oggetto come la classe universale V e l'insieme dei numeri ordinali finiti ω attribuendo al secondo un'esistenza, in quanto oggetto matematico, che al primo deve essere negata dal momento che l'esistenza di un oggetto matematico con le caratteristiche di V può essere "confutata da una contraddizione"[590] da essa derivata.[591]

IV. Noncontraddittorietà

A proposito del significato che il termine "regola" deve avere per il programma sintattico, Gödel osserva che affinché una regola possa esser definita "sintattica" non è sufficiente il fatto di essere formulata in un linguaggio

[588] Considerata come regola.

[589] Cf. la nota 14 a pag. 338.

[590] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 339.

[591] Si noti che qui, per la prima volta, anche se all'interno di un argomento parentetico, Gödel sembra ammettere che è possibile evitare di assumere l'esistenza *metafisica* di oggetti e fatti matematici. Si tratterebbe di una svolta importante che segnerebbe una netta rottura con il punto di vista espresso in precedenza dall'autore.

strettamente finitario, ma occorre anche che sia soddisfatta una condizione sulle conseguenze ossia su ciò che da tale regola può essere derivato.

Al riguardo l'autore dice che "una regola relativa alla verità delle proposizioni può dirsi *sintattica* solo se è chiaro dalla sua formulazione, oppure se in qualche modo si può sapere in anticipo che essa non implica la verità di alcuna proposizione fattuale",[592] dove per "proposizione fattuale" Gödel intende una proposizione la cui verità "dipende [essenzialmente] da fatti extralinguistici".[593]

Questo elemento caratterizzante la nozione di "regola sintattica", secondo l'autore, deriva dal fatto che per i neo-positivisti la verità *a priori* della matematica non segue tanto da considerazioni di tipo strettamente empiristico,[594] ma piuttosto dalla convinzione che solo una proposizione priva di contenuto può essere giudicata vera a prescindere da ogni esperienza possibile.

Questa quarta condizione deve essere considerata come centralissima soprattutto per quanto riguarda il tentativo hilbertiano, in quanto richiede che sia dimostrabile la noncontraddittorietà delle regole sintattiche, dal momento che se esse fossero contraddittorie implicherebbero ogni proposizione ed in particolare "tutte le proposizioni fattuali".[595]

Di fatto questa condizione non riguarda tanto la nozione di regola sintattica ma piuttosto quella di "sistema o insieme di regole sintattiche" e quindi plausibilmente la nozione di *sistema formale* in Hilbert e la nozione di *linguaggio* (o, nella terminologia più tarda, di *linguistic frame*) in Carnap.

V. Assiomi, teoremi e applicazioni

Essendo stati analizzati tutti i principali termini in gioco, Gödel si volge a definire il significato della prima tesi del programma sintattico e cioè della proposizione: "la matematica può essere interpretata come sintassi del linguaggio". Secondo l'autore il significato da attribuire a questa proposizione dovrà soddisfare almeno le due seguenti condizioni:

V.1. che esistano certe regole sintattiche $R_1, ..., R_m$ mediante le quali sia possibile derivare gli assiomi e le regole di inferenza della matematica classica;

[592]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 339.
[593]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 339.
[594]Ad esempio, dalla pretesa che tutta la conoscenza debba essere conoscenza empirica.
[595]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 339.

V.2. che esistano regole sintattiche $R_1, ..., R_n$ o argomentazioni sintattiche $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_p$ capaci di giustificare i teoremi della matematica e le loro applicazioni alle scienze empiriche.

Di fatto, come nel caso di sistemi di regole, anche nel caso di una giustificazione puramente sintattica dei teoremi e delle loro applicazioni, sarà necessaria una dimostrazione di noncontraddittorietà relativa alle regole o agli argomenti sintattici utilizzati.[596]

Ma in che senso anche le regole e gli argomenti necessari per le applicazioni dei teoremi matematici devono essere dimostrabilmente noncontraddittori? L'idea di Gödel è che, mentre nell'interpretazione platonista la matematica consta di "un sistema di proposizioni oggettivamente vere" e di conseguenza ogni possibile applicazione di un teorema della matematica non necessita di un'ulteriore legittimazione, ciò non si verifica invece per l'interpretazione sintattica.

L'autore considera come esempio la congettura di Goldbach (CG) secondo la quale "ogni numero pari maggiore di due può essere espresso come somma di due numeri primi". Nell'interpretazione platonista della matematica sulla base di CG "si può prevedere che una macchina calcolatrice che si sappia empiricamente funzionare in modo affidabile troverà due numeri primi la cui somma è un certo numero n molto grande".[597] Ciò non è invece possibile per l'interpretazione sintattica in quanto, se si considera CG come una conseguenza di certe regole arbitrariamente scelte, ciò non ci garantisce nulla a proposito del funzionamento delle macchine, siano esse costruite o meno in accordo con certi teoremi dell'aritmetica ed in particolare con CG.

I neo-positivisti non sono certo disposti a rinunciare al fatto che noi ci aspettiamo che i teoremi della matematica siano universalmente applicabili nelle scienze empiriche e tuttavia, coerentemente con l'interpretazione sintattica, se la sintassi deve poter sostituire l'intuizione matematica, essa "deve anche ottenere una ragion sufficiente per questa aspettativa".[598] Tale ragion sufficiente è fornita, secondo Gödel, da una dimostrazione di noncontraddittorietà.

[596] Non è chiaro a che cosa corrisponda questa condizione nell'ambito del programma di Hilbert, ma forse potrebbe trattarsi di un qualcosa di simile alla dimostrazione di noncontraddittorietà dell'analisi che certamente rappresenta la parte più importante della matematica classica dal punto di vista delle applicazioni.

[597] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 339.

[598] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 340.

VI. Derivazioni e dimostrazioni

Il programma sintattico, secondo la lettura propostane da Gödel, sembra richiedere una sorta di regresso all'infinito[599] nel senso che non solo gli assiomi e i teoremi della matematica devono poter essere derivati da certe regole sintattiche $R_1, ..., R_n$, ma anche le stesse derivazioni $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_m$ degli assiomi e dei teoremi da $R_1, ..., R_n$ devono far uso esclusivamente di concetti sintattici $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_r$ cioè devono essere espresse in un linguaggio finitario nel senso di Hilbert e devono essere condotte mediante metodi finitari.

Detto in altri termini, la realizzazione del programma sintattico richiede che siano soddisfatte due ulteriori condizioni, cioè:

VI.1. dati certi assiomi matematici $\varphi_1, ..., \varphi_m$ derivabili da certe regole sintattiche $R_1, ..., R_n$, le derivazioni $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_p$ dei primi dalle seconde devono poter essere giustificate esclusivamente mediante certi concetti sintattici $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_q$ e certi argomenti sintattici $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_r$ basati su $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_q$;

VI.2. la noncontraddittorietà di $\varphi_1, ..., \varphi_m$ e di $R_1, ..., R_n$ deve poter essere dimostrata esclusivamente mediante certi concetti sintattici $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_s$ e certi argomenti sintattici $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_t$ basati su $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_s$.

Ma è chiaro che a questo punto si necessiterà anche di una giustificazione sintattica dei concetti e degli argomenti considerati sopra e così via all'infinito. Di conseguenza, la situazione del programma sintattico sembra sospesa fra un *regresso all'infinito* e una *petitio principii.* Se infatti si vogliono ammettere solo considerazioni sintattiche arbitrariamente scelte, ogni principio ammesso necessiterà di una giustificazione esterna basata su qualche altro principio che necessita a sua volta di una legittimazione esterna. Se invece si vuole interrompere il processo di giustificazione sintattica della matematica, occorre comunque far ricorso a qualche concetto matematico non-arbitrario, cadendo così in una *petitio principii* analoga a quella già messa in evidenza nella *Gibbs lecture.*

Fallimento dei tentativi di Carnap, Ramsey ed Hilbert

La conclusione che Gödel trae dalla sua analisi esaustiva dei termini in gioco nella prima tesi del programma sintattico (T1) è che nessuna delle tre

[599] Gödel non si esprime in questi termini ma quanto dice sembra implicarlo.

proposte da lui considerate riesce a rispettare tutte e sei (di fatto tutte e otto) le condizioni viste sopra.

In particolare il tentativo di Carnap viola le condizioni V.1 e V.2 in quanto nella *Logische Syntax der Sprache* vengono ammessi regole e argomenti non-finitari e quindi astratti. Gödel non approfondisce di che regole si tratti, ma sembra evidente che le regole del *linguaggio II* della *Logische Syntax der Sprache* possono essere considerate fortemente infinitarie.

Per quanto riguarda Ramsey, la sua proposta viola la condizione sull'interpretazione del termine "linguaggio" e quella sull'interpretazione del termine "regola" in quanto vengono ammesse formule di lunghezza infinita e regole per tali formule. Di conseguenza verranno violate anche le condizioni V1,V.2,VI.1,VI.2 in quanto, sulla base di questa interpretazione, si dovrà necessariamente ricorrere a qualche tipo di concetto astratto.

Infine neppure il programma di Hilbert soddisfa tutti e sei i requisiti stabiliti da Gödel, in particolare esso viola la condizione sull'interpretazione del termine "matematica" in quanto riesce a fornire una fondazione rigorosamente sintattica solo per un'esigua parte della matematica classica. Secondo l'autore, soltanto un'indebolimento essenziale delle condizioni V e VI potrebbe consentire una fondazione di tutta la matematica classica. Ma tale indebolimento, è chiaro, segnerebbe un inevitabile abbandono del punto di vista sintattico.[600]

Il problema che questo fallimento dei tentativi di realizzare il programma sintattico solleva è, secondo Gödel, il seguente: *ci troviamo di fronte a dei fallimenti accidentali o piuttosto ad un'impossibilità di principio?*

La risposta dell'autore è che, sulla base dell'approccio sintattico, il primo requisito sembra essere in assoluto impossibile da soddisfare, mentre gli altri cinque lo sono esclusivamente se:

(a) per "matematica" si intende un qualche livello del "ragionamento combinatorio finitario", oppure

(b) per "matematica" si intende una sottoparte della matematica classica in cui si ammettono certi concetti infinitari, ma i cui assiomi vengono ammessi solo sotto certe "restrizioni artificiali", oppure

[600] Si noti che, pur non dicendolo esplicitamente, Gödel fa capire che sulla base della sua analisi è proprio il programma di Hilbert quello che più si è avvicinato ad una coerente realizzazione del punto di vista sintattico.

(c) per “matematica” si intende un'esigua parte della matematica classica che non contenga neppure la “teoria dei numeri ricorsiva”.

Secondo Gödel, qualche risultato parziale il programma sintattico lo ha ottenuto, per esempio, nell'ambito della logica elementare, cioè per quanto riguarda la logica dei connettivi e dei quantificatori. Plausibilmente qui l'autore fa riferimento al suo teorema di completezza per il sistema **CQC** che di fatto dimostra la dispensabilità, nell'ambito della logica elementare, del concetto infinitario di “verità logica” e la sua sostituibilità con quello puramente sintattico di “dimostrabilità in un sistema formale”.

17.3. La matematica *ha* un contenuto oggettivo

Quasi la metà del *Carnap paper* è dedicata ad un tentativo di far vedere che anche la seconda tesi fondamentale del programma sintattico (T2) è insostenibile e cioè che la matematica è dotata di un genuino contenuto tanto quanto le scienze empiriche.

Nell'ambito della confutazione di questa seconda tesi, Gödel più che avanzare, come per la prima, un'articolata argomentazione, sembra addurre invece delle *prove* e richiamare delle *evidenze* relative al fatto che un contenuto della matematica *si dà realmente*.

17.3.1. Contenuto matematico e noncontraddittorietà

Un primo fatto che, secondo l'autore, mette in evidenza l'ineliminabilità del contenuto della matematica, riguarda le dimostrazioni di noncontraddittorietà. Per il secondo teorema di incompletezza è noto che già la noncontraddittorietà di un sistema formale per l'aritmetica ricorsiva dovrebbe far uso di metodi dimostrativi più potenti di quelli in essa contenuti. Secondo Gödel ciò potrebbe esser vero persino per i livelli più elementari della matematica finitaria nel senso che neppure la parte puramente simbolica della matematica, cioè l'aritmetica combinatoria, può essere dimostrata noncontraddittoria in modo puramente sintattico.

Facendo riferimento alle nozioni di “dimostrazione costruttiva”, “funzionale calcolabile di tipo finito” e “induzione transfinita fino a ε_0”, l'autore constata che talvolta gli assiomi di una certa teoria $\mathbf{T}$, dimostrata noncontraddittoria, non occorrono tutti fra quelli utilizzati nella “dimostrazione di noncontraddittorietà formalizzata” di $\mathbf{T}$, ma possono essere rimpiazzati da altri.

L'esempio citato da Gödel[601] è quello dell'aritmetica di Peano in cui i "quantificatori non-costruttivi" e i "connettivi proposizionali" possono essere rimpiazzati[602] dalla nozione di "funzione computabile di tipo finito". L'autore considera anche il caso in cui si dimostri la noncontraddittorietà della teoria dei numeri utilizzando la teoria degli insiemi, ossia rimpiazzando il concetto di "numero intero" con quello di "insieme".

In entrambi i casi il fatto che, nell'ambito delle dimostrazioni di noncontraddittorietà, determinati concetti e assiomi non possano essere rimpiazzati se non da altri "ugualmente potenti e problematici" indica proprio la "noneliminabilità del contenuto matematico di un sistema assiomatico mediante l'interpretazione sintattica".[603]

Ma c'è di più, secondo l'autore si ha che, in generale, per dimostrare la noncontraddittorietà di un dato sistema formale **T** per la matematica classica, "si necessita o di un'intuizione matematica della stessa potenza di quella [necessaria] per discernere la verità degli assiomi matematici oppure di una conoscenza di fatti empirici che implichino un equivalente contenuto matematico".[604]

17.3.2. Assunzioni indimostrabili

La seconda prova addotta da Gödel a favore del punto di vista secondo cui la matematica *ha* un contenuto oggettivo riguarda i termini primitivi e gli assiomi fondamentali della matematica in senso proprio (cioè della matematica non ipotetico-deduttiva). Secondo l'autore la necessità di assumere come veri certi concetti primitivi e irriducibili ad altri è un segno inequivocabile del fatto che la matematica si fonda in modo essenziale su un certo contenuto.

L'autore ribadisce che l'esistenza di un contenuto della matematica si evince dal fatto che, comunque si costruisca una qualsiasi parte della matematica, occorrono sempre certi "termini indefiniti" e certe "asserzioni deduttivamente indimostrabili" relative a tali termini.[605] Questo tipo di considerazioni erano già state avanzate da Gödel nel *Vortrag bei Zilsel* in polemica con la pretesa hilbertiana di fondare la matematica senza fare alcuna assunzione.

[601]Cf. la nota 29 di *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 345.
[602]Come nel caso della "Dialectica interpretation".
[603]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 345.
[604]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 346.
[605]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 346.

In questa sede tuttavia l'autore approfondisce anche le ragioni per cui vengono scelti certi termini e certi assiomi piuttosto che altri. Egli considera due ben distinti criteri per l'assunzione di determinati concetti e principi come primitivi:

S1. il primo criterio è quello *epistemico* della "percezione" matematica di un'"evidenza" mentre

S2. il secondo è quello *induttivo* del "successo nelle applicazioni".

L'autore osserva infatti che per gli assiomi della matematica esistono soltanto due possibili forme di "fondazione razionale" cioè, da un lato, il fatto che essi "possono essere percepiti come veri" e, dall'altro, il fatto che essi possono essere assunti in base ad argomenti induttivi.[606]

Gödel spiega cosa intende per "successo nelle applicazioni"[607] dicendo che un assioma non-evidente può essere assunto:

S2.1. in quanto dimostra più facilmente teoremi dimostrabili anche con assiomi evidenti oppure

S2.2. in quanto risolve problemi matematici insoluti.

Come si vede i criteri addotti da Gödel sono sostanzialmente gli stessi della *Gibbs lecture* e del *Cantor paper*, tuttavia in questa sede cambia profondamente il modo in cui essi vengono spiegati e giustificati. Per quanto riguarda S1 l'autore considera come esempi la regola di separazione o *modus ponens* e l'assioma di induzione completa, mentre per S2 gli assiomi forti dell'infinito.

Modus ponens e induzione completa

Gödel considera il *modus ponens* (mp) e l'induzione completa (IND) come principi matematici che noi percepiamo come veri "sulla base dei termini" in essi occorrenti oppure per un'intuizione relativa ai concetti ad essi associati. In breve egli sembra assumere, da un lato, che questi due principi siano analitici nel senso concettuale del termine e, dall'altro, che essi siano "immediatamente evidenti".

A favore di questo suo punto di vista l'autore afferma[608] che sarebbe "arbitrario" assegnare evidenza immediata ad un enunciato come "questo è

[606] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pagg. 346-347.
[607] Cf. la nota 33 in *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 347.
[608] Cf. la nota 34 di *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 347.

rosso" e non a mp. Nel primo caso il "dato immediato" è la relazione fra il concetto indefinito di "rosso" e l'oggetto particolare indicato come rosso, mentre nel secondo il "dato immediato" sarebbe la relazione fra i concetti indefiniti di "proposizione", "implicazione" e "inferenza". L'unica ulteriore differenza fra i due enunciati sta nel fatto che il concetto di "rosso" è di natura empirica mentre quelli di "proposizione", "implicazione" e "inferenza" sono di natura astratta o concettuale.

Come abbiamo visto, Gödel considera tutta la matematica classica, compresa la teoria degli insiemi, come analitica nel senso concettuale del termine, di conseguenza anche mp e IND saranno analitici.

Assiomi dell'infinito

Il criterio S2 per la scelta degli assiomi della matematica in senso proprio non può essere considerato come esclusivamente empirico o pragmatico. Gödel considera come esempi di applicazione di questo secondo criterio gli assiomi forti dell'infinito di cui non si può certo invocare l'evidenza immediata e che tuttavia non possono neppure dirsi fondati su criteri di tipo pragmatico. L'autore osserva che, nel caso di assiomi scelti sulla base del loro successo nelle applicazioni, si ha che il "carattere matematico" di questi assiomi emerge dal fatto che essi hanno conseguenze riguardanti le parti della matematica i cui assiomi e termini primitivi sono determinabili mediante il criterio S1.

Gödel richiama al riguardo il fatto che gli assiomi forti dell'infinito "hanno conseguenze aritmetiche" cioè, pur non essendo immediatamente evidenti, essi godono tuttavia di un'evidenza *mediata* dalla *progressiva* conoscenza che noi abbiamo del concetto di insieme. In tal senso[609] l'autore dice che gli assiomi dei grandi cardinali "non sono evidenti fin dall'inizio, ma lo diventano nel corso dello sviluppo della matematica".[610] Per capire l'assioma relativo all'esistenza del primo cardinale inaccessibile, ad esempio, "si deve aver prima sviluppato in notevole misura la teoria degli insiemi".[611]

17.3.3. Contenuto matematico e leggi di natura

Gödel espone un breve argomento volto a dimostrare che non è possibile eliminare l'intuizione matematica ed al tempo stesso ogni contenuto oggettivo

[609] Cf. al riguardo la nota 43 di *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.
[610] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.
[611] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.

dal dominio della matematica. L'idea dell'autore è che, se anche si volesse trascurare l'intuizione matematica, si dovrebbe comunque necessariamente fare appello ad una qualche forma di contenuto matematico oggettivo. In tal senso sembra che, secondo Gödel, l'esistenza di un contenuto oggettivo della matematica sia indipendente dall'esistenza di un'intuizione matematica cioè di una facoltà distinta dalla percezione sensibile capace di cogliere gli oggetti astratti.

L'autore cerca di confutare l'obiezione secondo cui la matematica per essere corretta deve essere "compatibile con tutte le esperienze possibili" mediante un argomento *olistico* del tutto inedito nelle riflessioni precedenti. Secondo Gödel l'obiezione considerata è fallace in quanto pretende che ogni possibile contenuto conoscitivo stia nelle conoscenze empiriche e nelle leggi di natura, trascurando completamente il fatto che le leggi di natura sono tali grazie all'apporto concettuale conferito loro proprio dalla matematica.

Il punto è che il contenuto che la matematica fornisce alle leggi di natura è essenzialmente differente da quello fornito dai dati empirici infatti la matematica non aggiunge alle leggi fisiche "nuove proprietà della realtà fisica", bensì "proprietà dei concetti che si riferiscono alla realtà fisica",[612] cioè proprietà dei concetti che si riferiscono a combinazioni di oggetti.

Queste proprietà, sostiene Gödel, sono oggettive tanto quanto le proprietà degli oggetti della fisica e sono persino "verificabili tramite l'esperienza sensibile" come le leggi di natura. Ritorna qui la considerazione tipica del *Carnap paper*, ma anche della *Gibbs lecture*, secondo cui i *metodi* matematici non andrebbero ristretti all'ambito di quelli deduttivi ma ampliati anche a quelli induttivi e probabilistici.

17.3.4. Contenuto matematico e finitismo

Le evidenze richiamate sopra a favore della tesi secondo cui "la matematica ha un contenuto oggettivo" sono valide, secondo Gödel, anche per quanto riguarda il ristretto ambito della matematica finitaria. Di conseguenza anche l'aritmetica finitaria avrà un contenuto oggettivo e quindi, se anche si fosse realizzato il programma di Hilbert, ciò non avrebbe affatto verificato la seconda tesi fondamentale del programma sintattico. Se infatti la matematica fosse riducibile a sintassi finitaria, questo non significherebbe che essa non

[612]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 349.

ha contenuto, bensì "che il suo contenuto non è più ampio di quello della combinatoria finitaria".[613]

Tuttavia è ben-noto, sulla base dei risultati di incompletezza, che il programma di Hilbert non è realizzabile almeno nella sua forma originaria e di conseguenza si ha che il contenuto della matematica è più vasto di quello della combinatoria finitaria e di fatto "infinitamente più vasto".[614] Ciò, come spiegato nella *Gibbs lecture*, è testimoniato dal punto di vista metamatematico dai teoremi di incompletezza e dal punto di vista matematico dagli assiomi forti dell'infinito.

Gödel osserva[615] che, sulla base di quanto da lui affermato, non solo è possibile dimostrare che la matematica è dotata di un genuino contenuto, ma che tale contenuto è illimitato nel senso che al di fuori di ogni sistema formale per la matematica "esistono proposizioni che esprimono fatti matematici nuovi e indipendenti"[616] cioè proposizioni irriducibili a convenzioni sintattiche basate sugli assiomi di tale sistema formale.

17.3.5. Ogni contenuto è contenuto empirico?

Come anticipato sopra, il filo rosso che caratterizza la seconda parte dell'articolo su Carnap sembra essere il tentativo di *mettere in evidenza* l'ineliminabilità, da un lato, di un contenuto oggettivo della matematica e, dall'altro, di una facoltà specifica, l'*intuizione matematica*, capace di cogliere tale contenuto.

Questo tentativo è *motivato* dalla persuasione nel fatto che la tesi T2 del programma sintattico sia insostenibile ed è *fondato* su di una serie di evidenze e di prove invocate da Gödel. Nelle ultime pagine dell'articolo l'autore propone una sorta di esperimento mentale volto a mostrare che la seconda tesi del punto di vista sintattico è di fatto viziata da una *petitio principii* ed in particolare da una concezione unilaterale e scorretta del significato dei termini "contenuto" e "fatto".

L'idea di Gödel è che l'errore fondamentale del programma sintattico consista nell'assunzione secondo cui: *ogni possibile contenuto è contenuto empirico* oppure *ogni possibile fatto è un fatto empirico.* Quello che differenzia in modo essenziale un neo-positivista da un realista *à la* Gödel è quindi *il*

[613]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 350.
[614]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 350.
[615]Cf. la nota 40 di *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 350.
[616]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 350.

riconoscimento di certi fatti non-empirici e della nostra facoltà di percepirli. Questi fatti non-empirici sono “relazioni fra concetti o altri oggetti astratti che sussistono indipendentemente dalle nostre sensazioni”.[617] La nostra facoltà di percepire questi fatti concettuali è definita come “uno speciale tipo di esperienza”[618] e si tratta di quella che in quasi tutto l'articolo vien chiamata “intuizione matematica” e che per la prima volta nelle ultime pagine del *Carnap paper* vien detta anche “ragione matematica”.

17.3.6. Un esperimento mentale

Per chiarire meglio in che senso il punto di vista sintattico sia “fondato” su di una *petitio principii* Gödel propone di immaginare una situazione in cui noi siamo dotati di un “senso aggiuntivo”, $\mathcal{S}_2$, oltre ai cinque usuali, $\mathcal{S}_1$, capace di farci conoscere una realtà $\mathcal{R}_2$ che sia:

E1. “completamente separata dalla realtà spazio-temporale ” $\mathcal{R}_1$ e

E2. “così regolare da poter essere descritta con un numero finito di leggi”.[619]

In una situazione di questo tipo, osserva l'autore, si potrebbe *decidere in modo arbitrario* di trascurare completamente il senso aggiuntivo $\mathcal{S}_2$ in quanto fallace e le relative percezioni in quanto illusorie, e di riconoscere soltanto $\mathcal{S}_1$ quale genuina facoltà conoscitiva e $\mathcal{R}_1$ quale vera realtà. Altrettanto arbitrariamente si potrebbe scegliere di giudicare tutte e sole le proposizioni vere sulla base di $\mathcal{S}_2$ come “prive di contenuto” e “vere solo in conseguenza di [certe] convenzioni sintattiche”.[620]

Chiaramente, secondo l'autore, questa situazione non è affatto ipotetica ma, se si sostituisce l'intuizione matematica a $\mathcal{S}_2$ e gli oggetti e i fatti matematici a $\mathcal{R}_2$, si ha una descrizione verosimile dell'operazione di *deliberata censura epistemologica* operata dai neo-positivisti nei confronti del contenuto della matematica.

L'idea di Gödel è che, se si definisse una nozione di “conseguenza sulla base delle leggi di natura”, si potrebbe paradossalmente ottenere che le stesse leggi di natura possono essere giudicate come “prive di contenuto” in riferimento ad una definizione di “contenuto” per cui “ogni contenuto è contenuto accidentale”.

---

[617]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 351.
[618]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 351.
[619]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.
[620]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.

17.4. Razionalità matematica e oggettività concettuale

Nel *Carnap paper*[621] Gödel affronta la questione dell'analogia fra intuizione matematica e percezione sensibile con riferimento al fenomeno dell'inesauribilità della matematica già ampiamente trattato nella *Gibbs lecture*. Ancora una volta però qui ci troviamo di fronte ad alcune novità. L'autore constata che:[622]

> L'inesauribilità della matematica rende la somiglianza fra ragione [intuizione matematica] e sensi [percezione sensibile] ... ancor più stretta, perché essa mostra che esiste un numero praticamente illimitato di percezioni indipendenti anche di questo "senso".

Queste percezioni o intuizioni matematiche indipendenti sono evidenziate, in ambito metamatematico, dall'esistenza per ogni sistema formale noncontraddittorio e sufficientemente potente di sempre nuove proposizioni formalmente indecidibili, e dal punto di vista matematico, dalle sempre nuove estensioni assiomatiche cui la teoria degli insiemi si presta.

A proposito della "serie illimitata di assiomi dell'infinito" con cui la teoria degli insiemi può essere estesa, Gödel osserva che:[623]

> ... che tale serie possa coinvolgere un numero molto grande (forse persino infinito) di *percezioni razionali indipendenti* concretamente realizzabili lo si vede dal fatto che questi assiomi *non sono evidenti fin dall'inizio, ma diventano tali solo nel corso dello sviluppo della matematica*.

L'esempio, già riportato sopra, è quello dell'assioma d'inaccessibilità la cui evidenza deve necessariamente essere mediata dalla conoscenza, oltre che degli assiomi della teoria degli insiemi, anche dell'aritmetica ordinale e cardinale.

Nell'ultima citazione riportata sopra occorre per la prima volta l'espressione "percezione razionale" cui farà seguito un'altra novità terminologica del *Carnap paper* e cioè l'espressione "ragione matematica" che l'autore usa per indicare quella che negli anni Quaranta veniva chiamata "comprensione matematica" e nella *Gibbs lecture* "intuizione matematica".

A pagina 354 dell'articolo Gödel afferma che l'esperimento mentale da lui proposto:

[621]In particolare si veda la nota 43 di *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.
[622]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.
[623]Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 353.

> ... si avvicina molto al reale stato di cose, tranne che per il fatto che questo senso aggiuntivo (cioè la ragione) non viene considerato come un senso, per il fatto che *i suoi oggetti sono del tutto differenti da quelli di tutti gli altri sensi*.[624]

Infatti, conclude l'autore:[625]

> ... mentre attraverso la percezione sensibile conosciamo oggetti particolari e le loro relazioni e proprietà, con la *ragione matematica* percepiamo gli oggetti più generali (cioè quelli "formali") e le loro relazioni.

Dunque anche a metà degli anni Cinquanta, e di fatto fino alla fine degli anni Cinquanta, Gödel continua ad accettare il principio di realtà concettuale (CRP) già assunto nel *Russell paper*, e tuttavia l'interpretazione che sembra darne non è più ingenua e non-problematica, ma progressivamente sempre più *critica* e *filosoficamente consapevole*. Come già nella *Gibbs lecture*, anche dal punto di vista metodologico si conferma il passaggio da un approccio apodittico ad un approccio problematico e argomentativo.

Di fatto dal punto di vista metodologico nel *Carnap paper* emergono in tutta chiarezza due strategie argomentative distinte. La prima, già presente allo stato embrionale in *Gödel *1941*, in *Gödel 1944* e in modo compiuto in *Gödel *1951*, consiste nel ridurre all'assurdo un certo punto di vista che si intende refutare sulla base delle sue stesse premesse e assunzioni. In questo modo Gödel aveva criticato la nozione di "dimostrazione costruttiva" in *Gödel *1941*, il costruttivismo russelliano in *Gödel 1944*, e il convenzionalismo matematico nella *Gibbs lecture*. La seconda, utilizzata soprattutto nella seconda parte del *Carnap paper*, consiste invece nel richiamarsi in modo ragionato e ripetuto a certe evidenze razionali o sensibili, rilevando di volta in volta i luoghi e i modi in cui un determinato punto di vista da refutare trascura tali evidenze.

Può sembrare che questa seconda strategia sia in parte già presente negli anni Quaranta, ma a nostro parere, mentre allora il richiamo all'evidenza era di tipo dogmatico e non-problematico, negli anni Cinquanta esso ha un carattere molto più argomentativo e filosoficamente motivato.

---

[624] Il corsivo è mio.

[625] Cf. *Gödel *1953/59* in *Gödel 1995*, pag. 354.

Gli anni Sessanta

Sebbene negli anni Sessanta Gödel non abbia pubblicato nulla di nuovo, forse anche a causa del suo precario stato di salute, egli continuò a dedicarsi non solo ai temi filosofici affrontati negli anni Cinquanta, ma anche ad alcuni nuovi contributi tecnici come gli assiomi quadrati[626] e l'argomento ontologico[627] ed inoltre alla revisione del *Cantor paper* e del *Dialectica paper*.

Dal punto di vista logico-matematico questo decennio fu inaugurato dalla dimostrazione dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo e, come anticipato sopra, Gödel ebbe un importante ruolo "esterno" nel favorire l'accettazione di questo nuovo metodo insiemistico e nel rendere concretamente possibile una rapida pubblicazione del lavoro di Cohen.

Dal punto di vista filosofico gli anni Sessanta videro invece sorgere un profondo interesse di Gödel per le opere di Edmund Husserl di cui sono state recentemente rinvenute tracce nel *Nachlass* e che trova conferma in *Wang 1981*, *1987*, *1996* e nell'epistolario gödeliano. Questo capitolo conclusivo sarà perciò rivolto ad analizzare dettagliatamente un inedito relativo alla filosofia di Husserl pubblicato postumo nel terzo volume dei *Collected Works*.

Tenteremo di illustrare questo *paper* per poi valutare se sia possibile, come indicato da Richard Tieszen, Dagfinn Føllesdal ed altri, considerare alcune istanze filosofiche gödeliane precedenti le sue letture fenomenologiche come *linee di convergenza* della riflessione gödeliana con quella husserliana e, come indicato da Jaqueline Kennedy e Mark van Atten, alcune affermazioni presenti nei lavori gödeliani degli anni Sessanta, come *segni della ricaduta* di tali letture sulla filosofia della matematica dell'autore.

18. Filosofia della matematica e fenomenologia

Nell'aprile del 1961 Gödel venne eletto membro della *American Philosophical Society* e pochi mesi dopo il presidente esecutivo della società G.W.Corner gli comunicò per lettera che ogni nuovo associato era invitato a tenere una breve conferenza su un argomento a scelta. Nella busta della lettera di Corner, conservata nel *Nachlass*, è stato ritrovato un testo stenografato intitolato "Vortrag, Konzept" in cui Gödel parla positivamente della fenomenologia husserliana e della filosofia kantiana. Questo testo è stato quindi inserito nel terzo volume dei *Collected Works* col titolo di "The modern de-

[626] Cf. il capitolo 11.
[627] Cf. il capitolo 4.

velopement of the foundations of mathematics in the light of philosophy" (*Gödel *1961/?*) preceduto da una nota introduttiva di Føllesdal.[628]

Da allora sono stati pubblicati una serie di articoli dello stesso Føllesdal, di Tieszen e di altri autori[629] sul tema del rapporto della filosofia della matematica gödeliana con l'opera di Husserl e con la fenomenologia. Essendo disponibili, oltre al breve articolo di cui sopra, soltanto le annotazioni provenienti dal *Nachlass*, le discussioni intrattenute con Wang e alcune lettere, sembrerebbe difficile stabilire in che misura e in che modo la lettura delle opere di Husserl, iniziata da Gödel nel 1959,[630] abbia potuto condizionarne la filosofia della matematica.

Sembrano tuttavia possibili alcune considerazioni congetturali, da un lato, sulle *ragioni* per cui Gödel intraprese lo studio sistematico proprio delle opere di Husserl e, all'altro, sulla *ricaduta* che tale studio può aver avuto sulle riflessioni fondazionali e filosofiche del nostro autore. I primi sembrano essere rintracciabili nella *Gibbs lecture* e nei *Carnap papers*, mentre le seconde andrebbero verificate nei pochi scritti rimaneggiati da Gödel nel corso degli anni Sessanta, in particolare nella seconda edizione del *Cantor paper* e del *Dialectica paper*.

18.1. Il *Vortrag*

*Gödel *1961/?* è caratterizzato da una ingenuità compositiva che potrebbe spingere a considerarlo semplicemente come un contributo di scarso interesse in quanto frutto di riflessioni poco approfondite. Tuttavia esso, da un lato, costituisce l'unica fonte attualmente pubblicata in cui Gödel si pronuncia sulla fenomenologia husserliana e, d'altro canto, presenta, seppur nell'ambito di una esposizione estremamente schematica, alcuni tratti di continuità con gli articoli degli anni Cinquanta.

18.1.1. Prospettive filosofiche

L'*Husserl Vortrag* si apre con una dichiarazione di intenti: l'autore si propone di illustrare con un approccio prettamente filosofico gli sviluppi avvenuti nel corso del Ventesimo secolo nell'ambito dei fondamenti della matematica.

[628] Cf. *Føllesdal 1995a*.
[629] Cf. *Arrigoni 2002*, *Kennedy et van Atten 2003* ma anche *Hauser 2002, 2002a*.
[630] Cf. *Wang 1996*.

In particolare Gödel intende collocare tali sviluppi all'interno di uno schema di "possibili visioni del mondo filosofiche".[631]

Secondo l'autore sarebbe possibile classificare tutte le possibili visioni del mondo "sulla base della loro affinità o distanza dalla metafisica".[632] In tal modo egli individua, da un lato, scetticismo, materialismo e positivismo, e dall'altro, spiritualismo, idealismo e teologia. Si avrebbe quindi una successione di prospettive filosofiche con all'estrema destra la metafisica e all'estrema sinistra lo scetticismo.

Gödel non chiarisce affatto il significato dei termini da lui usati in questo contesto (che tipo di metafisica? che forma di scetticismo?), ma puntualizza che chiaramente possono esistere punti di vista filosofici che contengono ad un tempo elementi metafisici ed anti-metafisici.[633]

Egli osserva che a partire dal Rinascimento la filosofia occidentale sembra aver compiuto un percorso che, pur non essendo stato lineare, ha tuttavia seguito un irreversibile andamento da forme filosofiche di stampo metafisico a forme filosofiche di stampo sempre più marcatamente anti-metafisico.

In particolare, secondo l'autore, la fisica contemporanea sembra aver raggiunto il culmine di questo processo al punto che "viene negata la possibilità di conoscere stati di cose oggettivizzabili, e si asserisce che dobbiamo limitarci a prevedere i risultati delle osservazioni".[634] Per Gödel questo stato di cose costituisce il fallimento dell'idea di scienza teorica (ted. "theoretische Wissenschaft") in quanto sembra ridurre ogni disciplina scientifica a mero strumento della tecnologia.

La matematica che, secondo l'autore, è "per natura una scienza a priori" avrebbe resistito strenuamente a questo andamento dello *Zeitgeist* com'è testimoniato dallo scarso successo ottenuto dall'empirismo matematico di John S. Mill. Ciononostante nei primi anni del Novecento, con la comparsa dei paradossi della teoria degli insiemi, anche in ambito matematico ha cominciato a diffondersi l'atteggiamento anti-metafisico da tempo presente in altre branche della scienza e in generale in filosofia.

Secondo Gödel, i paradossi della teoria degli insiemi furono interpretati come pericolose contraddizioni all'interno del corpus della matematica e furono inoltre sovrastimati da scettici ed empiristi i quali li sfruttarono "come

[631]Ted. "von möglichen philosophischen Weltanschauungen".

[632]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 374.

[633]L'esempio considerato dall'autore in questo senso è quello di una "teologia fondata empiristicamente" (cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 374).

[634]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.

pretesto per un radicale spostamento verso sinistra".[635] L'autore considera esagerata questa reazione ai paradossi in quanto:

1. in primo luogo, essi non riguardarono il cuore della matematica ma semmai una zona periferica e al confine con la filosofia;

2. in secondo luogo, essi sono stati risolti "in modo del tutto soddisfacente"[636] mediante l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi.

Ma nonostante tutto, sostiene Gödel, alla fine ha prevalso lo *Zeitgeist* anche fra i matematici, portando così ad un netto cambiamento di prospettiva.

Qui l'autore tende ad attribuire l'insorgere di un certo scetticismo in matematica esclusivamente ai paradossi della teoria degli insiemi. Di fatto in tal senso andrebbe considerata anche la scoperta ottocentesca delle geometrie non-euclidee, ma, come osservato a più riprese, Gödel non considerava la geometria come parte della matematica propria, bensì come una sua branca essenzialmente ipotetico-deduttiva.

18.1.2. Verità e ipotesi

La reazione alla scoperta dei paradossi da parte di molti matematici, sostiene l'autore, fu quella di negare "che la matematica, così com'era stata sviluppata precedentemente, rappresenti un sistema di verità",[637] di assumerne una parte, considerata come indiscutibile, e di considerare tutto il resto del corpus delle conoscenze matematiche come valide "nel migliore dei casi in un senso ipotetico - cioè in un senso secondo cui la teoria propriamente asserisce solo che da certe assunzioni (che a loro volta non necessitano di giustificazione), si possono giustificatamente trarre certe conclusioni".[638]

Lo schema descritto da Gödel corrisponde in parte a quello seguito dai predicativisti e dai neo-positivisti. Va tuttavia ricordato che in molti casi, ad esempio per gli intuizionisti, la matematica non fu reinterpretata in senso ipotetico-deduttivo, ma piuttosto decurtata delle parti ritenute "pericolose" come le parti astratte e infinitarie della teoria degli insiemi.

In ogni caso l'autore sembra qui aver avuto in mente principalmente una qualche forma di positivismo o di riduzionismo empirista dal momento che,

[635] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.
[636] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.
[637] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.
[638] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.

secondo lui, con questa svolta la matematica, ben lungi dal restare quello che era prima, perse invece il suo specifico statuto epistemologico e divenne "una scienza empirica".[639]

Al riguardo egli ripropone un argomento anti-positivista già illustrato nel *Carnap paper*. Se si dimostra un certo teorema aritmetico, per esempio il teorema di Lagrange secondo cui "ogni numero naturale è somma di al massimo quattro quadrati" per mezzo di certi "assiomi arbitrariamente postulati",[640] non si ha alcuna garanzia del fatto che non si presenterà prima o poi un controesempio a questo risultato. Non se ne ha la certezza, aggiunge l'autore, a meno che non si disponga di una dimostrazione della noncontraddittorietà degli assiomi in questione.

Inoltre, afferma Gödel, in un'interpretazione puramente ipotetica della matematica non si ha neppure la certezza che ogni questione matematica ben posta possa ricevere una risposta positiva o negativa, nel senso che, se si parte da assunzioni "del tutto arbitrarie", non si vede per quale ragione esse dovrebbero decidere ogni problema matematico ben posto.

18.1.3. La reazione hilbertiana

Secondo l'autore un tentativo di reazione a questa deriva scettica della matematica fu quello proposto da Hilbert il quale col suo programma di fondazione formalista della matematica accolse in parte lo *Zeitgeist* in parte lo spirito conservatore tipico della matematica.

Il lato anti-metafisico del programma di Hilbert starebbe, secondo Gödel, nel fatto di affermare che la verità degli assiomi matematici non può essere né giustificata né afferrata in alcun modo ed inoltre nel fatto che in Hilbert la derivazione dei teoremi dagli assiomi "è concepito come un mero gioco di simboli secondo certe regole".[641]

Il lato "metafisico" del programma hilbertiano starebbe invece nel fatto di pretendere che:

- H1. la dimostrazione di un teorema matematico debba costituire un "fondamento sicuro" della sua correttezza;

- H2. ogni questione ben-posta in matematica debba poter avere una soluzione chiara e distinta.

[639] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.
[640] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 376.
[641] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 378.

Per garantire i due *desiderata* di cui sopra, afferma Gödel, l'idea di Hilbert fu quella di cercare di dimostrare che le regole del "gioco di simboli" cui si vorrebbe ridurre la matematica devono godere della proprietà che "di due proposizioni φ e $\neg\varphi$, esattamente una può sempre essere derivata". Il fatto che *almeno* una delle due possa essere derivata risponderebbe al requisito della *completezza* della matematica.[642] Il fatto che *al massimo* una delle due possa essere derivata soddisferebbe invece il requisito della *noncontraddittorietà* .

Naturalmente per garantire questi due *desiderata* anche secondo il programma di Hilbert occorre che "una parte della matematica sia riconosciuta come vera nel senso della vecchia filosofia"[643] conservatrice, ma questa parte non crea molti problemi dal momento che "essa si riferisce soltanto a oggetti concreti e finiti nello spazio, cioè alle combinazioni di simboli".[644]

Il problema è, osserva Gödel, che questa combinazione di elementi metafisici e anti-metafisici proposta da Hilbert non può funzionare per ragioni essenziali ossia perché, anche limitandosi alla sola aritmetica, non è possibile trovare un sistema formale **T** che, per ogni proposizione aritmetica φ, dimostri φ o dimostri $\neg\varphi$.[645]

Dunque il tentativo di Hilbert di reazione allo *Zeitgeist* avrebbe fallito il bersaglio, sostanzialmente perché in realtà pendeva troppo verso quello stesso spirito che voleva arginare.[646]

L'idea di Gödel rispetto ai due estremi della scala di prospettive filosofiche da lui proposta è che la verità stia nel mezzo ossia che il giusto atteggiamento da assumere sia quello di cercare "una combinazione delle due concezioni".[647]

La proposta gödeliana in tal senso consisterebbe nell'assicurare la certezza della matematica cercando di approfondire la nostra conoscenza di quei "concetti astratti" che portano alla formulazione dei sistemi formali per la matematica, e tentando di ottenere in tal modo nuove intuizioni "sulla risolubilità e sui concreti metodi di risoluzione di tutti i problemi matematici sensati".[648]

Gödel si chiede quindi in che modo debba avvenire questo processo di

[642] Di fatto alla completezza dei sistemi formali.

[643] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 378.

[644] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 378.

[645] Il riferimento implicito è ovviamente il primo teorema di incompletezza, cui fa seguito un richiamo ancora implicito al secondo.

[646] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 380.

[647] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 380.

[648] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 382.

comprensione e precisazione dei concetti astratti e conclude che certamente ciò non può avvenire soltanto tramite definizioni esplicite, perché questo porterebbe inevitabilmente ad un *regresso all'infinito*. Di conseguenza tale procedura dovrà essere costituita da "una chiarificazione del significato[649] che non consiste nel dare definizioni".[650]

18.1.4. La fenomenologia husserliana

Secondo l'autore una prospettiva nuova per ottenere la chiarificazione dei significati e l'approfondimento della conoscenza dei concetti astratti della matematica è fornita dalla fenomenologia di Husserl. Gödel afferma che nella prospettiva fenomenologica:[651]

> ... la chiarificazione dei significati consiste nel focalizzare la nostra attenzione in modo più marcato sui concetti in questione dirigendo la nostra attenzione in un certo modo, cioè sui nostri propri atti nell'utilizzo di questi concetti, sulle nostre facoltà di compiere tali atti, ecc ...

L'autore sottolinea dunque lo spostamento di attenzione, proprio della *riduzione fenomenologica*, dalla considerazione naturalistica degli oggetti della nostra conoscenza alla considerazione degli atti conoscitivi che a tali oggetti sono diretti.

Gödel osserva inoltre che la fenomenologia non costituisce una scienza nel senso usuale della parola, ma piuttosto:[652]

> ... una procedura o tecnica che dovrebbe produrre in noi un nuovo stato di coscienza in cui descriviamo in dettaglio i concetti che utilizziamo nel nostro pensiero oppure afferriamo altri concetti fondamentali finora sconosciuti.

Secondo l'autore non ci sono ragioni di principio per rifiutare una tale procedura né da un punto di vista metafisico né, tanto meno, da un punto di vista anti-metafisico come quello empirista, ma, al contrario, esistono buone ragioni in suo favore.

Se si considera infatti lo sviluppo di un bambino, spiega Gödel, si osservano due direzioni di crescita e di apprendimento: da una parte, il bambino conosce gli oggetti del mondo esterno, i propri sensi e i propri organi motori,

[649]Ted. "Sinnklärung".
[650]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 382.
[651]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 382.
[652]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 382.

dall'altro, nel processo di apprendimento del linguaggio, il bambino comincia col conoscere ciò che le parole designano e procede poi a comprendere i concetti su cui il linguaggio si basa. Lungo questa seconda direzione, spiega l'autore, sembra possibile parlare di "stati di coscienza di vari livelli" dove l'uso delle parole si trova ad un certo livello e quello delle inferenze logiche ad un livello superiore.

L'idea di Gödel è che, se lo sviluppo della scienza moderna può essere paragonato alla prima direzione dello sviluppo del bambino, ci sarebbe da aspettarsi che possa esistere una qualche disciplina che si rivolga anche nella seconda. Ossia:[653]

> ... si può vedere l'intero sviluppo della scienza empirica come sistematica e consapevole estensione di ciò che il bambino fa quando si sviluppa lungo la prima direzione. Il successo di questa procedura è di fatto sbalorditivo e molto maggiore di quello che ci si aspetterebbe a priori ... Ciò fa quindi sembrare del tutto possibile che un sistematico e consapevole avanzamento nella seconda direzione supererà a sua volta le aspettative che si potrebbero avere ...

Egli osserva che alcuni grandi passi avanti nella seconda direzione sono già stati fatti, anche senza una tale "procedura sistematica e consapevole", nel senso che, nel definire gli assiomi della matematica emergono sempre nuovi assiomi evidenti e indipendenti da quelli precedentemente definiti. Questo fatto fa pensare che, nonostante i risultati di incompletezza, resti aperta la possibilità che "ogni questione matematica (di tipo si-o-no) chiaramente posta sia risolubile"[654] se non sulla base dei principi matematici già noti, almeno con opportune estensioni assiomatiche.

Nello spiegare quella che è poi un'ennesima formulazione del suo programma per i nuovi assiomi, Gödel non cita esplicitamente né l'incompletezza né la teoria degli insiemi, ma dice soltanto che questo fatto "concorda in linea di principio con la concezione kantiana della matematica".[655] Come osservato da Føllesdal in *1995a*, l'autore sembra far qui riferimento al passo della *Critica della ragion pura*[656] in cui, a proposito del teorema secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180 gradi, Kant afferma che la dimostrazione di questa proposizione passa attraverso una catena di inferenze interamente guidate dall'intuizione.

---

[653]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 384.
[654]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 384.
[655]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 384.
[656]Cf. *Kant 1967*, A717/B745.

Per Gödel l'affermazione kantiana secondo cui nelle dimostrazioni geometriche sono necessarie sempre nuove intuizioni è di per sè falsa in quanto sembra implicare che non sia possibile assiomatizzare finitamente la geometria. Tuttavia essa diventa "dimostrabilmente vera" se invece della geometria si considera la matematica (in senso proprio) oppure la teoria degli insiemi. A pagina 384 di *Gödel *1961/?* leggiamo infatti:

> ... Kant asserisce che nella derivazione dei teoremi geometrici necessitiamo sempre di nuove intuizioni geometriche e che perciò una derivazione puramente logica mediante un numero finito di assiomi è impossibile. Ciò è dimostrabilmente falso. Tuttavia se in questa frase sostituiamo il termine "geometrici" con "matematici" o "insiemistici", allora essa diventa una proposizione dimostrabilmente vera.[657]

Secondo l'autore l'esempio della concezione kantiana della geometria rappresenta solo un caso di una situazione più generale riguardante l'idealismo trascendentale, ossia il fatto che molte affermazioni di Kant pur essendo false se prese alla lettera, "in un senso più ampio contengono profonde verità".[658]

L'idea di Gödel è che le profonde verità nascoste nel sistema filosofico kantiano siano state portate a corretta formulazione proprio dalla fenomenologia di Husserl.[659] Egli osserva infatti che:[660]

> ... l'intero metodo fenomenologico si rifà nella sua idea centrale a Kant, e ciò che Husserl fece per la prima volta fu soltanto formularla più precisamente, renderla pienamente consapevole e realizzarla per particolari domini. Infatti già dalla terminologia usata da Husserl, si vede quanto lui stesso giudicasse positivamente la sua relazione con Kant.

Per quanto riguarda la terminologia si può pensare che Gödel faccia qui riferimento al recupero husserliano del termine "trascendentale" che nel suo senso moderno fu in effetti inaugurato da Kant. Quanto a che cosa l'autore intenda

[657]L'autore parla di una "proposizione dimostrabilmente vera" forse con riferimento implicito ai risultati di incompletezza e di certo non agli assiomi dell'infinito, i primi costituiscono infatti un fenomeno matematicamente dimostrato, mentre i secondi come più volte ripetuto dall'autore (sebbene non in questa sede), sono un fatto percepito esclusivamente da chi prende sul serio la teoria degli insiemi cantoriana.

[658]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 384.

[659]Non è un caso che, come riporta *Føllesdal 1995a*, Gödel prediligesse le opere "idealiste" di Husserl (come le *Ideen* e le *Cartesianische Meditationen*) rispetto a quelle "realiste" (come le *Logiche Untersuchungen*). Si noti che, tuttavia, Gödel faceva una netta distinzione fra le prime cinque ricerche logiche e l'ultima che considerava invece molto importante.

[660]Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 384.

con l'espressione "idea centrale" della fenomenologia, ci troviamo chiaramente di fronte ad una rosa di possibilità. Fra queste si può congetturare che egli si riferisca all'analogia strutturale fra il binomio intenzioni/riempimenti, in Husserl, e il binomio categorie/intuizioni in Kant.

L'articolo si conclude con la considerazione del fatto che la fenomenologia husserliana, in linea col punto di vista kantiano:[661]

> ... evita sia il salto mortale dell'idealismo in una nuova metafisica sia il rifiuto positivistico di ogni metafisica.

Come si vede da quest'ultimo passo, il punto di vista gödeliano sull'idealismo kantiano sembra essere mutato profondamente rispetto alla fine degli anni Quaranta. Nei *Kant papers* si trovano infatti delle critiche esplicite ad un presunto eccessivo soggettivismo di Kant. Qui l'unico giudizio negativo espresso da Gödel nei confronti della filosofia kantiana sembra essere relativo alla forma del sistema più che ai suoi contenuti. Questo cambiamento può essere interpretato come un primo segno dell'influenza delle letture fenomenologiche affrontate dall'autore oppure come il risultato di una più approfondita lettura e comprensione dell'opera kantiana.[662]

Una seconda considerazione che si può evincere da quest'ultimo passo del *Vortrag* è che Gödel potrebbe aver individuato nella fenomenologia un interessante terza via fra il realismo metafisico e il nominalismo positivista e una possibile mediazione fra costruttivismo e platonismo.

18.2. Gödel e Husserl

Prima del 1959 Gödel ebbe alcuni contatti anche se probabilmente solo superficiali con la fenomenologia husserliana. Negli anni dell'università è molto probabile che egli abbia sentito parlare della fenomenologia per lo meno nell'ambito del Circolo di Vienna, infatti Carnap fu allievo di Husserl nel biennio 1924-25 e Schlick discusse criticamente la fenomenologia nella *Allgemeine Erkenntnislehre* (1918).

Nel 1930 Gödel ascoltò a Königsberg la conferenza di Heyting "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik" in cui si faceva riferimento alle nozioni husserliane di "intenzione" e "riempimento" per spiegare la semantica intuizionista. In quello stesso anno Gödel recensì l'articolo del fenomenologo

[661] Cf. *Gödel *1961/?* in *Gödel 1995*, pag. 386.

[662] Sebbene non si abbiano testimonianze precise in tal senso.

e storico della matematica Oskar Becker intitolato "Über Logik der Modalitäten". Questo stesso articolo viene citato da Gödel nel breve contributo del 1933 sulla traduzione modale.[663]

Infine, come ipotizzato da Kennedy e van Atten,[664] è possibile che Gödel abbia assistito ad una di due conferenze tenute da Husserl a Vienna nel 1935.[665] Ciò potrebbe testimoniare un suo transitorio interesse per la fenomenologia già negli anni Trenta, ma si tratta più che altro di una suggestiva congettura.

Di fatto si può dire che gli interessi filosofici del nostro autore fino al 1959 furono principalmente rivolti, da un lato, a istanze fondazionali come l'intuizionismo, il finitismo, il predicativismo e il neo-positivismo e, dall'altro, per quanto riguarda la filosofia tradizionale, all'opera di Leibniz e a quella di Kant.

La "svolta" del '59

Fu invece a partire dal 1959 che, secondo *Wang 1996* e *Føllesdal 1995a*, Gödel cominciò a nutrire un profondo interesse per le opere di Husserl in particolare per la fase "idealistica" del pensiero husserliano successiva al 1907. Le tracce più tangibili di questo interesse si trovano nella sua biblioteca privata, oggi conservata a Princeton, in cui sono state rinvenute molte delle principali opere pubblicate da Husserl pesantemente annotate a margine.

In particolare Gödel possedeva le *Logische Untersuchungen*, le *Cartesianische Meditationen*, il primo libro delle *Ideen*, la *Krisis* e un volume contenente le traduzioni in inglese della "Philosophie als strenge Wissenschaft" e "Die Krisis des europäischen Menschentums". Egli possedeva inoltre i due volumi della monografia di Herbert Spiegelberg, *The phenomenological movement: an historical introduction* pubblicato nel 1965.

Com'è testimoniato in *Wang 1996* e dalle annotazioni a margine presenti sui volumi, Gödel prediligeva le *Ideen*, le *Meditationen* e la sesta delle *Logische Untersuchungen* per il trattamento che veniva fatto dell'intuizione categoriale. Egli sollevava invece riserve sulla *Formale und transzendentale Logik* e sulla *Krisis*, sebbene, come si sarà notato, l'*Husserl Vortrag* sembra risentire in qualche modo proprio dell'influenza di quest'opera.

[663]Cf. il capitolo 3.

[664]Cf. *Kennedy et van Atten 2003*, pag. 427.

[665]Si tratterebbe della celebre "Die Philosophie in der Krise des europäischen Menschentums".

Come suggerisce Føllesdal nel suo *1995a*, il nostro autore probabilmente trovò alcune analogie fra il suo punto di vista filosofico e alcuni tratti della fenomenologia, ma più di tutto "quello che lo impressionò sembra essere stata la filosofia generale di Husserl, che avrebbe fornito un quadro sistematico per un certo numero di sue idee in filosofia della matematica".[666]

Di fatto un elemento che sembra aver spinto Gödel a cercare spunti di riflessione in un esponente della filosofia nel senso tradizionale del termine potrebbe esser legato alla crescente esigenza, da noi rilevata negli scritti gödeliani degli anni Cinquanta, di una fondazione rigorosa e filosoficamente soddisfacente del suo realismo concettuale.

Lungo quest'ultima linea interpretativa sembrano essersi mossi anche Kennedy e van Atten i quali considerano la mancata pubblicazione del *Carnap paper*, dopo più di cinque anni di elaborazione, come il segnale di una sorta di crisi o situazione di stallo all'interno del tentativo gödeliano di confutare le alternative al suo realismo concettuale. Questa situazione sarebbe testimoniata dalla ormai famosa lettera a Schlipp del 3 febbraio 1959 in cui Gödel affermava:[667]

> E' facile addurre argomenti molto pesanti e stringenti in favore del mio punto di vista, ma un completo chiarimento della situazione è risultato essere più difficile di quanto avessi anticipato, senza dubbio in conseguenza del fatto che *l'argomento è strettamente correlato con, e in parte identico a, uno dei problemi fondamentali della filosofia, cioè la questione della realtà oggettiva dei concetti e delle loro relazioni.*

Questa lettera presenta vari motivi di interesse. In primo luogo, Gödel ammette di non esser soddisfatto degli argomenti da lui presentati nei *Carnap papers* e di conseguenza, vista la continuità di metodo e merito, neppure di quelli presentati nella *Gibbs lecture*. In secondo luogo l'autore conferma la sua consapevolezza del fatto che la realtà oggettiva dei concetti ben lungi dall'essere un *fatto della ragione matematica*, è invece un problema ed anzi "uno dei problemi fondamentali della filosofia".

In conclusione la tesi secondo cui le riflessioni gödeliane giunsero nel 1959 ad una sorta di crisi ci sembra parzialmente accettabile solo nella misura in cui si tenga presente il temperamento "cauto" del nostro autore e il fatto che, come abbiamo cercato di illustrare nei capitoli 16 e 17, tutti gli anni Cinquanta costituirono un momento di forte rielaborazione del suo punto di vista filosofico e fondazionale.

[666] Cf. *Føllesdal 1995a*, in *Gödel 1995*, pag. 368.

[667] Cf. *Collected Works*, vol.V, pag. 244. Il corsivo è mio.

18.3. Linee di convergenza

Vari autori fra cui Føllesdal[668], Tieszen[669] e Arrigoni[670] hanno rilevato delle analogie o meglio delle convergenze fra alcuni aspetti della filosofia della matematica di Gödel e alcune nozioni husserliane. In questa sezione presentiamo quelle che ci son sembrate le più significative.

18.3.1. Realismo

Un primo punto di convergenza fra Gödel e Husserl riguarderebbe il realismo concettuale gödeliano che potrebbe essere accostato al punto di vista espresso da Husserl secondo cui sia gli oggetti fisici che quelli matematici sono oggettivi anche se non nel senso ingenuo del termine. In *Logik und allgemeine Wissenschaftslehre* si legge ad esempio:[671]

> Che si possa sensatamente e a buon diritto parlare intorno alla serie numerica e formulare proposizioni assolutamente vere sugli oggetti che vengono lì chiamati numeri, nessuno vorrà seriamente contestarlo ... Ogniqualvolta facciamo un'asserzione evidente sui numeri di questa serie e cogliamo così una verità oggettivamente valida, sono proprio questi numeri e non altro gli oggetti cui si riferisce quella verità.

Come abbiamo cercato di evidenziare nei precedenti capitoli di questa terza parte, il realismo gödeliano sembra progredire da un platonismo ingenuo degli anni Quaranta ad una forma più sofisticata negli anni Cinquanta ed in particolare nei *Carnap papers*. Quest'ultima interpretazione del realismo concettuale e matematico ci pare in effetti per certi aspetti accostabile al realismo fenomenologico di Husserl.

Di fatto, come sottolineato nella letteratura secondaria, sul piano delle dichiarazioni esplicite presenti negli articoli filosofici gödeliani sia degli anni Quaranta che negli anni Cinquanta, le formulazioni utilizzate dal nostro autore tendono a porre sullo stesso piano il grado di realtà degli oggetti matematici e di quelli fisici. In tal modo alcuni autori tendono ad estendere la convergenza fra il realismo gödeliano e quello husserliano già agli articoli degli anni Quaranta.

[668] Cf. *Føllesdal 1995* e *1995a*.
[669] Cf. *Tieszen 1992, 1994, 1998, 2002*.
[670] Cf. *Arrigoni 2002*.
[671] Cf. *Husserl 1918*, pagg. 34-35.

18.3.2. Parità epistemologica

In secondo luogo, di nuovo negli articoli degli anni Cinquanta, Gödel sottolinea che, pur nell'analogia fra matematica e scienze empiriche, occorre riconoscere la specificità degli oggetti matematici sottolineando il fatto che essi si distinguono ontologicamente da quelli fisici, essendo di natura completamente diversa.[672]

In tal senso sembra corretto dire, come fanno Kennedy e van Atten,[673] che quella che viene riconosciuta da Gödel a oggetti fisici e matematici è una sorta di "parità epistemologica" che potrebbe effettivamente essere accostata al "principio di tutti i principi" espresso da Husserl nel §24 delle *Ideen* nei seguenti termini:

> ... ogni intuizione originariamente offerente è una sorgente legittima di conoscenza ... tutto ciò che si dà originariamente nell'"intuizione" (per così dire in carne e ossa) è da assumere come esso si dà ma anche soltanto nei limiti in cui si dà.

Per Husserl quindi, proprio come per Gödel, gli oggetti fisici e quelli matematici hanno la stessa dignità epistemologica (o meglio, fenomenologica) e ciononostante vanno distinti in linea di principio in quanto si danno secondo modalità e mediante atti che differiscono fra loro in modo essenziale.

18.3.3. Intuizione

Un terzo punto di convergenza fra Gödel e Husserl può essere ritrovata nella nozione gödeliana di "intuizione matematica" che viene caratterizzata dal nostro autore sempre di più, in particolare nel corso degli anni Cinquanta, come una facoltà in tutto e per tutto simile alla percezione sensibile, tranne che per il fatto che, anziché fornirci un accesso agli oggetti fisici, ci consente di conoscere i concetti e gli oggetti matematici.

Nel VI libro delle *Logische Untersuchungen*, Husserl caratterizza un analogo della percezione sensibile relativa agli "elementi significanti" (cioè astratti) della conoscenza in termini di "intuizione categoriale". Nel §45 vi si legge ad esempio:

---

[672] Dal momento che i secondi, a differenza dei primi, sono spazialmente e temporalmente determinati.

[673] Cf. *Kennedy et van Atten 2003*, pag. 434.

> ... deve esserci un atto che svolge rispetto agli elementi significanti la stessa funzione assolta dalla percezione sensibile nei confronti degli elementi sostanziali. L'essenziale omogeneità della funzione di riempimento e di tutte le relazioni ideali ad essa connesse per legge rende appunto inevitabile che si designi come *percezione* qualsiasi atto riempiente nella modalità dell'ostensione diretta e confermante, ogni atto riempiente come *intuizione* ed il suo correlato intenzionale come *oggetto*.[674]

La nozione di intuizione categoriale verrà ulteriormente elaborata da Husserl nelle *Ideen* in termini di *intuizione eidetica* ed avrà sempre un ruolo fondamentale per la fenomenologia della matematica.

Come ci riferisce Wang,[675] Gödel rimase così colpito dalla nozione di "intuizione categoriale" da consigliare la lettura della sesta delle *Logische Untersuchungen* ad alcuni colleghi logici.

18.3.4. Progressività

Si è più volte sottolineato il fatto che Gödel non considera l'intuizione matematica come una facoltà capace in ogni caso di fornire evidenza *immediata* della verità di una certa proposizione matematica come ad esempio di un assioma forte dell'infinito. In tal senso abbiamo parlato di una *progressività* e *mediatezza* della nozione gödeliana di intuizione matematica.

Il fatto di distinguere fra un immediatezza del "dato" empirico e una *non-immediatezza* del "dato" matematico potrebbe essere accostato alla distinzione husserliana fra la percezione sensibile di un oggetto che avviene per così dire in modo diretto e l'intuizione di un oggetto categoriale che si dà soltanto in modo indiretto cioè attraverso atti fondati su altri atti. Nelle *Logische Untersuchungen* (VI, §46) si può leggere ad esempio:

> Gli oggetti sensibili si presentano nella percezione in un atto in un solo grado; essi non sottostanno alla necessità di una "costituzione a più raggi" in atti di grado superiore che costituiscano i loro oggetti per mezzo di altri oggetti che sono costituiti a loro volta in altri atti.

Oltre all'analogia fra i due punti di vista occorre tuttavia ricordare che per Gödel solo certi oggetti e contenuti matematici sono intuiti in modo mediato e progressivo, infatti, come abbiamo sottolineato nel capitolo 17, per il nostro autore certe intuizioni logiche e aritmetiche hanno lo stesso grado di evidenza e di immediatezza delle percezioni sensibili ordinarie.

[674] Il corsivo è mio.
[675] Cf. *Wang 1996*, pag. 80 e pag. 164.

In secondo luogo, mentre Gödel sembra considerare intuizione matematica e percezione sensibile come due facoltà sostanzialmente separate e indipendenti, in Husserl l'intuizione categoriale deve invece fondarsi in ultima istanza sull'intuizione sensibile.

18.3.5. Fallibilità dell'intuizione

Come abbiamo visto, Gödel afferma, ad esempio nei *Carnap papers*, che l'intuizione matematica, analogamente alla percezione sensibile, è fallibile, come si vede nel caso dei paradossi della teoria degli insiemi. L'autore afferma inoltre, ad esempio nelle *Gibbs lecture*, che la nostra intuizione degli oggetti matematici può essere incompleta e persino indistinta.

In modo analogo per Husserl si esclude che l'intuizione categoriale, così come la percezione sensibile, costituisca una fonte di conoscenza sempre adeguata. Di fatto l'impostazione fenomenologica considera ogni atto di coscienza come costitutivamente intenzionale, ma non necessariamente passibile di riempimento e quindi non necessariamente soddisfacibile.

In tal senso l'esempio gödeliano dei paradossi dal punto di vista fenomenologico andrebbe considerato come un caso di intenzione significante delusa, cioè priva di un possibile riempimento intuitivo. Viceversa, il fatto che la nostra conoscenza del concetto di insieme sia incompleta andrebbe interpretato fenomenologicamente come il risultato di un intenzione significante solo parzialmente riempita, ma in linea di principio passibile di un riempimento sempre più adeguato.

Osservazioni che sembrano andare in questa direzione sono state fatte da Arrigoni[676] e da Tieszen[677]. Quest'ultimo in particolare osserva che:[678]

> Per Husserl una proposizione come GCH non può essere dichiarata priva di senso ma si può solo dire che ad oggi non c'è ragione di credere che essa possa essere riempita. Per Husserl il significato non va identificato col riempimento, anche se il riempimento di un'intenzione può fornire maggiore informazione sugli oggetti o gli stati di cose in questione ... L'osservazione gödeliana che le questioni matematiche attualmente indecidibili hanno significato e possono essere decise in futuro sembra essere molto nello spirito del punto di vista di Husserl.

[676]Cf. *Arrigoni 2002*.
[677]Cf. *Tieszen 1989*.
[678]Cf. *Tieszen 1989*, pag. 47.

18.4. Verifiche

Cercheremo ora, negli articoli posteriori al 1959, delle possibili tracce, se non teoretiche, per lo meno terminologiche, dell'influenza della fenomenologia sulla filosofia della matematica di Gödel. Di fatto, gli unici testi pubblicati interamente scritti dopo il '59 furono le tre brevi note del 1972 su incompletezza, teoria degli insiemi e l'"errore filosofico" di Turing. Tuttavia, come anticipato sopra, ci sembra più sensato rivolgerci alla seconda edizione del *Dialectica paper* e del *Cantor paper* in quanto passibili di un più specifico confronto testuale con le relative prime edizioni.

18.4.1. Contenuti di pensiero e intuizione

Nel capitolo 3 abbiamo detto di come la seconda edizione (*Gödel 1972*) dell'articolo relativo alla "Dialectica interpretation" abbia subito una lunga rielaborazione (in particolare un arricchimento con una serie di nuove note) e di come nonostante tutto Gödel decise di non pubblicarla.

Le note aggiunte via via dall'autore costituiscono spesso semplicemente delle spiegazioni tecniche volte a rendere più comprensibile il sistema formale lì presentato, altre volte costituiscono invece degli approfondimenti concettuali significativi.

Una prima differenza importante che distingue questa seconda edizione dalla prima emerge nella definizione della nozione di "concetto astratto". Mentre nella prima edizione Gödel parla soltanto di concetti "che hanno come loro contenuto ... costrutti mentali", nella seconda edizione egli amplia significativamente la sua definizione dicendo che per concetti astratti si intendono concetti "che hanno come loro contenuto ... strutture di pensiero *e contenuti di pensiero*".[679]

Una seconda differenza terminologica fra le due edizioni emerge dalla considerazione del problema della noncontraddittorietà. Nella prima edizione Gödel dice, a proposito delle dimostrazioni di noncontraddittorietà in senso esteso, che:[680]

> ... in queste dimostrazioni si fa uso di intuizioni, relative a questi costrutti mentali, che non derivano dalle proprietà combinatorie (spazio-temporali) delle combinazioni di segni che rappresentano le dimostrazioni ma soltanto dai loro *significati*.

[679] Il corsivo è mio.

[680] Cf. *Gödel 1958* in *Gödel 1990*, pag. 240.

Nella seconda edizione l'autore si esprime invece nei seguenti termini:[681]

> ... nelle dimostrazioni di proposizioni relative a questi oggetti mentali sono necessarie intuizioni che non derivano da una *riflessione*[682] sulle proprietà combinatorie (spazio-temporali) dei simboli che le rappresentano, ma piuttosto da una *riflessione*[683] sui *significati* coinvolti.

Si noti in particolare come Gödel sembri sottointendere il fatto che le dimostrazioni matematiche sono fondate su atti di riflessione relativi al significato dei simboli matematici.

Una terza differenza da segnalare consiste nella nota b di *Gödel 1972*, assente in *Gödel 1958*, in cui l'autore si dilunga sulla nozione di "intuizione concreta" (ted. "Anschauung") dicendo che:[684]

> ... Ciò che Hilbert intende per "Anschauung" è sostanzialmente l'intuizione spazio-temporale di Kant ristretta tuttavia a configurazioni di un numero finito di oggetti discreti. Si noti che è l'insistenza di Hilbert sulla conoscenza *concreta* che rende la matematica finitaria così sorprendentemente debole ed *esclude molte cose che sono per chiunque altrettanto incontrovertibilmente evidenti della teoria dei numeri finitaria*.

In questo caso Gödel sembra sottolineare il fatto che gli oggetti matematici, compresi quelli astratti, costituiscono dei dati "incontrovertibilmente evidenti" sulla cui oggettività non avrebbe senso sollevare alcun dubbio.

Come si vede la seconda edizione dell'articolo, pur non costituendo una prova chiara dell'influenza delle letture husserliane svolte da Gödel, presenta comunque alcune interessanti novità terminologiche.

18.4.2. Verso un realismo critico

Il luogo forse più significativo per cercare tracce di un'eventuale ricaduta del pensiero husserliano sulla filosofia della matematica gödeliana sembra essere la seconda edizione del *Cantor paper* ed in particolare il Supplemento aggiunto in occasione della ripubblicazione di questo articolo nell'antologia di Benacerraf e Putnam.[685]

Già nel testo è rilevabile un'importante modifica sostanziale laddove Gödel risponde alla critica intuizionista della teoria degli insiemi. In *Gödel 1947* alle pagine 179-180 si legge:

[681] Cf. *Gödel 1972* in *Gödel 1990*, pag. 273.
[682] Il corsivo è mio.
[683] Il corsivo è mio.
[684] Cf. *Gödel 1972*, pag. 272.
[685] Cf. *Benacerraf et Putnam 1964*.

> ... questo atteggiamento negativo verso la teoria degli insiemi di Cantor ... è solo il risultato di una certa concezione filosofica della natura della matematica che ammette oggetti matematici solo nella misura in cui essi sono (o sono creduti essere) interpretabili come atti o costruzioni della nostra mente o per lo meno penetrabili dalla nostra intuizione ... per chi non condivide questi punto di vista esiste una fondazione soddisfacente della teoria degli insiemi di Cantor nella sua estensione originaria, cioè, la teoria assiomatica degli insiemi ...

In *Gödel 1964* il passo è notevolmente esteso e modificato, infatti a pagina 258 l'autore scrive:

> ... questo atteggiamento negativo verso la teoria degli insiemi e verso la matematica classica ... è solo il risultato di una certa concezione filosofica della natura della matematica che ammette oggetti matematici solo nella misura in cui essi sono interpretabili come nostre costruzioni o almeno possono *darsi completamente nell'intuizione matematica.* Per chi considera gli oggetti matematici come *esistenti indipendentemente dalle nostre costruzioni e dal fatto che noi ne abbiamo un'intuizione individualmente* e chi richiede solo che i concetti matematici generali debbano essere *sufficientemente chiari affinché noi siamo in grado di riconoscere la loro correttezza e la verità degli assiomi ad essi associati*, esiste, credo, una soddisfacente fondazione della teoria degli insiemi di Cantor nella sua estensione e *nel suo significato* originario, cioè la teoria assiomatica degli insiemi ...[686]

Come si può facilmente notare nella seconda edizione Gödel mantiene chiaramente una forma di realismo come quella espressa dal principio di realtà matematica (MRP) o da quello di realtà concettuale (CRP) e tuttavia aggiunge una seconda affermazione relativa alla chiarezza dei concetti matematici la quale sembra conferire al realismo gödeliano degli anni Sessanta una connotazione metafisicamente neutrale.

Questa interpretazione sembra confermata anche da altre affermazioni presenti nel Supplemento. E' proprio in questa sede che il platonismo gödeliano sembra infatti trovare la sua espressione più raffinata e filosoficamente sostenibile.

Nell'ambito della discussione del fatto che la dimostrazione di indipendenza dell'ipotesi del continuo non implica che il problema del continuo sia perciò privo di senso, Gödel propone uno stringente raffronto fra geometria e teoria degli insiemi volto a palesare la totale asimmetria delle due situazioni. Egli rileva che, mentre gli oggetti della geometria possono avere un significa-

[686] Il corsivo è mio.

to fisico, gli oggetti della teoria degli insiemi non possono invece rivendicare alcun significato di tipo empirico. Tuttavia, osserva Gödel:[687]

> ... *a dispetto della loro lontananza dall'esperienza sensibile, noi abbiamo qualcosa come una percezione anche degli oggetti della teoria degli insiemi, come si vede dal fatto che gli assiomi ci si impongono come veri.* Non vedo alcuna ragione per cui dovremmo avere meno fiducia in questo tipo di percezione, cioè nell'intuizione matematica, che nell'intuizione sensibile ...[688]

L'autore sottolinea inoltre che i paradossi insiemistici non dovrebbero preoccupare più dei pur normali errori percettivi, richiamando in qualche modo l'osservazione presente nei *Carnap papers*.

Nel paragrafo immediatamente successivo Gödel approfondisce la nozione di intuizione matematica lungo linee che ricordano molto l'intuizione categoriale husserliana in particolare per quanto riguarda il fatto che gli atti categoriali sono atti fondati. A pagina 268 di *Gödel 1964* leggiamo infatti:

> Si dovrebbe notare che l'intuizione matematica non necessariamente va concepita come una facoltà che fornisce una conoscenza *immediata* dei suoi oggetti. Piuttosto sembra che, come nel caso dell'esperienza fisica, noi *formiamo* le idee anche di quegli oggetti sulla base di qualcos'altro che *è* dato immediatamente.

Si osservi che in modo del tutto nuovo, Gödel qui parla per la prima volta del fatto che noi "formiamo le idee" degli oggetti matematici. L'idea di una *costituzione* dell'oggetto matematico è del tutto assente da ogni altro lavoro filosofico gödeliano e non può non farci pensare al fatto che per Husserl gli oggetti categoriali si danno tramite una sintesi attiva in atti fondati di riflessione, astrazione, ecc.

Il resto del paragrafo citato sopra ricorda a sua volta uno degli elementi fondamentali della filosofia husserliana, ossia la sospensione dell'atteggiamento naturalistico che sta alla base della cosiddetta *riduzione fenomenologica*. In esso infatti Gödel dice:[689]

> Evidentemente il dato alla base della matematica è strettamente correlato agli elementi astratti contenuti nelle nostre idee empiriche. Tuttavia, [da ciò] *non segue affatto che i dati di questo secondo tipo, per il fatto di non poter essere associati ad azioni di certe cose sui nostri organi di senso, siano qualcosa di puramente soggettivo* ...[690]

[687] Cf. *Gödel 1964*, in *Gödel 1990*, pag. 268

[688] Il corsivo è mio.

[689] Cf. *Gödel 1964* in *Gödel 1990*, pag. 268.

[690] Il corsivo è mio.

Il penultimo paragrafo del Supplemento sembra quello più palesemente innovativo nell'ambito delle riflessioni filosofiche gödeliane e, forse, il più rivelatore di una possibile influenza della fenomenologia. Qui troviamo infatti una chiara presa di distanza dell'autore da quella forma ingenua di realismo che, a nostro parere, caratterizzava il suo punto di vista negli anni Quaranta. A pagina 268 di *Gödel 1964* si può infatti leggere:

> *... la questione dell'esistenza oggettiva degli oggetti dell'intuizione matematica (che, incidentalmente, è un'esatta replica della questione dell'esistenza oggettiva del mondo esterno) non è decisiva per il problema qui in discussione. Il mero fatto psicologico* dell'esistenza *di un'intuizione* che sia *sufficientemente chiara* per produrre gli assiomi della teoria degli insiemi ed una successione aperta di loro estensioni è sufficiente per *dare significato* alla questione della verità o falsità di proposizioni come l'ipotesi del continuo di Cantor.[691]

Come osservato in *Hauser 2002a*, mentre nella concezione platonista della matematica esposta in *Gödel 1947*, la determinatezza di CH era una conseguenza dell'esistenza di un dominio di oggetti matematici, nel 1964 Gödel sembra in qualche modo suggerire di sospendere il giudizio sulle tradizionali dispute ontologiche e di guardare alla determinatezza dell'ipotesi del continuo come ad una questione epistemologica. Si tratterebbe insomma di limitarsi a considerare l'oggettività delle nozioni matematiche cui di volta in volta si deve far riferimento, tralasciando invece le questioni relative alla natura e dall'esistenza assoluta degli oggetti denotati da queste nozioni.

[691] Il corsivo è mio.

Considerazioni conclusive

Dalla lettura dei lavori filosofici gödeliani, da noi scelti sulla base di una loro vicinanza cronologica e omogeneità tematica, sono emerse le seguenti linee di sviluppo della riflessione dell'autore.

Finitismo, intuizionismo e costruttività

Gli inediti degli anni Trenta, in particolare, la *Cambridge lecture* e il *Vortrag bei Zilsel*, sono accomunati da una riflessione fortemente legata al contesto delle ricerche metamatematiche di matrice hilbertiana e intuizionista. Esse trovano infatti un naturale completamento nella conferenza del 1941 sulla prima versione della "Dialectica interpretation".

Abbiamo visto che gli interessi fondazionali e filosofici che dominano le riflessioni gödeliane degli anni Trenta riguardano principalmente:

- l'analisi delle conseguenze fondazionali dei risultati di incompletezza;
- il problema della noncontraddittorietà;
- l'analisi critica della dimostrazione di Gentzen;
- il tentativo di precisazione del finitismo hilbertiano;
- l'analisi critica del costruttivismo intuizionista.

In questi primi scritti filosofici sono presenti alcuni elementi che contraddistingueranno anche il pensiero gödeliano dei decenni successivi: il problema delle definizioni impredicative, il confronto fra teoria degli insiemi e teoria dei tipi ed infine il tentativo di caratterizzare in modo originale e autonomo la nozione di costruttività.

Non mancano per altro elementi di unicità in questi primi contributi. Ne è un esempio l'affermazione fortemente critica nei confronti del platonismo in matematica presente nella *Cambridge lecture* la quale, a nostro parere, può essere spiegata sulla base della vicinanza dell'autore, nei primi anni Trenta, all'ambiente e ad alcuni dei personaggi più influenti del Circolo di Vienna.

Realtà, esistenza e oggettualità

Negli scritti degli anni Quaranta emerge un quadro molto diverso da quello saldamente ancorato alle tematiche fondazionali e all'approccio hilbertiano tipiche del decennio precedente.

Dalla lettura del *Russell paper* si evincono le linee fondamentali della riflessione gödeliana anche dei decenni successivi (realismo concettuale, analogia fra matematica e scienze empiriche, analiticità) e d'altro canto, grazie ai *Kant papers*, si riesce a mettere a fuoco il significato metafisico ingenuo della nozione di oggetto empirico e forse, sulla base dell'analogia fra oggetti fisici e matematici, anche di quella di oggetto matematico.

In questo decennio Gödel sembra far riferimento ad uno schema ontologico ed epistemologico *uniforme* in quanto pare assegnare una realtà ontologicamente forte sia agli oggetti matematici che a quelli empirici e attribuire sia alla conoscenza matematica che a quella empirica una capacità di avvicinarsi in modo progressivo e *per passi* alle rispettive realtà.

Gli oggetti di esperienza sembrano perciò visti da Gödel come trascendenti sì, ma non in linea di principio. Si ha cioè l'impressione che per il nostro autore gli oggetti della matematica e della fisica siano dotati ad un tempo di una *trascendenza* dovuta al fatto che la nostra conoscenza di essi non è ancora completamente adeguata, ma anche di un'*accessibilità* garantita dalla comprensione matematica (l'intuizione) e, rispettivamente, dalla percezione sensibile.

Negli anni Quaranta trova per la prima volta espressione compiuta il programma di Gödel nella prima edizione del *Cantor paper*, ma in parte anche nel *Russell paper*. In queste prime formulazioni il programma viene ricondotto principalmente al problema dell'irresolubilità di importanti questioni insiemistiche come l'ipotesi del continuo, mentre il nesso con i teoremi di incompletezza emergerà in modo esplicito e sistematico solo nel decennio successivo.

Fondare il realismo in matematica

Negli inediti degli anni Cinquanta abbiamo rilevato alcuni elementi di novità nel merito e nel metodo delle riflessioni fondazionali del nostro autore. Alcune riguardano l'atteggiamento, per la prima volta genuinamente filosofico, che egli assume nell'ambito della critica e del tentativo di confutazione di costruttivismo, nominalismo e convenzionalismo matematico. Altre concernono invece lo specifico carattere del realismo gödeliano che passa da una forma *filosoficamente ingenua* ad una più precisa e circostanziata sostenuta per altro da importanti argomentazioni.

Un'ulteriore novità dei testi filosofici di questi anni riguarda l'obiettivo polemico cui essi sono rivolti, che per la prima volta non è né il formalismo hilbertiano né l'intuizionismo brouweriano ma diventa in primo luogo il nominalismo di matrice positivista, in particolare nel *Carnap paper*.

La figura di Hilbert e la scuola hilbertiana restano un punto di riferimento costante, ma considerato sempre meno con toni polemici e sempre più anche per i suoi risultati parziali e per i suoi pregi. In tal senso l'articolo del 1958 sulla "Dialectica interpretation" costituisce un momento di vero e proprio recupero dell'approccio hilbertiano seppur in una forma liberalizzata. In *Gödel 1958* l'autore affronta mediante un'estensione del punto di vista finitario il problema della noncontraddittorietà dell'aritmetica di Peano. E si tenga ben presente che il problema della noncontraddittorietà è continuamente evocato nel *Carnap paper* in quanto condizione necessaria di ogni tentativo di realizzazione del programma sintattico.

Nella prima edizione del *Dialectica paper* troviamo anche l'importante distinzione fra due elementi del finitismo hilbertiano, cioè, l'elemento costruttivo e quello specificamente finitista. In quella sede Gödel propone di estendere il finitismo eliminando la seconda delle due condizioni e mantenendo invece l'elemento costruttivo. Nell'ambito di questo finitismo allargato l'autore prende nuovamente in considerazione la dimostrazione di Gentzen discutendone il grado di evidenza e plausibilità.

Il fatto che Gödel abbia deciso, verso la fine degli anni Cinquanta, di pubblicare un'idea da lui concepita almeno diciassette anni prima[692] e per di più inserendola in un contesto fondazionale vicino a quello hilbertiano, non ci sembra del tutto casuale ma al contrario ci pare in linea con il progressivo spostamento di obiettivo polemico avvenuto nel corso di questo decennio.

La mancata pubblicazione del *Carnap paper* non andrebbe invece vista esclusivamente come un "punto morto" della riflessione gödeliana sulla natura degli oggetti e della conoscenza matematica.[693] In un certo senso questo articolo, proprio per il fatto di esser stato scritto e riscritto, sembra aver rappresentato per Gödel una sorta di laboratorio filosofico in cui mettere alla prova non solo le idee a suo avviso scorrette dei neo-positivisti, ma anche

[692]Cf. *Gödel *1941* in *Gödel 1995*.
[693]Cf. *Kennedy et van Atten 2003*.

le proprie. In tal senso sembra ragionevole congetturare che alla fine degli anni Cinquanta Gödel possa aver raggiunto una maturità intellettuale che lo portò a cercare nella tradizione filosofica "strictu sensu" un contesto teorico sistematico in cui tentare di collocare e magari fondare le proprie idee sparse.

Sembra dunque possibile affermare, anche sulla base di quanto detto a proposito del rapporto fra Gödel e Husserl, che il realismo gödeliano abbia subito una fase di problematizzazione nel corso degli anni Cinquanta e sia approdato nel decennio successivo, forse anche sotto l'influenza della fenomenologia, ad una forma raffinata, filosoficamente calibrata e metafisicamente neutrale.

Un tale approccio alla filosofia della matematica ed in particolare una tale forma critica e consapevole di realismo concettuale sembrerebbe per altro rendere più legittima e sostenibile l'idea di un'estensione sistematica della teoria degli insiemi mediante nuovi assiomi, che è poi il cuore del programma filosofico e fondazionale proposto da Gödel.

Bibliografia

Ackermann, Wilhelm

1924 Begründung des “tertium non datur” mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, *Mathematische Annalen 93*, 1-36.

1928 Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Mathematische Annalen 99*, 118-133.

1951 Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse, *Mathematische Zeitschrift 53*, 403-413.

Aczel, Peter

1988 *Non-wellfounded sets*, CSLI lecture notes 14, Center for the Study of Language and Information, Stanford.

Adams, Robert M.

1995 Introductory note to *Gödel *1970,* in *Gödel 1995,* 388-402.

Addison, John, Jens Fenstad, Raphael Hoegh-Krøhn e Tom Lindstrøm

1965 (a cura di) *The theory of models. Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*, North-Holland, Amsterdam.

Anderson, C.Anthony

1990 Some emendations to Gödel’s ontological proof, *Faith and philosophy 7*, 291-303.

Anderson, C.Anthony e Michael Gettings

1996 Gödel’s ontological proof revisited, in *Hájek 1997*, 167-172.

Arrigoni, Tatiana

2002 Il platonismo di Gödel alla luce della filosofia di E.Husserl, *Epistemologia XXV*, 281-310.

Artëmov, Sergei

1994 Logic of proofs, *Annals of pure and applied logic 67*, 29-59.

Barwise, Jon

1977 (a cura di) *Handbook of mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam.

Barwise, Jon e Lawrence Moss

1996 *Vicious circles: On the Mathematics of Non-wellfounded Phenomena*, CSLI lecture notes 60, Center for the Study of Language and Information, Stanford.

Becker, Oskar

1927 Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene, in *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung 8,* 441-810.

1930 Zur Logik der Modalitäten, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung 11,* 497-584.

Benacerraf, Paul e Hilary Putnam

1964 (a cura di) *Philosophy of mathematics: Selected readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Bernays, Paul

1922 Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Mathematik, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 31*, 10-19.

1923 Erwiederung auf die Note von Herrn Aloys Müller: "Über Zahlen als Zeichen", *Mathematische Annalen 90*, 159-163.

1926 Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der *Principia Mathematica*, *Mathematische Zeitschrift 25*, 305-320.

1935 Sur le platonisme dans le mathématiques, *L'enseignement mathématique 34,* 52-69.

1937 A system of axiomatic set theory. Part I, *The journal of symbolic logic 2,* 65-77.

1941 Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration, in *Gonseth 1941*, 144-152.

1954 Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung, *Revue internationale de philosophie 8*, 9-13.

1958 *Axiomatic set theory,* North-Holland, Amsterdam.

1976 *Sets and classes,* a cura di Gert H. Müller, North-Holland, Amsterdam.

Boolos, George

1979 *The unprovability of consistency. An essay in modal logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

1993 *The logic of provability*, Cambridge University Press, Cambridge.

1995 Introductory note to *Gödel *1951*, in *Gödel 1995*, 290-304.

Borel, Emile

1898 *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris.

Brouwer, Luitzen E. J.

1907 *Over de grondslagen der wiskunde*, Maas & van Suchtelen, Amsterdam; trad. inglese di A. Heyting in *Brouwer 1975*, 11-101.

1923 Über die Bedeutung des Sätzes von ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, *Journal of mathematics CLIV;* trad. inglese di A. Heyting in *Brouwer 1975,* 268-274.

1975 *Collected works,* a cura di Arend Heyting, volume 1, North-Holland, Amsterdam.

1981 *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, a cura di Dirk van Dalen, Cambridge University Press, Cambridge.

1983 *Lezioni sull'intuizionismo,* trad. italiana di *Brouwer 1981* di Sergio Bernini, Boringhieri, Torino.

Buchholz, Wilfried, Solomon Feferman, Wolfram Pohlers e Wilfried Sieg

1981 *Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: recent proof-theoretical studies*, Springer, Berlin.

Buldt, Bern, Werner DePauli, Carsten Klein, Eckehart Köhler e altri

2002 (a cura di) *Kurt Gödel. Wahrheit & Beweisbarkeit. Band I. Dukumente und historische Analysen*, öbv et hpt, Wien.

2002a (a cura di) *Kurt Gödel. Wahrheit & Beweisbarkeit. Band II. Kompendium zum Werk*, öbv et hpt, Wien.

Cantor, Georg

1874 Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 77*, 258-262; rist. in *Cantor 1932*, 115-118.

1878 Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 84*, 242-258; rist. in *Cantor 1932*, 119-133.

1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, a cura di Ernst Zermelo, Springer, Berlin.

Carnap, Rudolf

1931 Die logizistische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis 2*, 91-105; trad. inglese in *Benacerraf et Putnam 1964*.

1934 Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik, *Monatshefte für Mathematik und Physik 41,* 263-284.

1934a *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien.

1935 Formalwissenschaft und Realwissenschaft, *Erkenntnis 5*, 30-37.

1935a *Le problème de la logique de la science. Science formelle et science du réel*, Actualités scientifiques et industrielles 291, Hermann et Cie, Paris.

1937 *The logical syntax of language*, Kegan Paul, London.

1961 *La sintassi logica del linguaggio*, trad. italiana di *Carnap 1934* a cura di A. Pasquinelli, Silva, Milano.

Casti, John L. e Werner De Pauli

2000 *Gödel: a life of logic*, Perseus Publishing, Cambridge (MA).

Casari, Ettore

1960 *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano.

1964 *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

1981 *La logica del Novecento*, Loescher, Torino.

1997 *Introduzione alla logica*, UTET, Torino.

Church, Alonzo

1932 A set of postulates for the foundations of logic, *Annals of mathematics 33,* 346-366.

1933 A set of postulates for the foundations of logic (II), *Annals of mathematics 34,* 839-864.

1935 A proof of freedom from contradiction, *Proceedings of the National Academy of Science USA 21,* 275-281.

1936 An unsolvable problem of elementary number theory, *American journal of mathematics 58*, 345-363; ristampato in *Davis 1965*, 88-107.

Cohen, Paul

1963 The independence of the continuum hypothesis I, *Proceedings of the National Academy of Science USA 50,* 1143-1148.

1964 The independence of the continuum hypothesis II, *Proceedings of the National Academy of Science USA 51,* 105-110.

1966 *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, New York.

1971 Comments on the foundations of set theory, in *Scott 1971*, 9-15.

Crossley, John e Michael Dummett

1965 (a cura di) *Formal systems and recursive functions*, North-Holland, Amsterdam.

Dales, Harold G. e Hugh Woodin

1987 *An introduction to independence for analysts*, Cambridge University Press, New York.

Dalla Chiara Scabia, Maria Luisa

1968 *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari,* Feltrinelli, Milano.

Davis, Martin

1965 *The undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*, Raven Press, Hewlett (NY).

Dawson, John W.

1986 A Gödel's chronology, in *Gödel 1986,* 37-43.

1995 The *Nachlass* of Kurt Gödel: an overview, in *Gödel 1995,* 1-6.

1997 *Logical dilemmas. The life and work of Kurt Gödel*, A K Peters, Wellesley (MA).

De Giorgi, Ennio e Marco Forti

1985 Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica, *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 79*, 55-67.

Dekker, Jakob C.E.

1962 (a cura di) *Recursive function theory*, Proceedings of symposia in pure mathematics, vol.5, American Mathematical Society, Providence (RI).

Devlin, Keith J.

1973 *Aspects of constructibility*, Springer, Berlin.

1977 Constructibility, in *Barwise 1977*, 453-489.

1984 *Constructibility*, Springer, Berlin.

Devlin, Keith e Håvard Johnsbråten

1974 *The Souslin problem*, Springer, Berlin.

Drake, Frank R.

1974 *Set theory. An introduction to large cardinals*, North-Holland, Amsterdam.

Drake, Frank R. e John K.Truss

1988 (a cura di) *Logic Colloquium '86*, North-Holland, Amsterdam.

Dreben, Burton e Jean van Heijenoort

1986 Introductory note to *Gödel 1929, 1930* e *1930a,* in *Gödel 1986,* 44-59.

Ellentuck, Erik

1975 Gödel's square axioms for the continuum, *Mathematische Annalen 216,* 29-33.

Feferman, Solomon

1962 Transfinite recursive progressions of axiomatic theories, *The journal of symbolic logic 27*, 259-316.

1986 Gödel's life and work, *Gödel 1986*, 1-36.

1990 Introductory note to *Gödel 1972a,* in *Gödel 1990,* 281-287.

1995 Introductory note to *Gödel *1933o*, in *Gödel 1995*, 36-44; nota introduttiva a *Gödel *1933f.*

1996 Gödel's program for new axioms: Why, where, how and what?, in *Hájek 1997.*

1998 *In the light of logic*, Oxford University Press, New York.

1999 Does mathematics need new axioms?, *American mathematical monthly 106*, 99-111.

2000 Why the program for new axioms need to be questioned, *The bulletin of symbolic logic 6*, 401-413.

Feferman, Solomon e Robert M. Solovay

1990 Introductory note to *Gödel 1972a,* in *Gödel 1990,* 287-292.

Fitting, Melvin

2002 *Types, tableaus and Gödel's God*, Kluwer, Dordrecht.

Føllesdal, Dagfinn

1995 Gödel and Husserl, in *Hintikka 1995*, 427-445.

1995a Introductory note to *Gödel *1961/?*, in *Gödel 1995*, 364-373.

Forti, Marco e Furio Honsell

2000 Positive qualities and the ontological argument, *Ricerche di matematica XLIX*, 61-78.

Fraenkel, Abraham A.

1919 *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin.

1922 Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschft,* 253-257.

1927 *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Teubner, Leipzig.

Friedman, Harvey M.

2000 Normal mathematics will need new axioms, *The bulletin of symbolic logic 6*, 434-446

Gallin, Daniel

1975 *Intensional and higher-order modal logic*, North-Holland, Amsterdam.

Gentzen, Gerhard

1934 Untersuchungen über das logische Schließen, *Mathematische Zeitschrift 39*, 176-210, 405-431; trad. inglese in *Gentzen 1969*, 68-131.

1936 Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen 112*, 493-565; trad. inglese in *Gentzen 1969*, 132-312.

1969 *The collected papers of Gerhard Gentzen*, a cura di M.E.Szabo, North-Holland, Amsterdam.

Glivenko, Valerii Ivanovich

1929 Sur quelques points de la logique de M.Brouwer, *Académie royal de Belgique, Bulletin de la classe des sciences 15*, 183-188.

Gödel, Kurt

1929 *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, tesi di dottorato, università di Vienna.

1930 Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik 37*, 349-360.

1930a Über die Vollständigkeit des Logikkalküls, *Die Naturwissenschaften 18*, 1068.

1930b Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien 67*, 214-215.

*1930c Vortrag über die Vollständigkeit des Funktionenkalküls, conferenza inedita, Königsberg; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

1931 Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, 173-198.

1931a Diskussion zur Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis 2*, 147-151.

1931b Recensione di *Hilbert 1931*, *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 1*, 260.

1931c Recensione di *Becker 1930, Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, 5.

*1931d Über unentscheidbare Sätze, note dal *Nachlass*; pubblicate postume in *Gödel 1995.*

1932 Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien 69*, 65-66.

1932a Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der teoretischen Logik, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 2*, 27-28.

1932b Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 3,* 12-13.

1932c Eine Eigenschaft der Realisierungen des Aussagenkalküls, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 3,* 20-21.

1932d Recensione di *Skolem 1931*, *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 2,* 3.

1932e Recensione di *Carnap 1931*, *ibid. 2,* 321.

1932f Recensione di *Heyting 1931*, *ibid. 2,* 321-322.

1932g Recensione di *von Neumann 1931*, *ibid. 2,* 322.

1932h Recensione di *Church 1932*, *ibid. 4*, 145-146.

1932i Recensione di *Kalmár 1932, ibid. 4,* 146.

1932l Recensione di *Skolem 1932, ibid. 4*, 385.

1933 Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4,* 9-10.

1933a Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4,* 34-38.

1933b Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4,* 39-40.

1933c Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik 40,* 433-443.

1933d Recensione di *Lewis 1932, Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 5,* 337-338.

1933e Recensione di *Kalmár 1933, ibid. 6,* 385-386.

*1933f The present situation in the foundations of mathematics, conferenza inedita, Princeton; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

1934 *On undecidable propositions of formal mathematical systems,* note manoscritte da S.C.Kleene e J.B.Rosser; pubblicato in *Davis 1965*, 39-74.

1934a Recensione di *Skolem 1933*, *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 7,* 97-98.

1934b Recensione di *Skolem 1933a*, *ibid. 7,* 193-194.

1935 Recensione di *Skolem 1934, ibid. 10,* 49.

1935a Recensione di *Carnap 1934, ibid. 11,* 1.

1935b Recensione di *Kalmár 1934, ibid. 11,* 3-4.

1936 Über die Länge von Beweisen, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 7,* 6.

1936a Recensione di *Church 1935, Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 12,* 241-242.

1938 The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Science USA 24,* 556-557.

*1938a Vortrag bei Zilsel, conferenza inedita; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

1939 The consistency of the generalized continuum hypothesis, *Bulletin of the American Mathematical Society 45,* 93.

1939a Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Science USA 25*, 220-224.

*1939b Vortrag Göttingen, conferenza inedita, Göttingen; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

*1939c [Undecidable diophantine propositions], note dal *Nachlass*; pubblicate postume in *Gödel 1995.*

1940 *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of mathematics studies, vol.3, Princeton University Press, Princeton.

*1940a Lecture on the consistency of the continuum hypothesis; conferenza inedita, Brown University; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

*1941 In what sense is intuitionistic logic constructive?, conferenza inedita, Yale University; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

1944 Russell's mathematical logic, in *Schlipp 1944*, 123-153.

1946 Remarks for the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics, in *Davis 1965*, 84-88.

1947 What is Cantor's continuum problem?, *American mathematical monthly 54*, 515-525.

1949a A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy, in *Schlipp 1949*, 555-562.

*1946/49-B2 Some observations about the relationship between theory of relativity and Kantian philosophy, articolo preparatorio; pubblicato postumo in *Gödel 1995.*

*1946/49-C1 Some observations about the relationship between theory of relativity and Kantian philosophy, articolo preparatorio; pubblicato postumo in *Gödel 1995.*

*1951 Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications, conferenza inedita, *Gibbs lecture*; pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

*1953/59 Is mathematics syntax of language?, III, note dal *Nachlass*, pubblicate postume in *Gödel 1995.*

*1953/59a Is mathematics syntax of language?, V, note dal *Nachlass*, pubblicate postume in *Gödel 1995.*

*1953/59b Is mathematics syntax of language?, II, note dal *Nachlass*, pubblicate postume in *Rodríguez-Consuegra 1995.*

*1953/59c Is mathematics syntax of language?, VI, note dal *Nachlass*, pubblicate postume in *Rodríguez-Consuegra 1995.*

1958 Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica 12*, 280-287.

*1961/? The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, note dal *Nachlass*; pubblicate postume in *Gödel 1995.*

1964 What is Cantor's continuum problem?, versione rivista e ampliata di *Gödel 1947* in *Benacerraf et Putnam 1964,* 258-273.

*1970 Ontological proof, nota dal *Nachlass*, pubblicata postuma in *Gödel 1995.*

*1970a Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$, note dal *Nachlass*; pubblicate postume in *Gödel 1995.*

*1970b A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth, note dal *Nachlass*, pubblicate postume in *Gödel 1995.*

*1970c [Lettera a Tarski non spedita], documento del *Nachlass*, pubblicato postumo in *Gödel 1995.*

1972 On an extention of finitary mathematics which has not yet been used, versione rivista e arricchita di *Gödel 1958*; pubblicato postumo in *Gödel 1990.*

1972a Some remarks on the undecidability results, in *Gödel 1990,* 305-306.

1986 *Collected works. Volume I,* a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson, Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, Jean van Heijenoort, Oxford University Press, New York e Oxford.

1990 *Collected works. Volume II,* a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson, Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, Jean van Heijenoort, Oxford University Press, New York e Oxford.

1995 *Collected works. Volume III. Unpublished essays and lectures,* a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson, Warren Goldfarb, Charles Parsons, Robert M. Solovay, Oxford University Press, New York e Oxford.

2003 *Collected works. Volume IV. Correspondence A-G*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson, Warren Goldfarb, Charles Parsons, Wilfried Sieg, Oxford University Press, New York e Oxford.

2003a *Collected works. Volume V. Correspondence H-Z*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson, Warren Goldfarb, Charles Parsons, Wilfried Sieg, Oxford University Press, New York e Oxford.

Goldfarb, Warren

1995 Introductory note to *Gödel *1930c*, in *Gödel 1995*, 13-15.

1995a Introductory note to *Gödel *1953/59,*1953/59a*, in *Gödel 1995*, 324-334.

Gonseth, Ferdinand

1941 (a cura di) *Les entretiens de Zurich, 6-9 décembre 1938*, Leeman, Zurich.

Hahn, Hans

1935 *Logique, mathématiques et connaissance de la réalité*, Hermann et Cie, Paris.

Hájek, Petr

1996 Magari and others on Gödel's ontological proof, in *Ursini et Aglianò 1996,* 125-135.

1997 (a cura di) *Gödel '96,* Springer, Berlin.

Hauser, Kai

2001 Objectivity over objects: a case study in theory formation, *Synthese 128*, 245-285.

2002 Is Cantor's continuum problem inherently vague?, *Philosophia mathematica 10*, 257-285.

2002a Gödel's program revisited, preprint.

Herbrand, Jacques

1930 *Recherches sur la théorie de la démonstration*, tesi di dottorato; trad. inglese in *Herbrand 1971.*

1930a Les bases de la logique hilbertienne, *Revue de métaphysique et de morale 37*, 243-255.

1931 Sur la non-contradiction de l'arithmétique, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 166,* 1-8; trad. inglese in *Herbrand 1971.*

1971 *Logical writings,* a cura di W.Goldfarb, Reidel, Dordrecht.

Heyting, Arend

1930 Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse,* 42-56.

1930a Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse,* 57-71, 158-169.

1931 Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, in *Erkenntnis 2,* 106-115; trad. inglese di Erna Putnam in *Benacerraf et Putnam 1964,* 42-49.

1934 *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie,* Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 3, Springer, Berlin.

1956 *Intuitionism. An introduction*, North-Holland, Amsterdam.

1959 (a cura di) *Constructivity in mathematics. Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957* , North-Holland, Amsterdam.

Hilbert, David

1900 Mathematische Probleme, *Göttingen Nachrichten*, 253-297.

1922 Neubegründung der Mathematik (Erste Mittleilung), *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1*, 157-177.

1923 Die logischen Grundlagen der Mathematik, *Mathematische Annalen 88*, 151-165.

1926 Über das Unendliche, *Mathematische Annalen 95*, 161-190; trad. inglese in *van Heijenoort 1967.*

1928 Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6*, 65-85; trad. inglese in *van Heijenoort 1967.*

1929 Probleme der Grundlegung der Mathematik, *Atti del convegno internazionale dei matematici, Bologna 3-10 settembre 1928*, Zanichelli, Bologna; rist. in *Mathematische Annalen 103*, 1-9.

1931 Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre, *Mathematische Annalen 104,* 485-494; rist. in *Hilbert 1935.*

1935 *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin.

1978 *Ricerche sui fondamenti della matematica;* opere scelte dal corpus hilbertiano tradotte in italiano da M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli.

Hilbert, David e Wilhelm Ackermann

1928 *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin.

1938 *Grundzüge der theoretischen Logik*, II edizione rivista di *Hilbert et Ackermann 1928*, Springer, Berlin.

1950 *Principles of mathematical logic*, trad. inglese *Hilbert et Ackermann 1938*, Chelsea, New York.

Hilbert, David e Paul Bernays

1934 *Grundlagen der Mathematik*, volume I, Springer, Berlin.

1939 *Grundlagen der Mathematik*, volume II, Springer, Berlin.

Hindley, Roger J.

1997 *Basic Simple Type Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

Hindley, Roger J. e Jonathan P. Seldin

1986 *Introduction to Combinatorics and λ-Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hintikka, Jaakko

1995 *From Dedekind to Gödel: essays on the developments of the foundations of mathematics*, Reidel, Dordrecht.

2000 *On Gödel*, Wadsworth Publishing, Belmont (CA).

Hosoi, Tsutomu e Hiroakira Ono

1973 Intermediate propositional logics (a survey), *Journal of Tsuda College 5,* 67-82.

Howard, William A.

1968 Functional interpretation of bar induction by bar recursion, *Compositio mathematica 20,* 107-124.

1970 Assignment of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type, in *Myhill et alii 1970,* 443-458.

Hughes, G. E. e M. J. Cresswell

1996 *A new introduction to modal logic*, Routledge, London and New York.

Husserl, Edmund

1900/1 *Logische Untersuchungen,* Voll. I-II, Max Niemeyer, Halle; ed. crit. in *Husserl 1950-*, voll. XVIII-XX.

1913 *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologische Philosophie,* Max Niemeyer, Halle; ed. crit. in *Husserl 1950-*, voll. III-V.

1918 *Logik und allgemeine Wissenschaftslehre*, in *Husserl 1950-*, vol. XXX.

1929 *Formale und transzendentale Logik,* Max Niemeyer, Halle; ed. crit. in *Husserl 1950-*, vol. XVII.

1931 *Cartesianische Meditationen*, Max Niemeyer, Halle; ed. crit. in *Husserl 1950-*, vol. I.

1934/37 *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*, Martinus Nijhoff, Den Haag; ed. crit. in *Husserl 1950-*, vol. XXIX.

1950- Husserliana. Edmund Husserl. Gesammelte Werke, Martinus Nijhoff, Den Haag; dal 1988, Kluwer, Dordrecht.

Jech, Thomas

1973 Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals, *Annals of mathematical logic 5,* 165-198.

1973a *The axiom of choice,* North-Holland, Amsterdam.

1974 (a cura di) *Axiomatic set theory,* Proceedings of symposia in pure mathematics, vol.13, parte 2, American Mathematical Society, Providence (RI).

1977 About the axiom of choice, in *Barwise 1977,* 345-370.

1978 *Set theory*, Academic Press, New York.

1997 *Set theory*, seconda edizione di *Jech 1978*, Springer, Berlin.

2003 *Set theory*, terza edizione di *Jech 1978*, Springer, Berlin.

Jeroslow, Robert G.

1975 Experimental logics and Δ_2^0-theories, *Journal of philosophical logic 4*, 253-267.

Johansson, Ingebrigt

1936 Der Minimalkalkül, ein riduzierten intuitionistischer Formalismus, *Compositio mathematica 4*, 119-136.

Kalmár, Lászlo

1932 Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae 5,* 222-236.

1933 Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Mathematische Annalen 108,* 466-484.

1934 Über einen Löwenheimschen Satz, *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae 7,* 112-121.

Kanamori, Akihiro

1994 *The Higher Infinite,* Springer, Berlin.

Kanamori, Akihiro e Menachem Magidor

1978 The evolution of large cardinal axioms in set theory, in *Müller et Scott 1978*, 99-275.

Kant, Immanuel

1781 *Kritik der reinen Vernunft*, Hartknoch, Riga; ed. crit. in *Kant 1902-*, vol. IV.

1783 *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, Hartknoch, Riga; ed. crit. in *Kant 1902-*, vol. IV.

1787 *Kritik der reinen Vernunft*, seconda edizione di *Kant 1781*, Hartknoch, Riga; ed. crit. in *Kant 1902-*, vol. III.

1900- *Gesammelte Schriften*, Akademieausgabe, Berlin.

1945 *Prolegomeni ad ogni metafisica futura che vorrà presentarsi come scienza*, trad. italiana di *Kant 1783* di P. Martinetti, Paravia, Torino.

1989 *Critica della ragion pura*, trad. italiana di *Kant 1787* a cura di Pietro Chiodi, UTET, Torino.

Keisler, H. Jerome e Alfred Tarski

1964 From accessible to inaccessible cardinals, *Fundamenta mathematicae 53*, 225-308.

Kleene, Stephen C.

1936 General recursive functions of natural number, *Mathematische Annalen 112*, 727-742.

1952 *Introduction to metamathematics*, North-Holland, Amsterdam; Van Nostrand, New York.

1960 Realizability and Shaning's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences, *Logique et analyse 3,* 154-165.

Kolmogorov, Andrei

1925 On the principle of the excluded middle (originale in russo), *Matematicheskii sbornik 32,* 646-667; trad. inglese di Jean van Heijenoort in *van Heijenoort 1967,* 414-437.

1932 Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Mathematische Zeitschrift 35,* 58-65.

König, Julius

1905 Zum Kontinuum-Problem, *Mathematische Annalen 60,* 177-180, 462.

Kreisel, Georg

1958 Hilbert's programme, *Dialectica 12,* 346-372; versione rivista in *Benacerraf et Putnam 1964*.

1959 Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types, in *Heyting 1959,* 101-128.

1959a Inessential extention of Heyting's arithmetic by means of functional of finite type (abstract), *The journal of symbolic logic 24,* 284.

1959b Inessential extentions of intuitionistic analysis by functionals of finite type, *The journal of symbolic logic 24,* 284-285.

1960 Ordinal logic and the characterization of informal concepts of proof, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 14-21 August 1958*, Cambridge University Press, Cambridge, 289-299.

1965 *Mathematical logic. Lectures on modern mathematics*, a cura di T.L.Saaty, Wiley, New York, vol.3, 95-195.

1967 Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics?, in *Schoenmann 1967*, 201-272.

1987 Gödel's excursions into intuitionistic logic, in *Weingartner et Schmetterer 1987,* 65-186.

Kreisel, Georg e Azriel Levy

1968 Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, *14*, 97-142.

Kreisel, Georg e Gaisi Takeuti

1974 Formally self-referential propositions in cut-free classical analysis and related systems, *Dissertationes mathematicae 118*, 1-50.

Krivine, Jean-Louis

1971 *Théorie axiomatique des ensembles,* Riedel, Dordrecht.

Kunen, Kenneth

1970 Some applications of iterated ultrapowers in set theory, *Annals of mathematical logic 1,* 179-227.

1980 *Set theory: An introduction to independence proofs,* North-Holland, Amsterdam.

Kuroda, Sigekatu

1951 Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik, *Nagoya mathematical journal 2,* 35-47.

Lake, John

1975 Comparing type theory and set theory, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 21*, 355-356.

Leibniz, Gottfried Wilhelm

1923- *Sämtliche Schriften und Briefe*, Akademie Verlag, Darmstadt; poi Akademie der Wissenschaften, Berlin.

1967 *Scritti filosofici*, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino.

Lewis, Clarence I.

1932 Alternative systems of logic, *The monist 42,* 481-507.

Löb, Martin H.

1955 Solution of a problem of Leon Henkin, *The journal of symbolic logic 20*, 115-118.

Lorenzen, Paul

1951 Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände, *The journal of symbolic logic 16*, 81-106.

Löwenheim, Leopold

1915 Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen 76*, 447-470; trad. inglese in *van Heijenoort 1967*, 228-251.

Luckhardt, Horst

1973 *Extentional Gödel Functional Interpretation,* Lecture notes in mathematics, vol. 306, Springer, Berlin.

Łukasiewicz, Jan e Alfred Tarski

1930 Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Sprawozdania z posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawkiego 23*, 30-50.

Maddy, Penelope

1988 Believing the axioms I, *The journal of symbolic logic 53*, 481-511.

1988a Believing the axioms II, *The journal of symbolic logic 53*, 736-764.

1990 *Realism in mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

1993 Does V equal L?, *The journal of symbolic logic 58,* 15-41.

1996 Set-theoretic naturalism, *The journal of symbolic logic 61,* 490-514.

1997 *Naturalism in mathematics,* Clarendon Press, Oxford.

2000 Does mathematics need new axioms?, *The bulletin of symbolic logic 6*, 413-422.

2001 Some naturalistic reflections on set theoretic method, *Topoi 20,* 17-27.

Magari, Roberto

1988 Logica e teofilia. Osservazioni su una dimostrazione attribuita a Kurt Gödel, *Notizie di logica 4,* 11-20.

Maltsev, Anatolii Ivanovic

1936 Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, *Matematicheskii sbornik 1*, 323-336; trad. inglese in *Maltsev 1971.*

1941 Su un metodo generale per ottenere teoremi locali in teoria dei gruppi (in russo), *Ivanovskii Gosudarstvennii Pedagogicheskii Institut im. D.A.Furtmanova. Ivanovskoye matematicheskoye obshchesko. Ucheniye zapiski 1*, 3-9; trad. inglese in *Maltsev 1971.*

1971 *The metamathematics of algebraic systems: collected papers. 1936-1967*, curato e tradotto da B.F.Wells, North-Holland, Amsterdam.

Mancosu, Paolo

1999 Between Vienna and Berlin: the immediate reception of Gödel's incompleteness theorems, *History and philosophy of logic 20*, 33-45.

1999a Between Russell and Zermelo: Behmann on the foundations of mathematics, *The bulletin of symbolic logic 5*, 303-330.

2002 On the constructivity of proofs. A debate among Behmann, Bernays Gödel and Kaufmann, in *Sieg et alii 2002*, 349-371.

McAloon, Kenneth

1966 *Some applications of Cohen's method*, tesi di dottorato, University of California at Berkeley.

1971 Consistency results about ordinal definability, *Annals of mathematical logic 2,* 449-467.

McKinsey, John C.C. e Alfred Tarski

1944 The algebra of topology, *Annals of mathematics 45*, 141-191.

1946 On closed elements in closure algebras, *Annals of mathematics 47,* 122-162.

1948 Some theorems about sentential calculi of Lewis and Heyting, *The journal of symbolic logic 13,* 1-15.

Menas, Telis K.

1973 *On strong compactness and supercompactness*, tesi di dottorato, University of California at Berkeley.

Montague, Richard

1970 Pragmatics and intensional logic, *Synthese 22*, 68-94.

Moore, Gregory H.

1982 *Zermelo's axiom of choice*, Springer, Berlin.

1988 The origins of forcing, in *Drake et Truss 1988,* 143-173.

1989 Towards a history of Cantor's continuum problem, in *The history of modern mathematics*, a cura di D. E. Rowe e John McCleary, Academic Press, Boston.

1990 Introductory note to *Gödel 1947* and *1964,* in *Gödel 1990,* 154-175.

Mostowski, Andrezej

1952 *Sentences undecidable in formalized arithmetic: an exposition of the theory of Kurt Gödel,* North-Holland, Amsterdam.

1965 *Thirty years of foundational studies: lectures on the development of mathematical logic and the study of the foundations of mathematics in 1930-1964*, Barnes and Noble, New York.

Müller, Gert H. e Dana S. Scott

1978 (a cura di) *Higher set theory,* Springer, Berlin.

Mycielski, Jan

1964 On the axiom of determinateness, *Fundamenta mathematicae 53,* 205-223.

1966 On the axiom of determinateness (II), *Fundamenta mathematicae 59,* 203-212.

Myhill, John e Dana Scott

1971 Ordinal definability, in *Scott 1971*, 271-278.

Myhill, John, Akiko Kino e Richard E. Vesley

1970 (a cura di) *Intuitionism and proof theory*, North-Holland, Amsterdam.

Nagel, Ernest e James R. Newman

1958 *Gödel's proof*, New York University Press, New York.

Niebergall, Karl-Georg

2000 On the logic of reducibility: axioms and examples, *Erkenntnis 53*, 27-61.

Parikh, Rohit

1971 Existence and feasibility in arithmetic, *The journal of symbolic logic 36,* 494-508.

1973 Some results on the lenght of proofs, *Transactions of the American Mathematical Society 177,* 29-36.

1986 Introductory note to *Gödel 1936,* in *Gödel 1986,* 394-397.

Parsons, Charles

1990 Introductory note to *Gödel 1944,* in *Gödel 1990.*

1995 Introductory note to *Gödel 1946,* in *Gödel 1990.*

Post, Emile

1921 Introduction to a general theory of elementary propositions, *American journal of mathematics 43*, 163-185; ristampato in *van Heijenoort 1967*, 264-283.

1936 Finite combinatory process-formulation 1, *The journal of symbolic logic 1*, 103-105; ristampato in *Davis 1965*, 338-433.

Pressburger, Mojzesz

1930 Über die Volltsändigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen in welchen die Addition als einzige Operation hervortritt, *Sprawozdanie z I Kongresu matematykóv krajóv słowiańskich, Warszawa 1929*, 92-121.

Ramsey, Frank P.

1926 The foundations of mathematics, *Proceedings of the London Mathematical Society 25*, 338-384.

Rodríguez-Consuegra, Francisco A.

1992 Gödel's first works, 1929-1936: mathematics without philosophy?, *Modern logic 3*, 58-74.

1994 Gödel's last works, 1938-1974: the emerging philosophy, *Modern logic 4*, 318-327.

1995 *Kurt Gödel. Unpublished philosopical essays,* Birkhäuser, Basel.

1996 Gödel's unpublished manuscripts, 1930-1970: the official edition, *Modern logic 6*, 413-421.

Rosser, J. Barkley

1936 Extensions of some theorems of Gödel and Church, *The journal of symbolic logic 1*, 87-91; ristampato in *Davis 1965*, 230-235.

1937 Gödel theorems for non-constructive logics, *The journal of symbolic logic*, *2*, 129-137.

Rose, Harvey E. e John C. Shepherdson

1975 (a cura di) *Logic Colloquium '73*, North-Holland, Amsterdam.

Rubin, Hermann e Jean E. Rubin

1970 *Equivalents of the axiom of choice*, North-Holland, Amsterdam.

Russell, Bertrand

1900 *A critical exposition of the philosophy of Leibniz. With an appendix of leading passages*, Cambridge University Press, Cambridge.

1903 *The principles of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

1906 On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, *Proceedings of the London Mathematical Society 4*, 29-53.

1908 Mathematical logic as based on the theory of types, *American journal of mathematics 30*, 222-262.

1912 *The problems of philosophy*, William and Norgate, London.

1919 *Introduction to mathematical philosophy*, Allen and Unwin, London.

1973 *Essays in Analysis*, a cura di D.Lackey, Allen and Unwin, London.

Schlipp, Paul A.

1944 (a cura di) *The philosophy of Bertrand Russell*, Library of living philosophers, vol. 5, Northwestern University, Evanstone.

1949 (a cura di) *Albert Einstein, philosopher-scientist*, Library of living philosopher, vol. 7, Northwestern University, Evanstone.

1963 (a cura di) *The philosophy of Rudolf Carnap*, Library of living philosopher, vol. 11, Open Court, La Salle.

Schoenman, Ralph

1967 (a cura di) *Bertrand Russell: philosopher of the century*, Allen and Unwin, London.

Schütte, Kurt

1954 Kennzeichnung von Ordnungzahlen durch rekursiv erklärte Funktionen, *Mathematische Annalen 127*, 15-32.

1968 *Vollständiger Systeme modaler und intuitionistischer Logik,* Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 42, Springer, Berlin.

1977 *Proof theory*, Springer, Berlin.

Schwichtenberg, Helmut

1975 "Elimination of higher type levels in definitions of primitive recursive functionals by means of transfinite recursion", in *Rose et Shepherdson 1975,* 279-304.

Scott, Dana

1961 Measurable cardinals and constructible sets, *Bulletin de l'Académie polonaise des sciences 9*, 521-524.

1971 (a cura di) *Axiomatic set theory*, Proceedings of symposia in pure mathematics, vol.13, part 1, American Mathematical Society, Providence (RI).

Shanker, Stuart G.

1988 (a cura di) *Gödel's theorem in focus*, Croom Helm, London.

Shepherdson, John C.

1951 Inner models for set theory, part I, *The journal of symbolic logic 16,* 161-190.

1952 Inner models for set theory, part II, *The journal of symbolic logic 17,* 225-237.

1953 Inner models for set theory, part III, *The journal of symbolic logic 18,* 145-167.

Shoenfield, Joseph R.

1959 On the independence of the axiom of constructibility, *American journal of mathematics 81,* 537-540.

1967 *Mathematical logic,* Addison-Wesley, Reading (MA).

Sierpiński, Wacław

1934 *Hypothèse du continu,* Garazinski, Warsaw.

1956 *Hypothèse du continu,* II ed., Chelsea, New York.

Sieg, Wilfried

1999 Hilbert's program, *The bulletin of symbolic logic 5*, 1-44.

2003 Introductory note to "Correspondence with Jacques Herbrand", in *Gödel 2003a*, 3-13.

Sieg, Wilfried e Charles Parsons

1995 Introductory note to *Gödel *1938a*, in *Gödel 1995*, 62-85.

Sieg, Wilfried, Richard Sommer e Carolyn Talcott

2002 *Reflections on the foundations of mathematics. Essays in honor of Solomon Feferman*, Lecture Notes in Logic 15, A K Peters, Natick (MA).

Simpson, Stephen G.

1999 *Subsystems of second-order arithmetic*, Springer, Berlin.

Skolem, Thoralf

1920 Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst eine Theoreme über dichte Mengen, *Skrifter utgit av Videnskappsselkapet i Kristiania I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse,* no.4, 1-36; trad. inglese in *van Heijenoort 1967*, 252-263.

1923 Begründung der elementare Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich, *Skrifter utgit av Videnskappsselkapet i Kristiania I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse,* no.6, 1-38; trad. inglese in *van Heijenoort 1967*, 302-333.

1923a Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Matematikerkongressen i helsingfors 1922,* Akademiska Bokhandeln, Helsinki; trad. inglese in *van Heijenoort 1967*, 290-301; rist. in *Skolem 1970.*

1928 Über die mathematische Logik, *Norsk matematisk tidsskrift 10,* 125-142; trad. inglese in *van Heijenoort 1967*, 508-524.

1929 Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter utgit av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I,no. 4,* 1-49; rist. in *Skolem 1970.*

1931 Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik, *Skrifter utgit av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I,no. 6,* 1-28; rist. in *Skolem 1970.*

1932 Über die symmetrisch allgemeinen Lösungen im identischen Kalkül, *Skrifter utgit av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I,no. 7,* 1-28; rist. in *Skolem 1970.*

1933 Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem, *Fundamenta mathematicae 20,* 254-261; rist. in *Skolem 1970.*

1933a Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems, *Norsk matematisk forenings skrifter, series 2,* no.10, 73-82; ristampato in *Skolem 1970.*

1934 Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzhälbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen, *Fundamenta mathematicae 23,* 150-161.

1970 *Selected works in logic,* curato da Jens Erik Fenstad, Universitetsvorlaget, Oslo.

Smorynski, C.

1977 The incompleteness theorems, in *Barwise 1977,* 821-866.

Sobel, Howard J.

1987 Gödel's ontological proof, in *Thomson 1987,* 241-261.

2001 *Logic and Theism*, disponibile all'indirizzo: `www.scar.utoronto.ca/ ˜ sobel`.

Solovay, Robert M.

1963 Independence results in the theory of cardinals, I, II, *Notices of the American Mathematical Society 10,* 595.

1965 $2^{\aleph_0}$ can be anything it ought to be, in *Addison et alii 1965,* 435.

1965a Measurable cardinals and the continuum hypothesis, *Notices of the American Mathematical Society 12,* 132.

1990 Introductory note to *Gödel 1938, 1939, 1939a, 1940,* in *Gödel 1990,* 1-25.

1995 Introductory note to *Gödel*1939b* e **1940a,* in *Gödel 1995*, 114-127.

1995a Introductory note to *Gödel*1970a, *1970b, *1970c,* in *Gödel 1995,* 405-420.

Spector, Clifford

1962 Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, in *Dekker 1962,* 1-27.

Steel, John R.

2000 Mathematics needs new axioms, *The bulletin of symbolic logic 6,* 422-433.

Stein, Howard

1995 Introductory note to *Gödel *1946/9*, in *Gödel 1995*, 202-229.

Tait, William W.

1965 Infinitely long terms of transfinite type, in *Crossley et Dummett 1965,* 176-185.

1967 Intensional interpretations of functionals of finite type. I, *The journal of symbolic logic 32,* 198-212.

1981 Finitism, *The journal of philosophy 78,* 524-546.

Takeuti, Gaisi

1957 Ordinal diagrams, *Journal of the Mathematical Society of Japan 9*, 386-394.

1960 Ordinal diagrams II, *Journal of the Mathematical Society of Japan 12*, 385-391.

1967 Consistency proofs of subsystems of classical analysis, *Annals of Mathematics 86*, 299-348.

1978 Gödel's numbers of product spaces, in *Müller et Scott 1978*, 461-471.

1978a *Two applications of logic to mathematics*, Publications of the Mathematical Society of Japan, Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton University Press, Princeton.

Takeuti, Gaisi e Wilson M. Zaring

1973 *Introduction to axiomatic set theory*, Springer, Berlin.

1975 *Axiomatic set theory*, Springer, Berlin.

Tarski, Alfred, Andreij Mostowski e Raphael Robinson

1953 *Undecidable theories*, North-Holland, Amsterdam.

Thomson, Judith J.

1987 (a cura di) *On being and saying: essays for Richard Cartwright,* MIT Press, Cambridge (MA).

Tieszen, Richard

1989 *Mathematical intuition. Phenomenology and mathematical knowlwdge*, Kluwer, Dordrecht.

1992 Kurt Gödel and Phenomenology, *Philosophy of science 59*, 174-194.

1994 Mathematical realism and Gödel's incompleteness theorems, *Philosophia mathematica 2*, 177-201.

1998 Gödel's path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961), *The bulletin of symbolic logic 2*, 181-203.

2002 Gödel and the intuition of concepts, *Synthese 133*, 369-391.

Troelstra, Anne S.

1973 (a cura di) *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis*, Lecture notes in mathematics, vol. 344, Springer, Berlin.

1977 Aspects of constructive mathematics, in *Barwise 1977,* 973-1052.

1986 Introductory note to *Gödel 1933e*, in *Gödel 1986*, 282-287; nota introduttiva a *Gödel 1933a*.

1990 Introductory note to *Gödel 1958* e *1972,* in *Gödel 1990,* 217-241.

1995 Introductory note to *Gödel *1941,* in *Gödel 1995,* 186-189.

Troelstra, Anne S. e Dirk van Dalen

1988 *Constructivism in mathematics,* volumi I e II, North-Holland, Amsterdam.

Troelstra, Anne S. e Schwichtenberg Helmut

1996 *Basic proof theory*, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

Turing, Alan M.

1937 On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society (2) 42*, 230-265.

1965 On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, ristampa di *Turing 1937,* in *Davis 1965*, 116-154.

Ursini, Aldo e Paolo Aglianò

1996 *Logic and algebra,* Marcel Dekker, New York.

van Heijenoort, Jan

1967 (a cura di) *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, Harvard University Press, Cambridge (MA).

von Neumann, John

1925 Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 154,* 219-240.

1927 Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Mathematische Zeitschrift 26*, 1-46.

1928 Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre, *Mathematische Annalen 99,* 373-391.

1928a Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift,* 699-752.

1929 Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 27*, 227-241.

1931 Die formalistische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis 2,* 116-121; rist. in *von Neumann 1961a;* trad. inlg. in *Benacerraf et Putnam 1964.*

1961 *Collected Works,* vol. I, a cura di A.H.Taub, Pergamon, New York.

1961a *Collected Works,* vol. II, a cura di A.H.Taub, Pergamon, New York.

Wang, Hao

1974 *From mathematics to philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

1978 Kurt Gödel's intellectual development, *The mathematical intelligencer 1*, 182-184.

1981 Some facts about Kurt Gödel, *The journal of symbolic logic 46*, 653-659.

1987 *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge (MA).

1996 *A logical journey. From Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge (MA).

Webb, Judson C.

1990 Introductory note to *Gödel 1972a,* in *Gödel 1990,* 292-304.

Weiermann, Andreas

1998 How is that infinitary methods can be applied to finitary mathematics? Gödel's T: a case study, *The journal of symbolic logic 63,* 1348-1370.

Weingartner, Paul e Leopold Schmetterer

1987 (a cura di) *Gödel remembered. Salzburg 10-12 July 1983*, Bibliopolis, Napoli.

Weyl, Hermann

1910 Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe, *Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter 7,* 93-95 e 109-113; rist. in *Weyl 1968.*

1919 *Das Kontinuum*, Veit, Leipzig.

1919a Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 28,* 85-92; rist. in *Weyl 1968.*

1968 *Gesammelte Abhandlungen,* voll. I-IV, a cura di K.Chandrasekharan, Springer, Berlin.

Whitehead, Alfred North e Bertrand Russell

1910 *Principia Mathematica*, vol.1, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

1912 *Principia Mathematica*, vol.2., Cambridge University Press, Cambridge (UK).

1913 *Principia Mathematica*, vol.3, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

1925 *Principia Mathematica*, seconda edizione di *Whitehead et Russell 1910*, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

Woodin, W.Hugh

2001 The Continuum Hypothesis, Part I, *Notices of the American Mathematical Society 48*, 567-576.

2001a The Continuum Hypothesis, Part II, *Notices of the American Mathematical Society 48*, 681-690.

Zach, Richard

1999 Completeness before Post: Bernays, Hilbert and the development of propositional logic, *The bulletin of symbolic logic 5*, 331-366.

Zermelo, Ernst

1904 Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Mathematische Annalen 59,* 514-516.

1908 Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Mathematische Annalen 65*, 107-128.

1908a Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, *Mathematische Annalen 65,* 261-281.

1929 Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik, *Fundamenta mathematicae 14,* 339-344.

1930 Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Fundamenta mathematicae 16,* 29-47.