Scuola Normale Superiore

ANALISI E SVILUPPI DELLA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA DI ROBERTO MAGARI:
ALGORITMI PER TENTATIVI ED ERRORI E PICCOLE PROBABILITÀ

Coordinatore

Prof. Massimo Mugnai, Scuola Normale Superiore

Supervisori

Prof. Hykel Hosni, Università degli Studi di Milano
Dott. Tommaso Flaminio, Univesità dell'Insubria

Candidato

Jacopo Amidei

Anno Accademico 2016-2017

Indice

Introduzione

Questa tesi approfondisce e sviluppa in modo originale due contributi logico-matematici di Roberto Magari, algebrista e componente di quella ristretta cerchia di matematici e di filosofi cui si deve la rinascita della logica matematica nell'Italia dei primi anni sessanta del secolo scorso.
Attraverso l'analisi di alcuni testi inediti o poco noti, nel primo capitolo della tesi, ricostruiamo la filosofia della matematica di Magari mostrando come le sue idee intorno alla "metamatematica" colgono in modo del tutto originale quella trasformazione che si andava delineando nella filosofia della matematica a partire dagli anni settanta. Tale analisi mostra infatti l'immagine di uno studioso a cavallo fra due epoche, radicato in una concezione della matematica che si potrebbe forse dire "strutturalista", secondo un filone che culmina con Bourbaki, ma aperto verso le nuove istanze emergenti in filosofia della matematica all'inizio degli anni settanta, tendenti a valorizzarne i metodi euristici. Il contributo di Magari all'algebra universale, l'introduzione delle algebre diagonalizzabili, così come gli sviluppi che ne sono seguiti in campo logico-matematico sono noti. In anni recenti sono stati posti in risalto sia i lavori sui calcoli generali che la critica fatta da Magari alla formalizzazione della "prova ontologica" proposta da Gödel. Quasi del tutto inesplorati rimanevano però i lavori di Magari intorno alle probabilità non-archimedee e ai sistemi dialettici — un originale tentativo di formalizzazione di un "algoritmo" che procede per tentativi ed errori, parallelo, ma non equivalente a quello forse più celebre elaborato negli stessi anni da Hilary Putnam. Nel secondo e terzo capitolo della tesi verranno approfonditi questi due aspetti meno noti del lavoro di Magari.

Un'idea centrale nelle riflessioni di Magari è la considerazione della metamatematica come una scienza naturale. Secondo Magari la conoscenza matematica è descrivibile come un processo di approssimazione, creazione e revisione di tesi provvisorie. Procedure per tentativi ed errori assumono dunque grande importanza in matematica ed è per tale ragione che agli inizi degli anni '70 Magari sviluppò un sistema formale capace di caratterizzare tale metodo. I risultati di questa ricerca sono presentati in due lavori ([88, 89]) nei quali l'autore introduce originali sistemi formali da lui chiamati *sistemi dialettici*. A partire dal lavoro di Lakatos [75] vi è stata una rinascita di posizioni empiriste in filosofia della matematica. Secondo tali posizioni la crescita della conoscenza matematica è spiegabile tramite l'uso di metodi euristici. Oggi giorno molti filosofi hanno abbracciato differenti versioni di questa posizione filosofica (vedi ad esempio [115]). Al fine di definire un framework capace di precisare diverse posizioni empiriste á la Lakatos, nel secondo capitolo della tesi, definiamo e studiamo i sistemi quasidialettici. Questi sono particolari sistemi formali introdotti con lo scopo di rendere i sistemi dialettici di Magari più aderenti alla pratica della revisione in matematica. Più precisamente i sistemi dialettici sono estesi in modo da incorporare certe idee di Lakatos sulla matematica intesa come conoscenza fallibile che si perfeziona attraverso un processo di critica e di revisione. Al fine di confrontare tali sistemi proveremo che i sistemi dialettici e i quasidialettici, se confrontati dal punto di vista dei gradi di Turing, hanno lo stesso contenuto informativo. Entrambi i sistemi rappresento infatti due classi di insiemi che condividono lo stesso grado di Turing. Questo fatto suggerisce che i sistemi dialettici sono abbastanza robusti da non essere superati dall'introduzione di una nozione più raffinata di revisione. Di fatto, la coincidenza dello stesso grado di Turing mostra che i quasi dialettici non incrementano la potenza computazionale dei sistemi dialettici standard, se per potenza computazionale di un sistema intendiamo il suo grado di computabilità. In altre parole la nozione di revisione introdotta nei quasidialettici è già codificata nella proposta originale di Magari. Storia completamente diversa si ha se compariamo i due sistemi dal punto di vista degli insiemi che rappresentano. In questo caso mostriamo come i sistemi quasi dialettici rappresentano una classe di insiemi più ampia rispetto a quella rappresentata dai sistemi dialettici. Sotto questo aspetto i sistemi quasidialettici incrementano la potenza computazionale dei sistemi dialettici. Concluderemo il secondo capitolo presentando delle implicazioni filosofiche che Magari trae da alcuni risultati relativi ai sistemi dialettici.

Il terzo capitolo della tesi è invece dedicato alle piccole probabilità. Oltre ai lavori matematici Magari ha scritto su argomenti etici, politici e sul gioco degli scacchi. A metà degli anni ottanta, data la sua inclinazione ad usare strumenti matematici per formalizzare concetti e problemi di qualsiasi natura, Magari ha scritto un trattato di etica formale ([100]). In questa opera l'autore definisce un'originale teoria della decisione basata su due principali idee. La prima è quella relativa al superamento del principio di Cournot, secondo il quale eventi di piccola probabilità non si verificano. Secondo Magari tutti gli eventi possibili devono avere valore di probabilità maggiore di zero. In altre parole Magari accetta il principio di regolarità, secondo il quale solo gli eventi impossibili hanno misura di probabilità zero. La seconda idea concerne invece l'assunzione dell'esistenza di azioni infinitamente importanti, ad esempio il salvataggio di una vita umana. Dato un insieme di possibili azioni, la funzione che misura l'utilità di queste dovrà permettere di esprimere differenze infinite, ad esempio salvare una vita umana è infinitamente più importante che vincere alla lotteria. Magari, quindi, critica la teoria della decisione classica ([137]) sottolineando l'importanza degli eventi infinitamente importanti ma altamente improbabili. La soluzione suggerita da Magari per trattare entrambi i problemi consiste nell'introdurre i campi non archimedei. Dal lavoro di Shimony e Kemeny ([142, 67]) è ben noto che il principio di coerenza stretta offre un modo alternativo all'introduzione dei campi non archimedei per superare il principio di Cournot. Il teorema di Shimony-Kemeny mostra infatti che una funzione di probabilità soddisfa l'assioma di regolarità se e solo se soddisfa il principio di coerenza stretta. Questa strategia vale però solo per algebre finite di eventi. Al fine di superare questo limite presenteremo due generalizzazioni del teorema di Shimony-Kemeny. Più precisamente, mentre Shimony e Kemeny provano i loro teoremi per algebre booleane finite di eventi, noi proviamo tale teorema per insiemi finiti arbitrari di eventi (cioè per insiemi di eventi senza struttura) e per insiemi infiniti di eventi.

Ogni capitolo è auto-contenuto, dunque tutti i concetti formali sono inseriti all'interno del capitolo in cui sono utilizzati. Il primo capitolo è basato sull'articolo *Natura empirica della metamatematica: la filosofia della matematica di Roberto Magari* ([2]) scritto in collaborazione con Duccio Pianigiani, il secondo capitolo è basato sui lavori *Trial and error mathematics I: Dialectical and quasidialectical systems* ([3]) e *Trial and error mathematics II: Dialectical sets and quasidialectical sets, their degrees, and their distribution within the class of limit sets* ([4]) scritti in collaborazione con Duccio Pianigiani, Luca San Mauro, Giulia Simi e Andrea Sorbi.

Concludiamo questa introduzione con una breve biografia di Magari (per maggiori dettagli rimandiamo a [126]).

Roberto Magari: una breve biografia

Roberto Magari nasce a Firenze nel 1934. Nel 1953, dopo la maturità classica, si iscrive, sempre a Firenze, al corso di studi in matematica, dove si laurea con lode nel 1957, con una tesi di geometria. Prima assistente volontario, poi assistente incaricato, diventa infine assistente di ruolo alla cattedra di Matematiche complementari nel 1962. A quello stesso anno, risale l'evento decisivo per la sua vita intellettuale e scientifica: entra in contatto con Ludovico Geymonat, ordinario di Filosofia della Scienza all'Università di Milano e direttore del Gruppo di ricerca per la logica matematica del C.N.R., in cui viene accolto. Così la logica matematica, coltivata da parte di Magari da autodidatta, trova referenti e interlocutori nel gruppo dei giovani entusiasti raccolti intorno a Geymonat. Grazie a quegli incontri Magari si avvicina l'algebra astratta. A quegli anni risalgono le pubblicazioni inerenti le algebre della logica. Poi (1965-66) propone un primo esempio di creazioni proprie: i calcoli generali. Nel 1963 diventa incaricato di Logica matematica. Dà tesi e raccoglie i primi allievi. Nel 1966 consegue la Libera docenza in algebra; nel 1967 vince un concorso a cattedra sulla stessa materia e nel 1968 viene chiamato all'Università di Ferrara dove, per alcuni anni, i suoi interessi si concentrano sull'algebra universale. In quegli anni (1966-72) introduce una sua tematica di ricerca in algebra universale: le algebre filtrali e ideali. Nel 1971 si trasferisce all'università di Siena, di cui organizza il nascente Istituto (poi Dipartimento) di matematica. Nella nuova sede può raccogliere tutti gli allievi già in contatto con lui, cui se ne aggiungeranno altri in seguito. In questo contesto prende vita la "scuola di Siena". All'intensa ricerca in algebra universale si uniscono ora nuovamente temi più logici, legati alle limitazioni dei formalismi e alla ricorsività, i sistemi dialettici (1973-74) sono il risultato di queste nuove ricerche. Poi riemerge lo spirito algebrico con la creazione delle algebre diagonalizzabili (dal 1974), ambiente astratto adeguato per lo studio di fenomeni di derivazione logica. Nel 1982 viene istituita a Siena la Scuola di specializzazione in logica matematica — che da 1991 diventerà dottorato con qualche cambiamnto e un'apertura all'informatica — espressione degli interessi e delle competenze del gruppo formatosi intorno a Magari, con docenti italiani e stranieri. A partire dagli ultimi anni '70 Magari accentua i propri interessi su questioni di filosofia della scienza, politica e etica. L'etica è in realtà un interesse di antica data, ma in quegli anni diventa e rimane centrale. Nel 1986 pubblica Morale e metamorale: un approccio probabilistico ai problemi morali. Nello stesso tempo gli interessi di Magari continuano a rivisitare tutti i temi precedenti: la logica (un commento alla riproposta della "prova ontologica" fatta da Gödel); le algebre diagonalizzabili (che qualcuno chiamerà (1985) "algebre di Magari"); l'etica e la teoria delle decisioni; vari aspetti dei fondamenti della matematica. Nel giugno del 1993, gli viene diagnosticato un cancro al polmone, inoperabile. Muore il 5 marzo 1994.

Sempre, ma soprattutto nel periodo senese, Roberto Magari ha svolto, a fianco della ricerca matematica, un'intensa attività divulgativa, culturale (nel 1980 fondò, con altri, "Il Dubbio. Rivista di opinioni neoilluministe"); di saggistica sugli scacchi, di giochi matematici. In tutte queste espressioni lo stile concettuale rimane quello della ricerca matematica: una tensione costante verso l'approfondimento, la generalizzazione, la pluralità di modelli da affiancare, in ogni contesto, a quelli usuali. Complice anche il fatto che Magari esponeva le sue idee per lo più in scritti in lingua italiana, la maggior parte delle le sue ricerche risultano purtroppo sconosciute.

Capitolo 1

La filosofia della matematica di Roberto Magari: un tentativo di sintesi

> Da bambino qualche volta mi hanno fatto sentire colpevole per aver “fatto i balocchi” anziché le cose “serie”, ora so che le poche cose serie che ho fatto derivano semmai da quei balocchi.
>
> Roberto Magari

1.1 Introduzione

Roberto Magari (1934-1994) è riconosciuto come un componente di quella cerchia di matematici e di filosofi cui si deve la rinascita della logica matematica nell’Italia dei primi anni ’60 del secolo scorso. Già nei primissimi lavori in geometria ([85]) e in teoria dei gruppi, successivi alla laurea conseguita a Firenze con Guido Zappa, trapelava un forte interesse metateorico, che diventerà più marcato con la frequentazione di Geymonat e Casari, e dopo l’incontro con la “logica algebrica” di Halmos ([60]). Un orientamento che si concretizzerà dapprima in una serie di lavori eseguiti assieme a Piero Mangani sulle algebre monadiche, per proseguire da metà degli anni ’60 (con Mangani, Toti Rigateli e Pagli) in direzione dei cosiddetti “calcoli generali”, che riprendevano sviluppandole in modo originale alcune idee di Tarski. Verso la fine degli anni ’60, docente a Ferrara, Magari venne a contatto con un settore allora di recente fondazione, la teoria dei modelli, un interesse che poi si precisò, sfociando nello studio dell’algebra universale. A quella fase risale un altro nutrito gruppo di

allievi nel campo della logica, oltre a quelli già citati, ricordiamo Claudio Bernardi, Franco Montagna, Giovanni Sambin e Aldo Ursini, i cui successivi contributi allo sviluppo delle algebre diagonalizzabili e alla "logica della dimostrabilità" sono ben noti[1]. Il trasferimento a Siena nel 1971 segna anche l'avvio di un nuovo interesse verso i teoremi limitativi e l'opera di Kurt Gödel, che fondendosi con la precedente familiarità acquisita con l'algebra universale dette origine alle "algebre diagonalizzabili". All'ultima fase appartengono le sue riflessioni nel campo della probabilità, fortemente motivate con ragioni di carattere etico, più che matematico.
Il contributo di Magari all'algebra universale, l'introduzione delle algebre diagonalizzabili, così come gli sviluppi che ne sono seguiti in campo logico-matematico sono noti. In anni recenti sono stati posti in risalto, segnatamente nel dettagliato lavoro di Arpaia [9], anche i lavori sui calcoli generali. Infine, una discreta popolarità ha avuto di recente la critica di Magari [107] alla formalizzazione della "prova ontologica" proposta da Gödel, grazie ad una antologia sul tema, curata da Lolli e Odifreddi [79]. Quasi del tutto inesplorati rimanevano i lavori di Magari intorno alle probabilità non-archimedee, fino al tributo riservato ad essi da Leonesi e Toffalori in [80]. Se si eccettua una sezione della tesi di dottorato di Bruni [15], dopo gli articoli di Bernardi [10], Gnani [44], Montagna, Simi e Sorbi [117], anche sui sistemi dialettici (un originale tentativo di formalizzazione di un "algoritmo" che procede per tentativi ed errori, parallelo, ma non equivalente a quello forse più celebre elaborato negli stessi anni da Hilary Putnam) era caduto l'oblio. Simile destino era toccato anche alle molte riflessioni sulla matematica fatte da Magari nell'arco di tutta la sua carriera. Sebbene queste non siano esposte in modo sistematico, e in larga parte sono disseminate in lettere con i numerosi corrispondenti, appunti e scritti non pubblicati conservati presso la biblioteca del *Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'Università di Siena*, le idee intorno a quella che Magari, secondo una peculiare accezione, chiamava "metamatematica" colgono in modo del tutto originale la trasformazione che si andava delineando nella filosofia della matematica a partire dagli anni '70. Un'attenta analisi di questi scritti mostra infatti un'interessante immagine, si può dire a cavallo fra due epoche, dello studioso che fu fondatore della prima scuola di specializzazione italiana in Logica Matematica. Radicato in una concezione della matematica che si potrebbe forse dire "strutturalista", secondo un filone che culmina con Bourbaki (la matematica come scienza di strutture, che si fonda sul metodo assiomatico), ma aperto verso le nuove istanze emergenti in filosofia della matematica all'inizio degli anni '70, tendenti ad evidenziare il carattere "dialettico" ed "empirico" della crescita della conoscenza matematica ed a valorizzarne i metodi euristici ed informali.
Nel tentativo di argomentare quanto ora sostenuto, in questo capitolo, presenteremo un resoconto sistematico delle riflessioni di Magari sulla matematica. Nei successivi capitoli approfondiremo invece la tematica dei sistemi dialettici e quella delle piccole

[1] cf. [7] per una introduzione a questi temi ed un'ampia bibliografia.

probabilità.

1.2 Natura empirica della metamatematica

Un *leit-motiv* ricorrente in molti scritti di Magari è la concezione della *metamatematica* come di una *scienza empirica*, un'affermazione che può apparire abbastanza enigmatica se non si precisano preliminarmente i termini della questione.

1.2.1 Formalismo e metamatematica

La concezione dalla quale prende le mosse la riflessione di Magari intorno alla "metamatematica" è quella, per sommi capi, del formalismo hilbertiano, i cui punti salienti sono così riassunti da Stephen Kleene:

> first, the emphasis that strict formalization of a theory involves the total abstraction from the meaning, the result being called formal system [...] and second his method of making the formal system as a whole the object of a mathematical study, called metamathematics or proof theory. ([69], p. 61)

Nel classico testo di Stephen Kleene la metamatematica, che relativamente ad un dato sistema formale T prende il nome di *metateoria* di T, è quindi presentata come quella disciplina che ha come oggetto di studio i sistemi formali. Dal punto di vista della metateoria, la teoria oggetto è solo un sistema di segni privi di significato. Kleene precisa inoltre:

> the metatheory belongs to intuitive and informal mathematics (unless the metatheory is itself formulated from a meta metatheory, which here leave out of account). ([69], p. 62)

La metateoria è quindi espressa nel linguaggio ordinario ma arricchito di simboli matematici. Nell'accezione hilbertiana essa procede per inferenze intuitive, le sue deduzioni "must carry convinction" e i suoi metodi sono ristretti a quelli finitari e contenutistici[2]. In [112] — probabilmente la voce "assiomi" per un'enciclopedia — Magari offre un resoconto di questa concezione quasi con le stesse parole: il metalinguaggio in genere non è formalizzato, attraverso di esso si costruisce una metateoria composta di definizioni e dimostrazioni relative alla teoria oggetto, benché in questo caso "si tratta di un dimostrare le cui regole non sono esplicite" (p. 2). Stigmatizzando la disinvoltura con la quale si è talvolta liquidato il programma di Hilbert dopo la

[2] cf. [138], p. 273. La metamatematica hilbertiana non era, all'origine, concepita come una teoria formale.

scoperta dei risultati di Gödel, Magari prendeva le distanze da certe "riviviscenze di visioni platoniche" che ne sono conseguite. Naturalmente, dopo i risultati di Gödel, l'ideale della metamatematica come fondazione delle teorie matematiche non è più sostenibile e semmai "cede il passo all'ammissione di una feconda circolarità" (p. 8). Sul fatto che al ruolo fondazionale della metamatematica si dovesse sostituire una sorta di prolifera cooperazione fra matematica e metamatematica, aveva insistito, in particolare, Alfred Tarski. Questi fu autore di una profonda trasformazione della metamatematica, alla quale assegnò un dominio ben più ampio di quello originariamente assegnatole da Hilbert, segnatamente con la volontà di renderla una disciplina interamente matematica. La metamatematica doveva essere capace di produrre risultati che si mostrassero utili per la matematica ordinaria, senza porre un netto confine tra le due ma bensì attraverso una feconda interazione. Queste considerazioni sulla concezione tarskiana della metamatematica consentono di mettere in luce un'altra fonte ispiratrice della concezione di Magari, del quale si può forse ripetere ciò che Feferman ha scritto a proposito di Tarski:

> He had a strong feeling–I would almost call it ideological–for axiomatic and for the algebraic approach to logic. He would axiomatize and algebricize whenever he could. ([146], p. 402)

L'influenza della formalizzazione della metamatematica proposta da Tarski tra gli anni '20 e i primi anni '30 si manifesta in modo esplicito nelle ricerche condotte da Magari con Mangani, Pagli e Toti-Rigatelli negli anni '60 intorno ai cosiddetti *calcoli generali*[3]. Questi studi sviluppano in modo originale le idee tarskiane intorno alla assiomatizzazione della nozione di conseguenza, posta in atto nella teoria generale dei sistemi deduttivi, prendendo le mosse dai concetti primitivi di "insieme di proposizioni sensate" S e da un operatore astratto di conseguenza $Cn_S : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ che gode delle prorietà di essere una "chiusura di Moore"[4]. I successivi sistemi "formali", "metaformali" ed "iperformali" di cui parleremo più avanti, confermano l'intento dichiarato in [86] di portare lo studio metamatematico al "massimo livello di generalità". Con tali sistemi l'orizzonte della metamatematica verrà infatti ampliato al punto da includere una teoria formalizzata dei procedimenti euristici.

1.2.2 La scienza metamatematica

Le idee di Magari intorno alla metamatematica sono formulate spesso con un linguaggio estremamente conciso e di non facile interpretazione, ma in linea generale

[3] cf. [149] pp. 31-37 e [9] per una ricostruzione dettagliata dei contributi di Magari e della sua scuola.

[4] Cioè soddisfa le condizioni $S \subseteq Cn(S)$, $Cn(Cn(S)) \subseteq Cn(S)$ e infine per ogni sottoinsieme X di S $Cn(X) \subseteq Cn(S)$. Dato un insieme A, denotiamo con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme potenza di A, formalmente $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.

possiamo porre in evidenza questi punti salienti. Magari parla della metamatematica come di una scienza che, sia pure fortemente matematizzata, ha i tratti delle scienze naturali. Diversamente la matematica viene identificata grosso modo con la classe dei sistemi formali [5]. Una teoria matematica, intesa come sistema formale, è un insieme di proposizioni "su" alcuni termini dati in partenza o definiti a partire da altri termini, che possiamo dividere in due sottinsiemi: il primo è composto da proposizioni, che assieme ad alcuni termini, sono assunte in partenza e chiamate *assiomi*, mentre il secondo è formato da proposizioni derivate a partire dagli assiomi tramite regole di deduzione specificate in partenza. Nello scritto inedito [112] Magari presenta due concezioni a partire dalle quali è possibile fondare il concetto di assioma. L'evoluzione dalla prima alla seconda concezione è, a suo dire, alla base delle moderne ricerche sui fondamenti della matematica. La prima concezione è quella definita da Lakatos "euclidea": gli assiomi sono proposizioni "vere", la cui veridicità è garantita dall'evidenza, data a tali proposizioni, da una certa interpretazione. Le regole di deduzione trasmettono correttamente la verità dalle premesse alle conclusioni. Solitamente una teoria nasce con l'aspirazione ad essere significante, ovvero una teoria che descrive "qualche cosa". Ha senso pertanto parlare della verità di una teoria matematica, solo in quanto si considerano le sue proposizioni come dotate di un "significato". Il "metodo dimostrativo" nasce storicamente con l'intento di circoscrivere tutte e sole le proposizioni vere relative a un dato campo di indagine; perciò il presupposto è che le premesse o assiomi sono vere e che le regole di deduzione conservino la verità:

> tuttavia, data la variabilità dei criteri che sono stati invocati per stabilire premesse vere, i matematici moderni preferiscono costruire teorie in cui non si presenta alcun motivo per credere nelle premesse; al tempo stesso si lascia cadere il riferimento ad una precisa interpretazione della teoria. ([112], p. 3)

Il paradosso di Russell e la non evidenza del quinto postulato di Euclide hanno spinto i matematici moderni a non impegnarsi più sulla "credenza" delle premesse e sull'esistenza di precise interpretazioni di una data teoria, consentendo l'emergere della seconda concezione. Secondo questa nuova concezione gli assiomi di una teoria sono semplici proposizioni di partenza completamente estranee a qualsiasi interpretazione, la quale può avvenire solo in un secondo momento ed indipendentemente dallo sviluppo della teoria. L'interpretazione degli assiomi è lasciata a chi *applica* la teoria. Una volta applicata la teoria ha senso porsi delle domande sulla sua verità, ma in questo caso parliamo di verità di un'altra teoria e non siamo più strettamente

[5]In una lettera del 1972 indirizzata all'amico Roberto G. Salvadori, Magari, definisce in modo "grossolano" la matematica (o un certo atteggiamento versa la matematica) come "la classe dei sistemi formali". cf. [126] p. 73. In [95] pagina 14, Magari sostiene che i sistemi formali sono una buona descrizione dell'attività matematica pura.

in una teoria matematica *pura*.
Il passaggio ora descritto dalla prima alla seconda concezione del concetto di assioma ci permette di spiegare meglio le idee di Magari sulla metamatematica. Se la matematica è identificata con la collezione dei sistemi formali assiomatici, in matematica non vi sono propriamente "leggi" e nessun oggetto matematico presenta "fenomeni". La matematica pura non può essere allora un sapere empirico, nel senso che non dice niente sul mondo[6]. Benché non esistano leggi matematiche in matematica "pura", esistono nondimeno leggi matematiche in matematica applicata, le quali però sono leggi di una scienza che, pur utilizzando il linguaggio matematico, è – secondo Magari – sostanzialmente diversa dalla matematica pura. Mentre quest'ultima è una teoria non interpretata la matematica applicata è una *teoria interpretata* nel senso che il suo dominio d'interesse è ben determinato ed è composto da tutti gli oggetti che la teoria descrive. Per quanto visto nella sezione precedente la "metateoria", avendo come oggetto di studio un dato sistema formale, è una teoria interpretata e, secondo Magari, costituisce una una scienza empirica:

> [...] i teoremi metamatematici, in quanto hanno un contenuto, ossia generano delle aspettative, fanno parte di una teoria interpretata *che ha gli stessi caratteri di una scienza naturale* ed ha per oggetto di studio oggetti in definitiva concreti, ossia i simboli e le manipolazioni umane o meccaniche che essi possono subire. ([95], p. 11)

Il teorema di Gödel genera ad esempio in noi delle aspettative: se infatti T è una teoria formale contenente l'aritmetica di Peano ed ipotizziamo che esista in essa una dimostrazione dell'enunciato indimostrabile del primo teorema di Gödel, allora ci aspettiamo ti poter dimostrare in T la proposizione $1 = 0$. La metamatematica diventa così, secondo Magari, al pari della meccanica razionale, una scienza naturale e le sue previsioni non sono qualitativamente diverse "da quelle che la meccanica può fornire sui movimenti della Luna, anche se hanno, forse, un maggior grado di certezza" ([95], p. 12).
Per quanto non esistono leggi in matematica pura, ci sono tuttavia leggi in forma matematica e riguardanti la matematica, appartenenti alla scienza che studia i fenomeni propri dei formalismi, ossia la metamatematica. Questa servendosi del linguaggio matematico, può erroneamente essere confusa con la matematica pura. Essa è viceversa un ramo della matematica che, "colta nel suo momento applicativo, è in ultima analisi sperimentale" ed ha per oggetto i simboli e le loro manipolazioni:

> i suoi fondamenti assomigliano a quelli della fisica: sono ricavati dall'esperienza e/o dal pregiudizio (detto anche "sintetico a priori") che concatenando il segno "A" con il segno "B" e poi il risultato col segno "C" si ottiene

[6] Come ricorda Roberto G. Salvadori in [126] Magari usava dire spesso; "la matematica non dice nulla intorno al mondo". Vedi pagina 76 nota 52.

> lo stesso risultato che concatenando "A" al risultato della concatenazione di "B" con "C" (concatenare significa solo "scrivere di seguito"). Questa è la legge associativa dei segni, che appartiene alla metamatematica. ([126], p. 74)

Il fatto che i postulati metamatematici siano poco impegnativi e siano in gran parte "innocue regole sulla concatenazione dei segni", fa si che a volte la metamatematica ci appaia ingannevolmente come scienza puramente deduttiva, più che *ipotetico*-deduttiva: è in definitiva lo stesso meccanismo per cui anche riguardo alla geometria Euclidea, dimenticate le remote origini sperimentali, nel tempo ha potuto farsi strada una concezione secondo cui essa è puramente "analitica o comunque certa", benché questo non abbia impedito l'abbandono di un suo postulato e la nascita di geometrie non euclidee.
Si può obiettare che se la metamatematica è una scienza naturale, allora non è formalizzabile, o almeno ciò accade se le si pongono richieste eccessive:

> A rough inference would lead us to conclude that, even if Metamathematics is a natural science, it cannot be formalized as soon as one would require that: (1) once a theory has been formalized, it must deal with its own semantics, and (2) the consequences of the validity of the theory, for example its consistency, must be inserted in the axioms. In fact, in this case, the limitations due to Tarski and Gödel lead us immediately to enrich the theory, both from the expressive and deductive points of view. ([99], p. 270)

Lo scopo dichiarato dell'indagine di Magari in [88, 89] intorno ai sistemi detti "iperformali" sarà appunto quello di verificare entro quali limiti si possa procedere alla formalizzazione della metamatematica conservandone tuttavia i tratti di una "scienza naturale".

1.2.3 Metamatematica ed euristica

La metamatematica hilbertianamente intesa, osservava criticamente Lakatos in [75], riguarda "un'astrazione della matematica", ossia i sistemi formali, dove le dimostrazioni sono intese come concatenazioni di formule. Come tale la metamatematica non è in grado di dar conto della dinamica che conduce alla crescita della conoscenza matematica. La convinzione che la conoscenza matematica evolva attraverso successive revisioni ed aggiustamenti, la natura dunque congetturale della matematica, assieme alla critica serrata del carattere statico della metamatematica, sono caratteristiche di quell'approccio alla filosofia della matematica, alternativo rispetto alle tradizionali scuole fondazionali, legato oggi principalmente al nome del filosofo ungherese, rispetto al quale la posizione di Magari registra alcune importanti differenze, ma con il quale è inevitabile porla a confronto. Nella ricostruzione razionale dell'evoluzione del pensiero matematico proposta da Lakatos, la matematica non cresce per accumulazione di verità infallibili, ma è piuttosto un'attività soggetta a revisione attraverso una dinamica di prove e refutazioni:

> It starts with problems followed by daring solutions, then by severe tests, refutations. The vehicle of progress is bold speculations, criticism, controversy between rival theories, problem-shifts. Attention is always focused on the obscure borders. The slogans are growth and permanent revolution, not foundations and accumulation of eternal truths. ([76], pp. 29-30)

La filosofia della matematica di Lakatos è spesso qualificata come fallibilista, antifondazionalista e antiformalista. Lakatos istituisce una distinzione, per quanto non rigida e riconducibile ad una questione di grado, fra matematica *formale* ed *informale*, affermando quindi il primato della matematica informale sulle teorie formalizzate. Se una teoria formale è la formalizzazione di una teoria informale, essa può essere refutata, non solo dalla scoperta di una contraddizione, ma anche da un corrispondente teorema della teoria informale, ossia da quello che Lakatos chiama un "falsificatore euristico". Nella filosofia della matematica più recente altri studiosi interessati ad un resoconto più realistico dello sviluppo della conoscenza matematica hanno optato per un approccio dove non si parla più di assiomi permanenti, ma di ipotesi provvisorie, trovate per tentativi ed errori, e dove la sostituzione di una ipotesi non comporta l'abbandono del sistema[7]. Fatta questa breve premessa, va detto che la veemente critica di Lakatos al formalismo non è presente in Magari, così come assente è l'enfasi sulla dimensione informale della matematica. Dall'altro lato la concezione della metamatematica di Magari è, per così, dire meno angusta di quella tratteggiata da Lakatos, in quanto non trascura i processi euristici ed esprime la volontà di trattare formalmente anche la dinamica che conduce alla costituzione dei sistemi assiomatici, attraverso "sistemi formali" di tipo nuovo che incorporano la procedura di tentativo ed errore, i quali verranno definiti, per distinguerli dai sistemi tradizionali, "sistemi iperformali":

> L'idée consiste à assimiler le travail mathématique (en particulier la construction d'une théorie) à un processus par essais et erreurs. ([90], p. 1)

Per Magari i sistemi formali, pur rappresentando in modo adeguato l'attività matematica pura, non riescono a schematizzare l'attività matematica nel suo aspetto dinamico. L'evoluzione della conoscenza matematica sembra pertanto essere meglio catturata da processi di apprendimento per tentativi ed errori, sebbene un tale

[7] cf. [19].

concetto sia stato considerato in passato con sospetto a causa di "un certo orrore per la contraddizione" ([88], p. 121). La posizione di Magari emerge con chiarezza nel vivace contrasto che lo oppose a Georg Kreisel riguardo all'ipotesi che la conoscenza matematica evolva per tentativi ed errori, nel breve scambio epistolare (non pubblicato) intercorso dal Giugno all'Ottobre del 1973. In esso il logico austriaco ripropose con veemenza le sue critiche verso quelli che definiva filosofi della matematica *pragmatisti*, o *positivisti*, rivendicando un ruolo primario per l'intuizione. Kreisel riteneva che il ragionamento matematico iniziasse con quell'esame delle nozioni intuitive da lui denominato "rigore informale", quasi ripetendo alla lettera le sue ben note posizioni, che in [70] erano formulate in questi termini:

> The 'old fashioned idea' is that one obtains rules and definitions by analyzing intuitive notions and putting down their properties. This is certainly what mathematicians thought they were doing when defining length or area or, for that matter, logicians when defining rules of inference or axioms (properties) of mathematical structures such as the continuum. (p. 138)

Noi abbiamo, per esempio, una cognizione abbastanza chiara della gerarchia cumulativa, a prescindere dalle formalizzazioni della teoria degli insiemi. I paradossi scaturiscono dal fatto che questa nozione primitiva è una miscela di nozioni affatto diverse, che solo l'analisi riesce a chiarire, mettendo capo agli assiomi. Nella lettera a Magari del 24 Settembre 1973, Kreisel criticava da un lato l'atteggiamento troppo "formalista" del suo interlocutore:

> 'We work in *ZF*', or 'we work in *MK*'. Most of the time we do nothing of this kind. We prove theorems about *sets*-and nowadays (at least form working mathematicians) this means sets generated by iterating the power set operator.[8]

Dall'altro lato ribadiva il suo rifiuto della concezione per cui la conoscenza matematica evolve per tentativi ed errori:

> The choice of any system of axioms would be a matter of trial and error if we did not have in mind objects for which the theorems are intende to be valid. You commit a blatant *petitio principii*, if You try to support your analysis of mathematical practice as a trial and error scheme by simply neglecting the way we actually find and explain most axioms...(ibid.)

[8] Verosimilmente qui Kreisel e Magari con ZF si riferiscono in realtà alla teoria degli insiemi Zermelo-Fränkel *con l'assioma di scelta*, più comunemente denotata ZFC. il sistema assiomatico MK (Kelley-Morse) è una diversa formalizzazione della teoria degli insiemi, con due sorte di variabili, una per gli insiemi ed una per le classi proprie. Essa è strettamente più forte di ZFC. In MK è infatti possibile dimostrare che la classe di tutti gli insiemi è un modello di ZFC, e pertanto che quest'ultima teoria è consistente.

Scrivendo a Kreisel il 3 Settembre 1973, Magari aveva riconosciuto la difficoltà di dare in matematica delle "genuine trials" come nelle scienze empiriche, di fatto riducendosi a considerare, nella teoria dei sistemi dialettici, solo falsificatori di tipo logico (ossia le contraddizioni) e non di tipo "euristico". Pur consapevole della problematicità della trasposizione del fallibilismo popperiano in un contesto matematico, nondimeno Magari si chiedeva se la nozione stessa di sistema formale non fornisse un modo per rendere rigorosamente il concetto di *trial*. Se infatti usiamo il sistema *MK* per studiare la teoria *ZFC*, allora gli enunciati del linguaggio di quest'ultima che sono dimostrabili in *MK* — tipicamente enunciati come quello che afferma la consistenza della teoria *ZFC*, che denoteremo con $Con(ZFC)$— possono essere visti alla stregua di "trials", cioè di nuovi assiomi proposti nel senso di quella che nel prossimo paragrafo chiameremo "funzione proponente" dei sistemi dialettici:

> since many metamathematicians have this trend, the trial and error schemes are *a possible* (of course wide) *description of the metamathematical activity* (ibid.).

Magari accennava anche alla possibile iterazione di questo schema[9], delineando un meccanismo simile a quello delle progressioni di Turing: per il teorema di Gödel ogni teoria T sufficientemente potente è incompleta, e tuttavia — osservava Turing — il teorema stesso indica un metodo per ottenere una teoria "più completa", iterando *ad infinitum* l'operazione che consiste nell'estendere T con la formalizzazione dell'affermazione "T è consistente". Nella lettera a Kreisel del 3 Settembre 1973, rivolgendosi ad uno scettico interlocutore, Magari argomentava che, lavorando in *ZFC*, dovremmo sospendere il giudizio circa $Con(ZFC)$ e tuttavia:

> we do not suspend the judgement, when we have not a theorem [...] when our mathematics is a guide for operating, then we work as trial and error machines.

I matematici tendono a proporre sistemi formali, e quindi teorie matematiche sempre più potenti, almeno finché non emergono contraddizioni. Al contrario, nel caso in cui venga individuata una contraddizione, il matematico tenderà a limitare la potenza della teoria eliminando o indebolendo alcune assunzioni di partenza. Feferman [38] rimarcando, nonostante tutto, i successi dell'analisi logica delle strutture della matematica, sottolinea come, benché i sistemi formali rappresentino porzioni della matematica "in vitro" e non "in vivo", essi possano essere utilizzati per modellare la crescita ed il cambiamento. La teoria delle progressioni originata da Alan Turing e sviluppata principalmente da Kreisel e Feferman costituì un primo tentativo significativo di cogliere questa dinamica. Quello delle progressioni è uno degli esempi

[9] Ciò del resto è in linea con un tratto peculiare della personalità scientifica di Magari, che un corrispondente e biografo ha definito "la propensione a generalizzazioni sempre più ampie" ([126], p. 48).

prediletti anche da Magari, che a più riprese suggerisce, dato il sistema formale F, di considerare $Con(F)$ come una sorta di "trial", in un processo di aggiuzione di assiomi e revisione di tipo "trial-and-error".

1.2.4 Sistemi dialettici: un tentativo di formalizzazione della metamatematica

Come detto alla fine della sezione 1.2.2, i sistemi dialettici nascono dal tentativo di verificare entro quali limiti si possa procedere alla formalizzazione della metamatematica conservandone i tratti di "scienza naturale". La tematica dei sistemi dialettici sarà precisata e sviluppata nel secondo capitolo della tesi. Dunque qua ci limitiamo a dare una descrizione informale dei sistemi dialettici utile al fine di chiarificare il legame tra questi e la concezione della metamatematica come emersa nelle riflessioni di Magari.
La rimozione di assiomi dovuta al fatto di aver derivato da essi una contraddizione, o l'aggiunzione di assiomi ad una data teoria T è correlata, secondo Magari, allo stadio propriamente "metamatematico". Come vedremo, questo processo può essere precisato in termini di "sistemi iperformali" cioè di limiti inferiori[10]. Come diremo meglio più avanti, ciò implica che una data ipotesi non possa essere presa in considerazione infinite volte, ma che da un certo punto in poi entri stabilmente a far parte delle tesi definitivamente accettate oppure ne resti definitivamente esclusa. In questo contesto diventa dunque fondamentale il concetto di computabilità al limite. Per comprendere tale concetto è interessante il raffronto con gli insiemi computabilmente enumerabili.
Tra le varie caratterizzazioni del concetto di insieme computabilmente enumerabile è utile ai nostri scopi porre attenzione alla seguente: un insieme $A \subseteq \mathbf{N}$ è computabilmente enumerabile se esiste una funzione computabile $h : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ tale che per ogni x:

1. $h(x, 0) = 0$,
2. per al massimo un s, $h(x, s + 1) \neq h(x, s)$,
3. $\lim_{s\to\infty} h(x, s) = \chi_A(x)$.

dove $\chi_A(x)$ è la funzione caratteristica di A. In altri termini A possiede una approssimazione computabile che, per ogni x, partendo dall'ipotesi che x all'inizio non appartenga ad A, può cambiare opinione *al più una volta*. Generalizzando possiamo considerare ora approssimazioni che cambino opinione *un numero finito di volte*. Il

[10]Sia $\{A_n\}_n$ una successione di sottoinsiemi dell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali. Si introduce il *limite inferiore* degli A_n come l'insieme $\{x \in \mathbf{N} | \exists k \forall m \geq k, x \in A_m\}$. L'alternanza dei quantificatori sarà invertita nella definizione di *limite superiore*.

“limit lemma” di Shoenfield [11] caratterizza gli insiemi Δ^0_2([12]) come quelli che hanno una approssimazione computabile con un numero finito di *mind changes*. Stabilisce in altri termini l'equivalenza fra l'appartenenza di un insieme A alla classe Δ^0_2 della cosiddetta “gerarchia aritmetica”[13] e l'esistenza di una funzione totale computabile h come sopra, dove però, per ciascun x, la condizione 2 vale non al più per uno, ma per un numero finito qualunque di s.
I “sistemi dialettici”, definiti da Magari in [88] rappresentano un tentativo di formalizzare il concetto di computazione al limite. L'idea intuitiva che Magari vuole cogliere è la seguente

> Un sistema formale schematizza il comportamento di un uomo che, data una proposizione p, si astenga da ogni giudizio sulla verità di p finché non abbia eventualmente dimostrato p, oppure $\neg p$. Un sistema dialettico invece schematizza il comportamento di un uomo che va enumerando (con un certo procedimento: la f)[14] proposizioni in cui crede “fino a prova contraria”. ([88], p. 147)

Formalmente, nella presentazione di Magari, un sistema formale è dato da un insieme di proposizioni (che possiamo identificare con l'insieme dei numeri interi positivi $\mathbf{N}$), un operatore di chiusura algebrica (“di Moore” [15]) H che associa a ciascun sottinsieme computabilmente enumerabile X di $\mathbf{N}$ un sottinsieme computabilmente enumerabile $H(X)$ di $\mathbf{N}$, e infine un elemento privilegiato $c \in \mathbf{N}$ (la contraddizione) per il quale vale $H\{c\} = \mathbf{N}$. Con il concetto di “sistema dialettico” Magari introduce in questo formalismo un nuovo elemento, ossia una funzione totale ricorsiva f che calcola, ad ogni stadio della computazione, il successivo assioma che verrà proposto. L'attività dei matematici è così schematizzata da Magari:

> In un primo tempo i matematici si dedicheranno a dedurre da A elementi di $H(A)$, cioè procederanno a una parziale enumerazione di $H(A)$. Se a un certo punto della enumerazione si troverà c, uno degli elementi di A verrà rimosso e con esso tutti gli etementi di $H(A)$ dedotti tenendone conto. In seguito qualcuno proporrà di aggiungere ad A nuovi elementi ed il processo si ripeterà. ([88], p. 123)

Un “sistema dialettico”, che cerca di cogliere formalmente questo processo, è dunque una tripla $d = \langle h, f, c\rangle$ dove h è la *funzione di deduzione*, mentre f, la *funzione*

[11] Per maggiori dettagli rimandiamo a [144].

[12] Detto in modo informale, un insieme è nella classe Σ^0_2 se è definibile con una espressione che ha un prefisso della forma $\exists\forall$ (“esiste x tale che per ogni y...”), seguito da una relazione computabile. Un insieme definibile con un prefisso della forma $\forall\exists$ sarà invece nella classe Π^0_2. Un insieme è Δ^0_2-definibile se è sia Σ^0_2-definibile che Π^0_2-definibile.

[13] cf. [8], pp. 28-29.

[14] Magari qui si riferisce alla funzione proponente che sarà definita a breve.

[15] Rimandiamo alla nota 4 per ulteriori chiarimenti.

proponente nuovi assiomi, è una permutazione computabile di $\mathbf{N}$. Infine c è un numero naturale che sta per una contraddizione. Identificando gli insiemi finiti con i loro indici canonici, la funzione di deduzione soddisfa le condizioni $W_{h(c)} = \mathbf{N}$ e $W_{h(\emptyset)} \neq \emptyset$. Dalla h è possibile definire in modo canonico ed uniforme un operatore algebrico H che associa ad ogni insieme di numeri naturali X, ciò che è deducibile da X utilizzando h. Ad ogni sistema dialettico viene associata una procedura di computazione per tentativi ed errori che mette capo ad un insieme A_d, detto delle *tesi definitive*, alle quali il sistema perviene dopo aver "cambiato opinione" un numero finito di volte. Se H si riferisce ad una teoria formale consistente, ovvero se $c \notin H(\emptyset)$, allora A_d costituisce un completamento di Lindenbaum di $H(\emptyset)$. Abbiamo dunque un procedimento di computazione, ancorché al limite, per ottenere una teoria completa.
A metà degli anni '70 Jeroslow in [64] indipendentemente propose un approccio alternativo a quello di Magari. La formalizzazione del concetto di "teoria che procede per tentativi ed errori" proposta da Jeroslow era, come del resto quella di Magari, differente da quelle già allora venute alla luce ad opera di Putnam [131] e di Gold [48]. Ma se l'insieme dei teoremi delle "logiche sperimentali convergenti" di Jeroslow coincide, come nel caso del modello di Putnam, con la classe degli insiemi Δ_2^0, diversamente, gli insiemi "dialettici" [16] di Magari ne costituiscono una sottoclasse propria e sono dunque esempi specifici di Σ_2^0-sistemi, ovvero di quelli che Magari chiama "sistemi iperformali". Alla biiettività della funzione proponente f è legato il fatto che i sistemi dialettici danno luogo a particolari completamenti. Tuttavia, osservava Magari, non è detto che la comunità matematica tenda a questo scopo, suggerendo che l'ordinario comportamento dei matematici fosse colto meglio da una variante dei sistemi dialettici, detta "temperata", per la quale la suriettività di f non era più richiesta. Successivamente, Gnani in [44] dimostrò che i due approcci, di Magari e di Jeroslow, risultano equivalenti, purché da un lato si modifichi la funzione proponente lasciando cadere la suriettività e dall'altro lato si considerino logiche sperimentali di Jeroslow in cui non sia richiesta la proprietà di convergenza. In tal caso la classe degli insiemi dialettici e dei teoremi delle logiche sperimentali coincidono con la classe degli insiemi Σ_2^0.

Concludiamo questa sottosezione precisando il legame tra sistemi dialettici e la concezione della metamatematica in Magari. Data una teoria T e un insieme di assiomi A per tale teoria, il matematico si limiterà a dedurre i teoremi che seguono da A. Se ad un certo punto viene trovata una contraddizione, allora, qualche elemento di A, assieme alle sue conseguenze, sarà rimosso. Successivamente sarà possibile aggiungere qualche nuovo assioma a T. Mentre l'attività matematica pura, adeguatamente rappresentata dai sistemi formali, si ferma alla dimostrazione della contraddizione, la rimozione o aggiunzione di assiomi nella teoria T è inerente allo stadio meta-

[16]Come vedremo in dettaglio nel prossimo capitolo, un insieme dialettico è l'insieme delle cosiddette "tesi finali" sulle quali un sistema dialettico si stabilizza.

matematico. Dunque dal momento che in metamatematica si assume il procedere dinamico dei matematici, si rende necessario andare a definire dei sistemi che siano più potenti dei sistemi formali. Magari sviluppò a tal fine i sistemi dialettici i quali, formalizzando il procedimento per tentativi ed errori con il concetto di computazione al limite, permettono di esprimere in metamatematica un aspetto di tipo dinamico proprio di ogni scienza naturale:

> [...] una scienza è un processo storico quasi biologico costituito da successive demolizioni, ricostruzioni, generalizzazioni di teorie scientifiche. ([126] p. 75.)

Al fine di avere una formalizzazione completa della metamatematica pensata come scienza naturale, secondo Magari, è necessario però precisare il concetto tarskiano di verità.

1.2.5 Verità e sensatezza

Una formalizzazione della metamatematica che ne conservi i tratti di scienza naturale è possibile, secondo Magari (vedi ad esempio [95, 99]), a patto che si proceda ad una precisazione del concetto tarskiano di verità e che ci si restringa ad una classe di proposizioni considerate "sensate". Magari introduce quindi il concetto generale di "sistema metaformale" nel quale il superamento delle difficoltà legate ai risultati limitativi di Tarski e di Gödel, avviene anch'esso nella cornice di un concetto di computabilità intesa come computabilità al limite, restringendo l'analisi alle proposizioni cosiddette "sensate".
Già nell'articolo sui sistemi dialettici Magari si sofferma ampiamente sul tema della "genuinità" o "naturalezza" degli enunciati di consistenza, e se da un lato persegue la scelta di restringere il concetto di verità ad una classe di enunciati che definisce "sensati", dall'altro, scrivendo a Kreisel (20 Luglio 1973), rassicura al contempo che il concetto di consistenza da lui introdotto soddisfa la *intensional correctness* richiesta da Feferman ([37]):

> I agree that for any presentation of a theory like arithmetic there exists a natural way of expressing consistency. This was clear from '60 (from the Feferman paper) [...] It is nevertheless necessary to observe that in the paper I discuss the consistency of trial and error schemes. Of course also for these schemes the problem is easy (I substantially solve it: see page 29,30: it is sufficient make $E(x, y, z)$ intentionally correct in the sense of Feferman).

Il predicato $E(x, y, z)$ di cui si fa menzione formalizza "x appartiene all'insieme delle tesi provvisorie allo stadio z del sistema dialettico la cui funzione proponente è la

funzione totale biiettiva ϕ_y". Dunque la formula $\exists x \exists z \forall n \geqslant z\ E(x, y, n)$ esprime la consistenza del sistema dialettico, ovvero il fatto che l'insieme delle sue tesi definitive non è vuoto. Sotto l'assunzione della correttezza dell'aritmetica di Peano PA, Magari dimostra che esiste un sistema dialettico che estende questa teoria ed ha fra le sue tesi definitive l'affermazione della propria consistenza in questa forma (un risultato che successivamente generalizza, slegandolo dalla particolare formula che esprime la consistenza).
L'analisi delle limitazioni espressive è oggetto soprattutto di [89]. Qui Magari isola, seguendo criteri "neopositivistici", l'insieme V_0 delle "proposizioni vere e sensate" di un dato sistema formale F, estensione consistente di PA. Magari definisce le proposizioni "vere e sensate" come chiusura deduttiva dell'insieme delle proposizioni p che non sono teoremi di F e per le quali F dimostra tuttavia che, se la loro negazione è vera, allora è anche dimostrabile in F. Sulla base di queste definisce il sistema "metaformale" F^* associato ad F. Partendo da un dato sistema formale $F = \langle P, T \rangle$, dove P è l'insieme delle formule ben formate del suo linguaggio e T è l'insieme delle tesi, si tratta dunque di estenderlo ad un sistema detto "metaformale" $F^* = \langle P_0, V_0 \rangle$, che è ottenuto focalizzando due specifiche sottoclassi delle espressioni del linguaggio, ossia le "proposizioni sensate" P_0 e le "proposizioni sensate e vere" V_0, dove $P_0 \subseteq P$ e $T \subseteq V_0$. È dimostrabile che entrambe queste collezioni sono limiti inferiori. È interessante notare che in questa cornice cade il teorema di Tarski di indefinibilità della verità. Si dimostra infatti che esiste un "predicato di verità" $\dot{V}_0(x)$ tale che $p \in V_0$ se e solo se $\dot{V}_0(\overline{p}) \in V_0$, cioè la proposizione che esprime la verità di p è vera e sensata[17]. I teoremi limitativi gödeliani si ripropongono invece, in questo contesto, con risultati da cui segue che, sotto le condizioni del primo teorema di incompletezza, esistono proposizioni di F insensate (primo teorema di Gödel). Inoltre, se C è una formulazione della consistenza della teoria metaformale F^* da cui segua $\neg\dot{V}_0(\overline{0 \neq 0}) \in V_0$ – da leggersi: l'espressione la quale afferma che la contraddizione $0 \neq 0$ non è "vera e sensata" appartiene essa stessa alle proposizioni vere e sensate – allora C è insensata (secondo teorema di Gödel). In [90] Magari afferma più seccamente che tutte le formulazioni naturali della consistenza del sistema metaformale sono insensate. Cessa perciò "ogni discrepanza che spinga a distinguere fra teoria e metateoria" e F^* si rende adeguato a costituire la propria metateoria. Essendo i limiti inferiori "dominabili per tentativi ed errori", se ne può concludere che:

> le esigenze che possono portare a modificazioni della teoria assunta come metamatematica sono quelle di natura analoga alle esigenze che spingono i fisici ed ogni naturalista. ([95], p. 13)

Ulteriori caratterizzazioni dell'insieme delle proposizioni vere sensate ed approfondimenti di questo approccio sono stati dati in [153] e [154].

[17] La linea sopra p e in genere sopra un'espressione, indica che stiamo considerando il numerale (cioè il termine del linguaggio della teoria) corrispondente alla sua codifica numerica.

1.3 Il ruolo epistemologico dell'intuizione

Magari parla ripetutamente del ruolo dell'intuizione in matematica, sebbene in termini non rigorosi e senza assumere alcun impegno, per esempio, circa la costituzione della mente e della sensibilità. Riteniamo in ogni caso si possa escludere l'ammissibilità, nella cornice filosofica entro la quale si svolge la riflessione di Magari, di forme di intuizione intellettuale come si spingeva ad ammettere Kurt Gödel. L'intuizione matematica è spesso intesa semplicemente come concreta visualizzazione, conoscenza "spesso accompagnata ad immagini" ([100], p. 43), allo stato embrionale e confuso. In tal caso è verosimilmente da intendersi come visualizzazione di un concetto astratto di genere *naïve*, come quando non immaginiamo una retta come una lunghezza senza larghezza, ma come una striscia di un certo spessore. Magari [100] accenna, un po' ermeticamente, all'ipotesi che l'intuizione sia da collegarsi ad una sovrapposizione di linguaggi diversi "dei quali solo alcuni sono consapevoli" (p. 43). Riguardo al ruolo dell'intuizione nei processi creativi, Magari la interpreta come capacità di operare scelte rare ed inusuali fra un numero di alternative finito:

> ...non abbiamo motivi per escludere che tutta la matematica (anche quando sembra trattare con l'infinito) e più in generale tutta l'attività umana consista in scelte operate su insiemi finiti [...] creative, si direbbe, sono quelle scelte nel finito che non sono facilmente riconducibili a procedimenti già esplicitamente noti. ([92], pp. 44-45)

Le brevi annotazioni di Magari su questo tema (con la sottolineatura del carattere finitario della scelta) appaiono evidentemente ispirate a Poincaré e alla celebre lezione da questi tenuta presso la *Société de Psychologie* a Parigi nel 1908:

> In fact what is mathematical creation? It does not consist in making new combinations with mathematical entities already known.... consists precisely in not making useless combinations and in making those which are useful and which are only a small minority. Invention is discernment, choice. ([129], p. 325)

Le combinazioni più feconde, secondo Poincaré, saranno quelle più rare, formate da elementi tratti da settori molto distanti. L'intuizione matematica appare dunque da associare anche al possesso di una qualche competenza specifica che orienta la scelta e che presuppone dimestichezza con oggetti idealizzati. Tuttavia Magari sembra poi voler contenere il ruolo dell'intuizione, quando osserva, ad esempio, che il "metodo metamatematico", sebbene a causa dei risultati gödeliani non venga più inteso nel senso di fondazione delle teorie matematiche, proprio da tali risultati viene in qualche modo valorizzato:

> con questo metodo, se non altro, il preteso ruolo dell'intuizione in matematica viene ridotto di molto. ([112], p. 9)

Non sfuggirà l'assonanza con il tema bourbakista della purificazione della matematica dall'intuizione. La matematica è un deposito di forme astratte — le strutture — molte delle quali all'origine avevano innegabilmente un contenuto intuitivo. Tuttavia, afferma Bourbaki:

> it is exactly by deliberately throwing out this content that it has been possible to give these forms all the power which they were capable of displaying and to prepare them for new interpretations and for the development of their full power. ([36], p. 1276)

In questo quadro, precisa Magari, l'intuizione conserva nondimeno un ruolo fondamentale come "intuizione dei segni su cui si opera" ([112], p. 9). Si tratta in questo caso dell'intuizione intesa come relazione immediata agli oggetti reali, fisici, non ad astratti oggetti matematici. Gli esempi addotti in [95] e [100] (i numerali come sequenze finite di sbarre |||||), così come lo sviluppo del ragionamento rimandano all'epistemologia di Hilbert, dove la matematica finitaria o dell'intuizione concreta ("a kind of geometry of strings and strokes"), poggiava sostanzialmente su di una concezione dell'intuizione sensibile, più o meno coerentemente di origine kantiana[18]. Magari afferma che i teoremi metamatematici fanno parte di una scienza che riguarda oggetti "concreti", ossia i "segni", soggiungendo però — ben consapevole delle difficoltà che scaturiscono da questa affermazione — che essi vengono "idealizzati". Solitamente, infatti, una fonte di riluttanza all'accettazione di questa tesi è "la sensazione che le nostre previsioni sul comportamento dei segni potranno essere smentite *solo da incidenti riconoscibili come tali* ([95], p. 12). Per esempio l'asserzione che una sbarra | accanto ad un'altra sbarra | dia la configurazione || potrebbe essere smentita in una lavagna che si deforma, ma questa non sarebbe considerata una lavagna "ideale". Circa le intuizioni, o "immagini basilari", tuttavia, in altri lavori, si spinge oltre, fino a distinguere due livelli. Da un lato quello dell'intuizione del discreto, della manipolazione di oggetti "piccoli e duri, ben distinguibili tra loro", siano essi simboli grafici, sonori, elettrici. Dall'altro l'intuizione del continuo, originata dalla manipolazione di oggetti estesi, deformabili, come tessuti dalla trama molto fine o pezzi d'argilla. Se come abbiamo visto per quanto riguarda l'intuizione del discreto, "l'intuizione dei segni", il quadro appare comunque abbastanza delineato, così da rendere sensato un accostamento, *mutatis mutandis*, alle problematiche emerse all'interno dell'epistemologia hilbertiana riguardo agli oggetti "concreti" (in un senso tutto

[18] Secondo il giudizio di Kurt Gödel:

> What Hilbert means by *Anschauung* is substantially Kant's space-time intuition confined, however, to configurations of a finite number of discrete objects. ([47], p. 272)

da chiarire, che comunque non coincide col carattere spazio-temporale) che esistono intuitivamente come esperienza immediata, più evanescente è la questione intorno a quale genere di "intuizione" Magari intenda riferirsi quando parla dell'*intuizione del continuo*. In [100] l'autore osserva che il continuo viene di solito trattato con gli strumenti derivanti dall'intuizione del discreto, soggiungendo che non esistono fenomeni noti che non siano simulabili con mezzi discreti: "non si è trovata ancora un'alternativa al vecchio metodo di studio consistente nel fare a pezzeti le cose e rimetterle insieme in modo schematico e controllato". Du Bois-Reymond [32] sosteneva che per quanto riguarda i fatti concreti, la matematica del continuo dell'*idealista* e quella del discreto dell'*empirista* concordano. La prima costituiva infatti una "estensione conservativa" della seconda. Forse è questo che Magari intende quando afferma che non esistono fenomeni noti che non siano simulabili con mezzi discreti.
In [100] Magari ipotizza inoltre la "granularità" di spazio e materia. Sullo sfondo si intravede dunque, suffragata da studi recenti, una domanda ancor più radicale, ossia se lo spazio-tempo sia continuo oppure invece discreto, come già sosteneva ad esempio Feynman. La matematica applicata alla fisica è per lo più quella del continuo, ma la realtà sottostante può essere sostanzialmente diversa.

1.4 La "fortuna" della matematica nelle applicazioni

Pur approdando ad esiti diversi, l'enfasi posta da Magari sulla distinzione fra matematica pura ed applicata trae origine anch'essa, verosimilmente, dalla frequentazione dei testi russelliani, segnatamente dai *Principia*. Dopo la scoperta delle geometrie non euclidee, entrambe le versioni, euclidea e non euclidea della geometria costituiscono ad esempio, nella visione di Russell, branche della matematica pura, mentre la geometria in quanto indagine sulla struttura del mondo fisico è matematica applicata. I teoremi della geometria pura, secondo Russell, andrebbero pertanto più correttamente formulati attraverso proposizioni in forma di implicazione. Ad esempio il teorema di Pitagora dovrebbe essere enunciato con una premessa: "gli assiomi della geometria euclidea implicano che in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa ecc." Secondo questa prospettiva logicista, nella matematica pura non occorrono in definitiva altri concetti primitivi, se non quelli della logica. Questa è la concezione che Magari definisce "tautologica" della certezza matematica, dalla quale però prende le distanze paventando la possibilità di un *regressus in infinitum*. Egli si pone viceversa all'interno di una prospettiva formalista, accettandone gli esiti "demistificanti". Sebbene infatti non si diano risposte univoche su cosa sia l'attività matematica in genere, sono nondimeno possibili descrizioni parziali di processi che ne colgono aspetti rilevanti:

> la vecchia presentazione della matematica come famiglia di sistemi formali non può certo pretendere di essere più di questo, ma non è detto

> neanche che sia meno di questo; non ci sono cioè argomenti solidi per ritenere che l'attività matematica non sia assimilabile alla costruzione di sistemi formali. ([95], p. 9)

Il porre il problema della certezza delle proposizioni matematiche presuppone innanzitutto che esse si intendano dotate di un significato, che dunque si considerino come teorie interpretate, e che questo significato, o si intenda legato alle applicazioni, oppure si ammetta un ipotetico mondo popolato di enti matematici. Magari rifiuta l'alternativa realista ed osserva che la prima affermazione circa la matematica applicata lascia comunque spazio ad una dimensione della "matematica pura", la quale, prescindendo dalle applicazioni, "non avrebbe significato". Ciò consente di dare una risposta al quesito intorno alla certezza della matematica:

> Finché dunque si mantiene una chiara distinzione fra matematica pura ed applicata [...] sembra più plausibile risolvere il problema dell'apparente certezza delle proposizioni matematiche ritenendole prive di significato. ([95], p. 9)

E tuttavia, accettata questa demarcazione fra matematica pura e matematica applicata, non si può eludere il problema di spiegare il successo della matematica pura nelle applicazioni:

> se le teorie matematiche sono tautologiche o insensate, come si spiega (se la ricerca di una spiegazione ha un senso) questo successo? ([95], p. 15)

In una lettera a Giulano Toraldo di Francia, Magari si soffermava sul problema che Eugene Wigner definì della *irragionevole efficacia* della matematica nelle applicazioni: come avviene che la matematica consente di effetture delle previsioni sul mondo fisico? È quella che Magari chiama la "fortuna della matematica", un problema che egli vedeva strettamente collegato a quello humeano della uniformità della natura. Giova ricordare che Frege usò l'argomento dell'efficacia della matematica nelle applicazioni contro il formalismo. Un formalista, che considera una teoria matematica alla stregua di un gioco di simboli, non è capace di rendere conto dell'applicabilità, questa è infatti ciò che distingue la matematica dal gioco degli scacchi. Al contrario Magari ricorre ripetutamente al paragone tra una teoria matematica e il gioco degli scacchi, o il gioco di Lloyd, dove la posizione iniziale costituisce la base assiomatica, le regole del gioco costituiscono le regole deduttive e le posizioni raggiungibili i teoremi. Lo "stupore" per il successo nelle applicazioni, secondo Magari, può essere inteso sotto due aspetti. Da un lato come stupore per il fatto che, una volta accettate attraverso l'esperienza certe ipotesi o "assiomi", le proposizioni interpretabili che se ne deducono siano verificabili. Erroneamente questo aspetto viene considerato da molti non problematico. Dall'altro lato come stupore per il successo delle ipotesi stesse. Il ruolo della matematica, in questo caso, è "sintetico", nel senso che offre "sintesi fortunate" per le scienze naturali:

> il ruolo delle teorie matematiche nelle applicazioni sembra essere quello di fornire poche formule e regole che si prestino a dare un procedimento di enumerazione di "molte" (di solito infinite) altre formule, parte delle quali interpretabili su fatti noti o anche proposizioni interpretabili su fatti ignoti. ([95], p. 15)

Quelle sintesi che appaiono appropriate allo scopo in realtà sono anch'esse poche e ben fatte. Anche il processo di costruzione delle teorie per tentativi ed errori va dunque precisato meglio, trattandosi di un processo che seleziona le ipotesi da testare secondo un certo criterio. La "fortuna" della matematica dipende dal fatto che normalmente non scegliamo tra tutte le leggi o assiomi che spiegano un certo insieme di fatti, bensì entro un dominio ristretto di ipotesi. Tra le ipotesi di questo dominio, abduttivamente scegliamo le migliori spiegazioni, cioè quelle che ci consentono non solo di spiegare quei fatti, ma anche altri fatti (benché non troppi fatti). Su come si giunga a circoscrivere questo insieme di ipotesi, Magari non indaga ulteriormente e non offre una spiegazione esaustiva. Nella lettera a Toraldo di Francia [87] si limita a dire che si tratta di un comportamento adattivo, portato dell'evoluzione:

> Questo si spiega, direi, in termini di selezione naturale; banalmente, sopravvivono gli animali ben orientati. ([126], p. 204)

Magari non va oltre e rimanda non a caso ancora a Russell, più precisamente alla più matura epistemologia russelliana di un testo come *Human Knowledege* per un approccio naturalistico ad aspetti della conoscenza, giudicata la spiegazione più plausibile[19]. Magari spesso ripete che allo stato attuale non possediamo una sufficiente conoscenza della mente e dei processi cognitivi. Questa epistemologia della matematica di impianto genericamente "naturalistico" pone in evidenza ancora una volta la concezione empirista di fondo nella quale si inscrive la sua riflessione sulla conoscenza matematica.

1.5 Piccole probabilità

Nel quadro di una concezione che vede la crescita della conoscenza come un processo di approssimazione, di creazione e revisione di ipotesi provvisorie, la teoria della probabilità, naturalmente, rivesta un ruolo importante. Sebbene uno sguardo

[19]"The forming of inferential habits which lead to true expectations is part of the adaptation to the environment upon which biological survival depends." B. Russell, *Human Knowledge*, Routledge (1948), p. 526. Magari si riferisce esplicitamente a quest'opera in [95].

panoramico agli scritti di Magari riveli come il concetto di *probabilità* ricorra quasi in modo pervasivo nelle argomentazioni più svariate, è solo il concetto di probabilità *infinitesima*, che finisce per rivestire un ruolo importante. Magari riteneva infatti che le idee e gli argomenti più strani e bizzarri andassero considerati anch'essi in qualche misura *probabili*, così da poter vagliare criticamente qualsiasi argomento la cui veridicità sia anche infinitesimamente probabile. Roberto Salvadari, amico e corrispondente di Magari, descrive le qualità intellettive di quest'ultimo con le seguenti parole:

> Magari dispiegava già allora [primi anni cinquanta] — in modo inappariscente, ma proprio per questo più penetrante più persuasivo — una qualità intellettiva che, tra noi e non soltanto tra noi, non aveva eguali: la propensione a generalizzazioni sempre più ampie che trasferivano la questione su un piano al quale, per gli altri, non era sempre facile accedere. A questa dote ne era strettamente legata un'altra: quella di prendere in considerazione le possibilità più diverse di rispondere ad una domanda. In seria considerazione. Nessuna obbiezione, nemmeno la più paradossale o strampalata, veniva scartata a priori ed egli stesso ne introduceva di sue, di nuove, di impreviste, di sottili, in modo che la probabilità di aver trascurato qualche motivo invalidante di un'affermazione fosse ridotta al minimo. Nessuna sfaccettatura della questione veniva trascurata. ([126], p. 48)

Illuminante al fine di gettare luce su questo aspetto intellettuale del Magari è una lettera, mai pubblicata, da lui indirizzata a tutti i "pensatori robusti". La possibilità della sussistenza di un male assoluto era il tema centrale di questa lettera. Tale problema era considerato da Magari come il più serio da lui "mai riuscito ad immaginare". Per quanto non vi siano argomenti definitivi a favore dell'esistenza di un male assoluto, o se vogliamo infinito, dobbiamo ammettere che non ve ne sono di contrari, e questo, vista l'importanza della questione, basta per prendere in considerazione la probabilità della sua esistenza.

> "Sappiamo" che non esiste niente di corrispondente all'immagine della "Befana", tuttavia se la questione fosse importante dovremmo considerare la sia pur piccolissima (o forse infinitesima) probabilità che ci sia una vecchia signora che porta, cavalcando un asinello, balocchi ai bambini.[20]

Vediamo bene come in questi argomenti sia radicata in Magari la necessità di non dare mai niente per scontato, la necessità di passare sotto la lente dello scetticismo qualsiasi argomento la cui veridicità sia anche infinitamente probabile. Il problema dell'esistenza di un male assoluto è sempre stato presente e pressante nella vita di

[20]Lettera autografa inedita.

Magari, e anche in questo caso gli strumenti logici e matematici furono il mezzo per affrontare, nel tentativo di domare, questo problema. Prendendo spunto dal celebre argomento della scommessa di Pascal, e se vogliamo invertendo tale argomento, Magari sviluppò una teoria formale della morale capace di rendere conto dell'idea che: per quanto piccola sia la probabilità (se vogliamo anche infinitesima) dell'esistenza di un male assoluto è necessario scegliere azioni che abbiano come fine la diminuzione di tale probabilità. Le riflessioni che Magari fece intorno a questo tema, riflessioni prolungate nell'arco di trentanni, si concretizzarono in uno scritto dal titolo *Morale e metamorale: un approccio probabilistico ai problemi morali* ([100]). In questo libro, in cui Magari tentava una fondazione laica della morale, assume grande interesse la teoria della decisione da lui sviluppata. Magari, pur essendo a conoscenza del fondamentale lavoro [137] di Savage, sviluppò un linguaggio del tutto personale e, pur mantenendo fermo lo schema probabilità-valori o della massimizzazione dell'utilità attesa, introdusse autonomamente l'idea di usare campi non archimedei in teoria della decisione. Questa novità permetteva a Magari di rendere conto di due aspetti. Da un lato si rendeva possibile esprimere l'esistenza di valori infiniti positivi, come ad esempio la vita umana, o negativi, come ad esempio il male assoluto. Dall'altro si rendeva possibile associare probabilità infinitesime ad eventualità tipo l'esistenza di un male assoluto[21]. Nel terzo capitolo affronteremo più in dettaglio questo argomento. Qua ci interessa dare una visione generale del concetto di probabilità nel lavoro di Magari. Sebbene indipendente, l'idea di Magari di utilizzare campi non archimedei, non era nuova in letteratura. Per quanto riguarda tentativi di sviluppare una teoria dell'utilità non standard vanno ricordati i lavori [54, 150, 22, 23, 40, 143, 41, 59, 78, 55]. Tentativi di sviluppare una teoria della decisione non archimedea sono invece trattati in [24, 143, 52, 53]. Infine, per quanto riguarda la probabilità non standard sono da ricordare [121, 119, 143, 12, 56]. Lungi dall'essere un elenco completo dei lavori dedicati a queste tematiche, è interessante notare come anche in questo caso Magari si inserisce indipendentemente all'interno di un campo di ricerca ampio e tutt'oggi attivo. Vista la sua originalità e il modo completamente autonomo di sviluppare strumenti e tecniche nuove è difficile accomunare il lavoro di Magari con i lavori sopra citati. Anche le motivazioni alla base sono differenti. Come abbiamo detto Magari considerava il suo, più che come un contributo alla teoria della probabilità, un contributo alla filosofia morale o meglio, come affermava, alla *metamorale*.

Difensore della teoria soggettivista della probabilità, Magari fu profondamente influenzato dalla concezione di Bruno De Finetti, all'autorità del quale si richiama, tra l'altro, anche nella veemente critica contro il cosiddetto "principio di Cournot",

[21]Per Magari la necessità di sviluppare una teoria della probabilità non archimedea si legava anche al problema dell'esistenza di una equi-distribuzione di probabilità ad un insieme di eventi di cardinalità infinito numerabile. Si pensi ad esempio ad una lotteria equa su l'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$. In questo caso, quale probabilità associare all'evento "estrazione del numero n" per $n \in \mathbf{N}$? Per approfondimenti rimandiamo a [98] e [12].

ossia il principio secondo cui le piccole probabilità devono essere considerate nulle. Nel terzo capitolo torneremo in modo più diffuso su tale principio. Sottolineando il ruolo normativo della probabilità, Magari affermava che il calcolo della probabilità, integrando e rendendo più chiari i processi di decisione spontanei, permette di migliorare la capacità di scelta in situazione d'incertezza. La matematica non pretende di descrivere processi spontanei quali le valutazioni di probabilità, ma costituisce un valido e utile strumento al fine si migliorare e raffinare tali processi. Per Magari il concetto di probabilità è fondamentale allo sviluppo del pensiero critico e per tale ragione è importante conoscere e studiare gli strumenti propri della teoria matematica della probabilità.
Prima di concludere precisiamo che: benché Magari ricorresse alla nozione di "probabilità non-archimedea", o "infinitesima", la sua concezione dell'infinito rimase fermamente potenzialistica. Questo aspetto sarà trattato in dettaglio nelle conclusioni del prossimo capitolo.

1.6 Tra strutturalismo e *quasi*-empirismo: un tentativo di sintesi

Secondo un autorevole esponente dell'empirismo ottocentesco come J. S. Mill, la matematica e la logica sono scienze naturali e le leggi aritmetiche sono generalizzazioni induttive di osservazioni. La teoria di Mill secondo cui le verità aritmetiche sono di natura empirica, suscitò, com'è noto, la critica di Frege. Il parallelismo fra la matematica e le scienze empiriche istituito da John Stuart Mill, successivamente è stato nondimeno riproposto da diversi studiosi, appartenenti ai più svariati orizzonti filosofici, sebbene a sostegno di tesi diverse, o talvolta non andando oltre la facile metafora. Ad esempio, in Gödel l'analogia tra matematica e scienze empiriche scaturisce da una forma di realismo platonico e dalla radicata convinzione che la matematica descriva un mondo oggettivo e indipendente alla stregua della fisica[22]. Secondo Russell la logica e la matematica sono in tutto analoghe all'elettrodinamica, e Tarski paragonava la metamatematica, il cui oggetto era costituito dalle teorie formalizzate, alla zoologia, il cui oggetto sono gli animali. Intorno alla crisi della credenza nella certezza assoluta della matematica e sulla assimilazione della matematica alle scienze naturali, si sono diffusi com'è noto studiosi della levatura di Carnap, Curry, Quine, Rosser, Weyl, Bernays, Mostowski. Secondo Putnam [133] "mathematical knowledge is corrigible and not absolute...thus it resembles in many respects empirical knowledge" (p. 61). Curry [28] in particolare si chiede: "why do we need to be sure that a theory is consistent or that it can be derived by an absolutely certain intuition of pure time, before we use it" (p. 61), interrogandosi sulla plausibilità dell'obiettivo perseguito dalle principali scuole fondazionali, ossia

[22] cf. [75].

la certezza assoluta delle teorie matematiche, quando storicamente è accaduto che le dottrine matematiche siano state soggette a revisioni significative, una volta emersa una difficoltà, al pari di quello che avviene nelle scienze empiriche. Parafrasando un commento di Curry al secondo teorema di Gödel, Lakatos affermava che a seguito di questa scoperta, i formalisti avevano due possibilità davanti a sé: quella in effetti intrapresa di estendere il concetto di "matematica finitaria", oppure quella, purtroppo trascurata, di considerare la consistenza della matematica come non dimostrabile a priori, ovvero di considerare *la metamatematica* come una *scienza quasi-empirica*.
Anche se P. Kitcher [68] lamentava che l'empirismo matematico, come alternativa all'apriorismo, non avesse sino ad alla metà degli anni '80 del '900 ricevuto una precisa articolazione, già alla fine degli anni '60 è emerso un orientamento che Putnam [132] e Lakatos [75] hanno definito, appunto, *quasi*-empirismo, caratterizzatosi per una critica al fondazionalismo ed una riproposta dell'empirismo in filosofia della matematica. In particolare a partire da Lakatos, una serie di *maverick philosophers* (Kitcher, Tymoczko, Hersh ecc.) cominciarono poi a pretendere una filosofia della matematica più aderente alla pratica matematica e alla storia della matematica. Magari [91] si riallaccia idealmente a queste posizioni quando parla della "illusione della certezza dei teoremi matematici" e sembra evocare il wittgensteiniano "superstizioso terrore della contraddizione", quando afferma che il fatto di utilizzare un dato sistema formale non ci impegna a ritenerlo consistente: ci impegna solo, afferma Magari, a ritenere che la funzione che associa ad un numero n una probabilità che una dimostrazione di lunghezza n sia contraddittoria cresca lentamente.
Come abbiamo visto vi è un *trait d'union* ideale con l'articolo di Lakatos [75] sulla rinascita dell'empirismo in filosofia della matematica, costituito dal breve scambio epistolare tra Magari, Georg Kreisel e Robert Jeroslow al quale abbiamo fatto più volte riferimento. Per tornare a quel carteggio, il 30 Luglio 1973 Kreisel scriveva a Magari:

> Let me be quite frank, at the risk of being called 'obscurantist': where in our *actual* intellectual experience of number theory do we really proceed by trial and error? Empiricist philosophers *tell* us that this is what was (or: what 'must' have been) done. But is this supported by *genuine* empirical evidence?

Kreisel riteneva che questo particolare modello mancasse di quelli che in [71] definisce *principles of evidence*, necessariamente richiesti per la validità delle idealizzazioni. La sua totale avversione è ribadita nella lettera a Magari del 20 Giugno 1973, dove è bollato come "grotesquely simple-minded (without the least foundation in our intellectual *inference*)". Lakatos [75], quasi in un filo di ideale continuità, ribatteva al giudizio di Kreisel secondo cui l'ipotesi che la conoscenza matematica evolva attraverso tentativi ed errori è empiricamente falsa, con la controaccusa di voler estendere il metodo "aprioristico" anche alle scienze empiriche, resuscitando una sorta di essenzialismo aristotelico. Al di là delle pesanti riserve avanzate all'epoca da Kreisel, diversi studiosi, nella filosofia della matematica più recente, interessati ad un resoconto più realistico dello sviluppo della conoscenza matematica hanno optato per un approccio dove non si parla più di assiomi permanenti, ma di ipotesi provvisorie, trovate per tentativi ed errori, e dove la sostituzione di una ipotesi non comporta l'abbandono del sistema.

Ci pare di poter concludere che Magari, pur non avendo organicamente elaborato una propria posizione filosofica, attraverso i suoi occasionali interventi dette luogo ad una versione del fallibilismo assai originale, se collocata nel contesto culturale degli anni in cui scriveva, maturata verosimilmente attraverso letture popperiane e la frequentazione della nascente filosofia della scienza e della matematica italiane dell'epoca (Geymonat, Agazzi). Essa rivela una tensione tra due epoche della filosofia della matematica, entro le quali si colloca attraverso una elaborazaione del tutto autonoma. Da un lato c'è l'eredità delle grandi scuole di pensiero sui fondamenti della matematica, segnatamente "l'indirizzo metamatematico" e l'immagine bourbakista della matematica, e dall'altro lato la fase inaugurata tra la fine degli anni '60 e l'inizio degli anni '70 del '900 da studiosi come Körner, Kalmár, Polya, Putnam e Lakatos, centrata piuttosto sull'importanza dei procedimenti euristici. Ben radicato in una concezione "formalista", ma aperto a quella visione dinamica successivamente rappresentata dai cosiddetti *maverick philosopher*, Magari sembra tuttavia ideologicamente lontano dall'antiformalismo di Lakatos. A Magari può essere semmai ascritto, come titolo di merito, un tentativo di conciliazione, che secondo alcuni commentatori a Lakatos mancò, fra indagine euristica, centrata sui meccanismi della crescita della conoscenza matematica, e studio metamatematico dei sistemi formali assiomatici. Del resto, come è ribadito in [95], i "sistemi iperformali" con i quali Magari cerca di cogliere l'idea di un processo che evolve per tentativi ed errori costituiscono essi stessi "una proposta diversa che conserva molte caratteristiche del formalismo" e sembrano proponibili "come schematizzazione adeguata del modo di procedere matematico", benché non ammontino propriamente ad una logica della scoperta matematica. Roberto Magari venne a mancare prematuramente e non sappiamo se le riflessioni delle quali abbiamo cercato di dare conto in questo capitolo avrebbero avuto un seguito in questa direzione.

Capitolo 2

Tentativi ed errori in matematica: sistemi dialettici e sistemi quasidialettici

> Mathematics is not a deductive science – that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork.
>
> Paul Halmos

2.1 Introduzione

I sistemi dialettici costituiscono il tentativo fatto da Magari per formalizzare la metamatematica intesa come scienza naturale. Come abbiamo visto, per Magari, i sistemi formali, pur rappresentando in modo adeguato l'attività matematica pura, non riescono a schematizzare l'attività matematica nel suo aspetto dinamico. L'attività matematica in evoluzione sembra meglio catturata da teorie che procedono per tentativi ed errori. I matematici tendono a proporre sistemi formali, e quindi teorie matematiche, sempre più potenti nel momento in cui non siano state trovate contraddizioni. Al contrario, nel caso in cui sia stata derivata una contraddizione, il matematico tenderà a limitare la potenza della teoria eliminando alcune assunzioni di partenza. Il modello degli insiemi dialettici costituisce solo un esempio di sistema iperformale e per certi aspetti non risulta del tutto soddisfacente: ad esempio gli insiemi dialettici ricorsivamente enumerabili risultano essere solo quelli ricorsivi, e già Magari studiò una classe di sistemi intermedia fra quella dei sistemi dialettici e quella dei limiti.

In questo capitolo, anche con l'intento di verificare in che misura i sistemi di Magari possono eventualmente offrire un resoconto rigoroso di alcune idee di Lakatos[1], il meccanismo della aggiunzione e rimozione degli assiomi posto da Magari alla base dei suoi sistemi dialettici è stato sviluppato arricchendolo con un meccanismo di revisione che consente di rimuovere assiomi che appaiano per qualche motivo inadeguati, benché non necessariamente diano luogo a contraddizioni. Gli unici "falsificatori potenziali" esaminati da Magari nel modello originario dei sistemi dialettici sono infatti le contraddizioni. Scopo dei sistemi *quasidialettici*, argomento del presente capitolo, è quello di esaminare, oltre ai "falsificatori logici", ovvero le contraddizioni, anche quelli che Lakatos chiama "falsificatori euristici". Pensiamo ad esempio alla nascita delle geometrie non euclidee. Fin dalla loro origine la caratteristica che contraddistingue i postulati e gli assiomi della geometria Euclidea è l'essere asserzioni la cui verità è garantita dall'evidenza. Tale evidenza non è però ascritta al quinto postulato, o postulato delle parallele, per il quale, nel corso dei secoli sono stati fatti molti tentativi al fine di dimostrarlo o di riformularlo o, addirittura, di sostituirlo con altri equivalenti. Da tali tentativi sono nate le geometrie non euclidee le quali, come è ben noto, sostituiscono il postulato delle parallele sebbene questo non dia origine a nessuna contraddizione.

I falsificatori euristici sono fondamentali allo sviluppo di quelle teorie denominate da Lakatos "quasi-empiriche". Prendendo le mosse dall'analisi della storia della matematica Lakatos presenta esempi, come il teorema di Eulero, al fine di mostrare come lo sviluppo della matematica sia simile a quello di tutte le altre scienze. A suo avviso la filosofia formalista non cattura la reale essenza delle teorie matematiche e per tale motivo suddivide queste in due categorie, *Euclidee* e *quasi-empiriche*.

> The ideal theory [Euclidean] is a deductive system with an indubitable truth-injection at the top (a finite conjuction of axioms) — so that truth, flowing down from the top through the safe truth-preserving channels of valid inferences, inundates the whole system. [...] Scientific theories turned out to be organised in deductive system where the *crucial* truth-value injection was *at the bottom* — at a special set of theorems. But *truth* does not flow upwards. The important logical flow in such *quasi-empirical theories* is not the transmission of truth but rather the retransmission of

[1] In particolare siamo qua interessati alla "logic of proofs and refutation" propria delle teorie quasi-empiriche:

> [...] that informal, quasi-empirical, mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the logic of proofs and refutation. ([76], p. 5.)

> *falsity* — from special theorems at the bottom ('basic statements') up towards the set of axioms. [...] Then a system is Euclidean if it is the *deductive closure* of those of its basic statements which are assumed to be true. Otherwise it is quasi-empirical. ([75], pp. 205-206)

Con la sua critica alla filosofia formalista Lakatos cerca di spostare l'attenzione dalle teorie Euclidee alle teorie quasi-empiriche. Tuttavia, non fornendo nessuna definizione matematicamente rigorosa delle seconde, la discussione si ferma a livello informale. I sistemi quasidialettici possono essere considerati un tentativo di formalizzazione delle teorie quasi-empiriche, in special modo se intese alla stregua dell'interpretazione data da Lolli in [83]:

> Forse quello che Lakatos vuol dire, con la sua prosa patetica nell'ambizione e confusa, è che talvolta deducendo si arriva a risultati che non sono graditi, che non sono quelli che ci si aspettava, o non corrispondono alla funzione di modello a cui la teoria doveva servire; diciamoli brevemente falsi, e allora ovviamente questo fatto si ritrasmette all'indietro agli assiomi, e questi dovranno essere etichettati come falsi, ma allora cambiati. (p. 201)

2.1.1 Notazione, concetti e definizioni preliminari

In questa sottosezione presentiamo i concetti basilari e la notazione che useremo in questo capitolo. Per quanto riguarda le nozioni generali di teoria della computabilità faremo riferimento a [136, 144, 26]. In particolare, per approfondimenti, rimandiamo a [136] per il sistema O della notazione ordinale di Kleene, a [144] per una chiara introduzione agli insiemi Δ^0_2 e ai gradi di Turing. Per quanto riguarda la gerarchia di Ershov rimandiamo a [8]. Infine [26] contiene una chiara esposizione dei gradi di enumerazione e degli operatori di enumerazione.

Notazione

Seguendo la tradizionale scelta fatta in teoria della computabilità denotiamo con ω l'insieme dei numeri naturali. L'insieme potenza di un insieme M sarà denotato da 2^M: quindi 2^ω denota la classe di tutti gli insiemi di numeri naturali; il simbolo $2^{<\omega}$ denota invece la classe di tutti gli insiemi finiti di numeri naturali. Gli elementi di tale classe saranno spesso identificati con i loro indici canonici. Ricordiamo che dato $D = \{2^{d_1}, \dots, 2^{d_n}\} \subseteq \omega$ poniamo $D = D_e$ dove $e = 2^{d_1} + \cdots + 2^{d_n}$ prende il nome di indice canonico di A. Per convenzione poniamo $\emptyset = D_0$. Se non necessario, in seguito, ometteremo l'indice canonico dei sottoinsiemi finiti di ω. Se A è un sottoinsieme di ω, allora i simboli A^c, $|A|$ e χ_A denotano, rispettivamente, il complemento, la cardinalità e la funzione caratteristica di A. Per ogni insieme A, $A(x)$ denota il valore della funzione caratteristica di A su x, cioè $A(x) = \chi_A(x)$. Se riferito ad una stringa finita σ, allora il simbolo $|\sigma|$ denota la lunghezza di σ. Date due stringhe σ e τ indichiamo con $\sigma^\frown\tau$ la concatenazione delle due stringhe. Se σ, τ sono stringhe di numeri, allora σ *precede lessicograficamente* τ, formalmente $\sigma < \tau$, se esiste qualche indice i tale che $\sigma(i) < \tau(i)$ e contemporaneamente $\sigma(j) = \tau(j)$ per tutti i j strettamente minori di i. Se entrambe le stringhe σ e τ sono finite, allora σ *precede lessicograficamente per estensione* τ se la lunghezza σ è più piccola di quella di τ, o se le due stringhe hanno la stessa lunghezza ma $\sigma < \tau$. Per ragioni di comodità la stringa vuota sarà denotata, nella seconda sezione, dal simbolo $\langle\ \rangle$, e, nella terza sezione, dal simbolo λ.

Primi concetti e definizioni

Un insieme A è computabilmente enumerabile (in ciò che segue c.e.) se esiste una funzione computabile totale f tale che A è immagine di f. Ogni insieme c.e. Φ definisce una funzione Φ da insiemi di numeri a insiemi di numeri:

$$\Phi(A) = \{x : (\exists D \text{ finito })[\langle x, D\rangle \in \Phi \text{ e } D \subseteq A]\},$$

per ogni $A \subseteq \omega$. Tale funzione Φ è chiamata un *operatore di enumerazione*. Una *approssimazione computabile a* un operatore di enumerazione Φ è una sequenza $\{\Phi_s\}_{s\in\omega}$ di insiemi tali che $\Phi_s \subseteq \Phi_{s+1}$, $\Phi = \bigcup_s \Phi_s$, e la relazione $x \in \Phi_s$ è decidibile in x, s. Fintantoché gli operatori di enumerazione sono insiemi c.e., possiamo riferirci ad approssimazioni *uniformemente* computabili $\{W_{e,s}\}_{e,s\in\omega}$ degli insiemi c.e., dove

- $\{W_e\}_{e\in\omega}$ è l'indicizzazione standard degli insiemi c.e.[2];
- la relazione $x \in W_{e,s}$ è decidibile in x, e, s ;
- per ogni e, $\{W_{e,s}\}_{s\in\omega}$ è una approssimazione computabile a W_e — cioè $W_{e,s} \subseteq W_{e,s+1}$, e $W_e = \bigcup_s W_{e,s}$ — tale che $W_{e,0} = \emptyset$ e ogni $W_{e,s}$ è finito.

Se $\{A_s\}_{s\in\omega}$ è una sequenza di insiemi, e $x \in \omega$, diciamo che esiste $\lim_s A_s(x)$ se esiste un t tale che per ogni $s \geq t$, $A_s(x) = A_t(x)$. Un insieme A appartiene alla classe Δ^0_2 della gerarchia aritmetica se e solo se esiste una sequenza computabile di insiemi $\{A_s\}$ — cioè la relazione $x \in A_s$ è decidibile in x, s — tale che, per ogni x, esiste $\lim_s A_s(x)$ e inoltre vale la seguente proprietà: (P) $A(x) = \lim_s A_s(x)$, se e solo se esiste una funzione computabile $g(x, s)$ (di codominio $\{0, 1\}$) tale che,

[2] Ricordiamo che un'indicizzazione è standard se è "acceptable". Definito un sistema di indici ϕ come una famiglia di funzioni ϕ^n da ω all'insieme delle funzioni parziali ricorsive n-arie, diciamo che ϕ è *acceptable* se per ogni numero naturale n esistono due funzioni ricorsive f e g tali che $\phi^n_e = \varphi^n_{f(e)}$ e $\varphi^n_e = \phi^n_{g(e)}$ (dove ϕ^n_e indica la funzione parziale ricorsiva di indice e). Per maggiori chiarimenti rimandiamo a [136].

per ogni x, $A(x) = \lim_s g(x, s)$. *La notazione ordinale di Kleene O* e la relativa relazione d'ordine $<_O$ sono definite per passi nel seguente modo: 0 riceve notazione 1. Assumiamo che tutti gli ordinali strettamente minori di γ abbiano ricevuto la loro notazione e che la relazione $<_O$ sia stata già definita per loro. Se $\gamma = \beta + 1$ allora associamo a questo la notazione 2^x per x notazione di β e aggiungiamo la coppia $\langle x, 2^x \rangle$ a $<_O$. Se γ è un limite e per ogni y tale che $\{\varphi_y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ sono notazioni per una sequenza di ordinali con limite y, e tali che, per ogni $i, j \in \omega$, se $i < j$ allora $\langle \varphi_y(i), \varphi_y(j) \rangle \in <_O$ associamo a γ la notazione $3 \cdot 5^y$ e aggiungiamo a $<_O$ la coppia $\langle n, 3 \cdot 5^y \rangle$ per ogni $n \in \omega$ per cui esiste un $m \in \omega$ tale che la coppia $\langle z, f_y(m) \rangle$ appartiene a $<_O$. La notazione ordinale di Kleene permette di definire la *gerarchia di Ershov*, la quale offre un modo per misura la complessità degli insiemi appartenenti alla classe Σ_2^0.[3] I gradi di Turing misurano il livello di insolvibilità algoritmica degli insiemi di numeri naturali. Un insieme $A \subseteq \omega$ è *Turing riducibile* a un insieme $B \subseteq \omega$, formalmente $A \leq_T B$, se esiste una macchina di Turing con oracolo B che decide gli elementi di A. Dati $A, B \subseteq \omega$ diremo che A e B sono *Turing equivalenti*, formalmente $A \equiv_T B$, se $A \leq_T B$ e $B \leq_T A$. È facile vedere che la relazione $\equiv_T$ è una relazione di equivalenza. Un *grado di Turing* è allora una classe di equivalenza della relazione $\equiv_T$. La classe dei gradi di Turing è denotata dal simbolo $\mathcal{D}$. Similmente, dati $A, B \subseteq \omega$ diremo che A è *enumerabilmente riducibile* a B, e scriveremo $A \equiv_e B$, se esiste una procedura effettiva per enumerare A data una enumerazione di B. Definita le relazione di equivalenza $A \equiv_e B$ se e solo se $A \leq_e B$ e $B \leq_e A$, diremo che un *grado di enumerazione* è una classe di equivalenza della relazione $\equiv_e$. La classe dei gradi di enumerazione è denotata dal simbolo $\mathcal{D}_e$. Infine definiamo la *tt* equivalenza. Dati $A, B \subseteq \omega$ diremo che A è *tt-riducibile* a B, e scriveremo $A \equiv_{tt} B$, se esiste una funzione computabile f tale che $x \in A$ se e solo se $f(x) \in B$. Definita le relazione di equivalenza $A \equiv_{tt} B$ se e solo se $A \leq_{tt} B$ e $B \leq_{tt} A$ diremo che un *tt grado* è una classe di equivalenza della relazione $\equiv_{tt}$.

2.2 Sistemi dialettici e sistemi quasidialettici: definizione e primi risultati

2.2.1 Sistemi dialettici

In questa sottosezione presenteremo due definizione di sistema dialettico. Dopo aver introdotto la versione originale di Magari proponiamo una versione rivisitata, la quale, oltre ad essere maggiormente intuitiva, è matematicamente più semplice da usare rispetto a quella originale. Dimostrata l'equivalenza tra i due sistemi identificheremo *tout court* i sistemi dialettici con i sistemi dialettici "rivisitati".

[3]Ricordiamo che un insieme è nella classe Σ_2^0 se è definibile con una espressione che ha un prefisso della forma $\exists\forall$ ("esiste x tale che per ogni y...").

La definizione di Magari

Presentiamo ora formalmente le idee introdotte nella sezione 2.4 del primo capitolo. Preliminarmente ricordiamo che gli ingredienti base di un sistema dialettico sono un numero c chiamato *contraddizione*; una funzione computabile h, denominata *funzione di deduzione*, che permette di derivare conseguenze da un insieme finito D; una funzione computabile f, chiamata *funzione di proposizione*, proponente assiomi che saranno accettati o refutati come *tesi provvisorie* del sistema. Ricordiamo, inoltre, che informalmente i sistemi dialettici lavorano nel seguente modo: ipotizziamo, al passo $x \in \omega$ per $x \geq n$, di aver accettato gli assiomi $f(i_1), \dots, f(i_n)$, dove $i_1 < \dots < i_n$. Se al passo $x + 1$ deriviamo c da $f(i_1), \dots, f(i_m)$, per $m \leq n$, allora rigettiamo temporaneamente $f(i_m)$ continuando tuttavia ad accettare gli assiomi $f(i_1), \dots, f(i_{m-1})$; contemporaneamente aggiungiamo (forse per l'ennesima volta) l'assioma $f(i_m + 1)$ come nuova ipotesi. Diversamente se al passo x non deriviamo c allora aggiungiamo $f(i_n + 1)$ come nuova ipotesi di lavoro. Presentiamo ora rigorosamente la definizione di sistema dialettico come introdotta da Magari in [88].

Definizione 2.2.1. *Un* sistema dialettico *è una tripla* $d = \langle h, f, c \rangle$ *dove*

1. $c \in \omega$;
2. h *è una funzione computabile tale che* $W_{h(\emptyset)} \neq \emptyset$, *e* $W_{h(\{c\})} = \omega$;
3. f *è una permutazione computabile di* ω.

Nota 2.2.2. *Mentre la condizione* $W_{h(\emptyset)} \neq \emptyset$ *pone che la funzione di deduzione* h *deduca qualche cosa, la condizione* $W_{h(\{c\})} = \omega$ *formalizza l'usuale regola "ex falso quodlibet". Per l'adeguatezza della terza richiesta rimandiamo a [88] e alla Nota 2.2.6.*

Dato h è possibile definire un operatore di chiusura algebrica $H : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ assieme ad una sua approssimazione computabile $\{\, K_s(D) : s \in \omega, D \in 2^{<\omega} \,\}$. Ricordiamo che una funzione $F : 2^M \longrightarrow 2^M$ è un *operatore di chiusura su M* se, per ogni $X, Y \subseteq M$,

- $X \subseteq F(X)$;
- $F(X) \supseteq F(F(X))$;
- $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$.

Inoltre un operatore di chiusura F è *algebrico* se $F(X) = \bigcup \{\, F(D) : D \subseteq X,\ D \text{ finito} \,\}$. Al fine di definire H e $\{\, K_s(D) : s \in \omega, D \in 2^{<\omega} \,\}$ consideriamo la funzione computabile h come un operatore di enumerazione[4] Φ:

$$\Phi = \{\langle x, D \rangle : x \in W_{h(D)}\}.$$

[4] Tuttavia Magari in [88] non usa mai, e non parla mai, di operatori di enumerazione.

Data una approssimazione computabile $\{\Phi_s\}_{s\in\omega}$ di Φ, definiamo la sequenze computabile di insiemi c.e. $\{K_s(D) : s \in \omega,\ D \in 2^{<\omega}\}$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} K_0(D) &= D \\ K_{s+1}(D) &= \bigcup \{\, \Phi_{s+1}(E) : E \in 2^{<\omega},\ E \subseteq K_s(D) \,\}\,. \end{aligned}$$

Infine definiamo l'insieme

$$H(X) = \bigcup \{\, K_s(D) : s \in \omega,\ D \in 2^{<\omega}, D \subseteq X \,\}\,.$$

Per una dimostrazione del fatto che H è un operatore di chiusura algebrico rimandiamo a [88]. Dato un sistema dialettico $d = \langle h, f, c\rangle$ chiameremo H, definito come sopra, *l'operatore di chiusura associato a d.*

Insiemi dialettici

Presentiamo ora la definizione di insieme dialettico come introdotta in [88].

Definizione 2.2.3. *Dato un sistema dialettico $d = \langle h, f, c\rangle$, definiamo per induzione due sequenze computabili s_n (dove s_n è una sequenza finita di coppie $\langle x, D\rangle$, con $x \in \omega$ e $D \in 2^{<\omega}$) e $A_n \in 2^{<\omega}$:*

- $s_0 = \langle 0, \{\, f(0) \,\}\rangle$; $A_0 = \emptyset$;
- *assumiamo* $s_n = \langle\langle x_0, X_0\rangle, \ldots, \langle x_m, X_m\rangle\rangle$ *e poniamo*

$$k = \begin{cases} \min \{\, i \le m : c \in X_i \,\} & \textit{se esiste un tale } i, \\ m+1 & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} k & \textit{if } k \le m, \\ m & \textit{if } k = m+1. \end{cases}$$

Definiamo

$$A_{n+1} = \bigcup_{i<k} X_i,$$

e

$$s_{n+1} = \langle\langle x_0, K_n(X_0)\rangle, \langle x_1, K_n(X_0 \cup X_1)\rangle, \ldots, \langle x_{k-1}, K_n(\bigcup_{i<k} X_i)\rangle, \langle x_h{+}1, \{\, f_{x_h+1} \,\}\rangle\rangle.$$

È possibile dimostrare, vedi ad esempio [88], che per ogni x esiste $\lim_n A_n(x)$.

Definizione 2.2.4. *Dato il sistema dialettico $d = \langle h, f, c\rangle$, l'insieme A_d, definito da*

$$A_d(x) = \lim_n A_n(x)$$

è chiamato insieme dialettico associato a d, *oppure,* rappresentato da *d; l'insieme A_d è anche chiamato l'insieme delle* tesi finali di *d. Un insieme A è chiamato* dialettico *se $A = A_d$ per qualche sistema dialettico d.*

Diamo ora una utile caratterizzazione di A_d la cui dimostrazione può essere trovata in [88]:

Lemma 2.2.5 ([88]). *Per ogni x,*

$$f(x) \in A_d \Leftrightarrow c \notin H(A_d \cap \{f(y) : y < x\} \cup \{f(x)\}).$$

Il lemma precedente assicura che: dato un assioma $f(x)$, per $x \in \omega$, al fine di sapere se $f(x)$ appartiene o meno alle tesi definitive quello che conta veramente è conoscere le derivazioni che seguono dall'unione di questo con gli assiomi che lo precedono, in particolare con gli assiomi $f(y)$, per $y < x$, che sono tesi definitive. Tutti gli assiomi che saranno presentati successivamente all'introduzione di $f(x)$ sono irrilevanti a tal fine.

Nota 2.2.6. *Dopo aver definito rigorosamente i sistemi dialettici, siamo ora in posizione di giustificare la ragione per cui la funzione f è una permutazione. Per prima cosa notiamo che l'inniettività non è un grosso problema poiché le ripetizioni possono essere sempre eliminate (se, come in questo caso, il codominio è infinito). Se f non è suriettiva allora, come osservato in [44], i possibili insiemi di tesi finali coincideranno con gli insiemi Σ^0_2, e questo renderebbe meno interessante lo studio di questi sistemi. Tuttavia, a nostro avviso, la ragione più convincente per chiedere la suriettività di f è dovuta al fatto che alcuni dei più importanti e interessanti esempi di sistemi dialettici sono in relazione con le teorie formali (vedi [88, 10]). Se T è un sistema formale (per esempio l'aritmetica di Peano), allora (sotto una adeguata codifica delle sentenze del linguaggio di T), potremmo considerare c come una sentenza falsa e h come una funzione computabile tale che per ogni insieme finito D, $W_{h(D)}$ è l'insieme dei numeri che T dimostra essere conseguenze di D. In questo caso H è l'operatore di deduzione logica associato a T, cioè per ogni insieme $X \subseteq \omega$, $H(X)$ è l'insieme di numeri che T può derivare da X. Scelta una permutazione computabile f la tripla $d = \langle h, c, f \rangle$ è un sistema dialettico. I connettivi logici sono pensati come funzioni computabili, dati $\vee, \neg$ (giusto per menzionarli due), valgono le seguenti proprietà: per ogni $X \subseteq \omega$, $x, y \in \omega$, $c \in H(\{x, \neg x\})$, $x \vee \neg x \in H(\emptyset)$, $H(X \cup \{x \vee y\}) = H(X \cup \{x\}) \cap H(X \cup \{y\})$. Queste proprietà di H, e il fatto che f è suriettiva, bastano a mostre che se $c \notin H(\emptyset)$ allora A_d è un* completamento *di T, in particolare, per ogni x, $A_d \cap \{x, \neg x\}$ è un singoletto.*

2.2.2 Sistemi dialettici rivisitati

Riformuliamo ora la definizione originale di Magari in un linguaggio più conveniente ai nostri scopi. Nel resto di questo capitolo denoteremo $f(i)$ con f_i. C'è un modo preciso in cui possiamo descrivere l'operatore H associato ad un sistema dialettico come un operatore di enumerazione. Ricordiamo che un operatore di enumerazione può essere composto in modo uniforme: dato un operatore di enumerazione Ψ, sia

Ψ^n la composizione di Ψ con se stesso iterato n volte, cioè $\Psi^{n+1}(X) = \Psi(\Psi^n(X))$, dove

$$\Psi^0 = \{ \langle x, \{ x \} \rangle : x \in \omega \} .$$

Allora la relazione $\langle x, D\rangle \in \Psi^n$ (in n, x, D) è c.e..
Posto

$$\Psi^\omega = \{\langle x, D\rangle : (\exists n)[\langle x, D\rangle \in \Psi^n]\}$$

vale il seguente:

Lemma 2.2.7. *Se Ψ è un operatore di enumerazione tale che $\Psi(Y) \supseteq Y$ per ogni Y, allora per ogni X, $\Psi^\omega(X)$ è il minimo punto fisso Y di Ψ, con $Y \supseteq X$. Inoltre, Ψ^ω è un operatore di enumerazione di chiusura algebrico. Inversamente, se Ψ è un operatore di enumerazione di chiusura algebrico, allora $\Psi = \Psi^\omega$.*

Dimostrazione. Notiamo che:

$$\Psi^\omega(X) \subseteq \Psi(\Psi^\omega(X)),$$

dunque assumiamo che per ogni Y, $Y \subseteq \Psi(Y)$. Se $x \in \Psi(\Psi^\omega(X))$ allora esiste un insieme finito D e un numero n, tale che

$$\langle x, D\rangle \in \Psi \,\&\, D \subseteq \Psi^n(X),$$

quindi $x \in \Psi^{n+1}(X)$ e allora $x \in \Psi^\omega(X)$.
Assumiamo ora che $X \subseteq Y$ e $\Psi(Y) = Y$. Per induzione su n è facile vedere che per ogni n, $\Psi^n(X) \subseteq Y$, quindi $\Psi^\omega(X) \subseteq Y$. Le rimanenti asserzioni del lemma sono immediate. □

Sia $d = \langle h, f, c\rangle$ un sistema dialettico e sia H l'operatore di chiusura associato a d.

Lemma 2.2.8. *H è un operatore di enumerazione e per ogni insieme X, $H(X)$ è il minimo punto fisso $Y \supseteq X$ dell'operatore di enumerazione $\Psi = \Phi \cup \{\langle x, \{x\}\rangle : x \in \omega\}$, dove*

$$\Phi = \{ \langle x, D\rangle : x \in W_{h(D)} \} .$$

Dimostrazione. In cioè che segue $\{ \Phi_s : s \in \omega \}$ è un'approssimazione computabile di Φ. Prima di tutto, poiché per ogni insieme Y, $Y \subseteq \Psi(Y)$, è chiaro che $H(X) \subseteq \Psi(H(X))$. Per mostrare $\Psi(H(X)) \subseteq H(X)$, notiamo che:

$$\begin{aligned} x \in \Psi(H(X)) &\Rightarrow (\exists E \in 2^{<\omega})[E \subseteq H(X) \,\&\, x \in \Psi(E)] \\ &\Rightarrow (\exists E \in 2^{<\omega})(\exists D \in 2^{<\omega})(\exists s)[D \subseteq X \,\&\, E \subseteq K_s(D) \\ &\qquad \&\, [x \in \Phi_{s+1}(E) \vee x \in E]] \\ &\Rightarrow (\exists D \in 2^{<\omega})[D \subseteq X \,\&\, x \in K_{s+1}(D)] \\ &\Rightarrow x \in H(X). \end{aligned}$$

La seconda implicazione è motivata dal fato che per ogni $e \in E$, dove E è un insieme finito, esistono un s e un insieme finito D tali che $e \in K_s(D)$, ma allora usando la proprietà di monotonicità di $K_s(D)$ (K aumenta al crescere di s e di D: vedi [88]) esistono almeno un s e un $\subseteq$-minimale D, tale che $E \subseteq K_s(D)$.
In virtù del Lemma 2.2.7, basta ora mostrare che $H(X) \subseteq \Psi^\omega(X)$. Per ogni insieme finito D, usando il fatto che per ogni insieme Y, $\Phi \subseteq \Psi$ e $Y \subseteq \Psi(Y)$, è facile vedere per induzione su s che $K_s(D) \subseteq \Psi^{s+1}(D)$. Ora, se $x \in H(X)$ allora esistono un s e un insieme finito D tale che $x \in K_s(D)$: questo implica che esiste un insieme finito E tale che $x \in \Phi_{s+1}(E)$ e $E \subseteq K_s(D)$; quindi $x \in \Psi(\Psi^{s+1}(D))$, che implica $x \in \Psi^\omega(X)$. □

Sistemi dialettici rivisitati: definizione

Nella prossima definizione introduciamo i *sistemi dialettici rivisitati*. Nel Teorema 2.2.13 mostreremo l'equivalenza tra questi e i sistemi dialettici come definiti da Magari.

Definizione 2.2.9. *Un* sistema dialettico rivisitato *è una tripla $d = \langle H, f, c\rangle$, dove f è una permutazione computabile di ω, $c \in \omega$ e H è un operatore di enumerazione tale che $H(\emptyset) \neq \emptyset$, $H(\{c\}) = \omega$ e inoltre H è un operatore di chiusura algebrico, cioè per ogni $X \subseteq \omega$, H soddisfa le seguenti proprietà:*

- *$X \subseteq H(X)$;*
- *$H(X) \supseteq H(H(X))$.*

Insiemi dialettici rivisitati

Sia $d = \langle H, f, c\rangle$ un sistema dialettico rivisitato e sia $\{H_s\}_{s\in\omega}$ una approssimazione computabile a H (il Lemma 2.2.12 (3) stabilirà l'indipendenza dell'approssimazione).

Definizione 2.2.10. *Dati d e $\{H_s\}_{s\in\omega}$ come sopra, definiamo per induzione i seguenti parametri computabili: A_s (un insieme finito), r_s (una funzione tale che per ogni x, $r_s(x) = \emptyset$ oppure $r_s(x) = \{f_x\}$), $p(s)$ (un numero, il più grande numero m tale che $r_s(m) \neq \emptyset$), $h(s)$ (un numero). In aggiunta definiremo alcuni parametri derivati: $L_s(x) = \bigcup_{y<x} r_s(y)$ e per ogni $i < p(s)$, $\chi_s(i) = \bigcup_{j\leq i} H_s(L_s(j))$.*

Passo 0.

Definiamo $p(0) = 0$, $h(0) = 0$,

$$r_0(x) = \begin{cases} \{f_0\} & \text{se } x = 0, \\ \emptyset & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

e poniamo $A_0 = \emptyset$.

Passo $s + 1$.

Sia $p(s) = m$. *Distinguiamo i seguenti casi:*

1. *non esistono* $z \leq m$ *tali che* $c \in \chi_s(z)$*: in questo caso poniamo* $p(s+1) = m+1$ *e definiamo*
$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_s(x) & x \leq m, \\ \{f_{m+1}\} & se\ x = m+1, \\ \emptyset & se\ x > m+1; \end{cases}$$

2. *esistono* $z \leq m$ *tali che* $c \in \chi_s(z)$*: in questo caso poniamo* $p(s+1) = z+1$ *e definiamo*
$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_s(x) & se\ x < z, \\ \{f_{z+1}\} & se\ x = z+1, \\ \emptyset & se\ x = z\ or\ x > z+1. \end{cases}$$

Infine definiamo $h(s+1) = p(s+1)$ *se si applica la Clausola (1), altrimenti* $h(s+1) = p(s+1) - 1$ *e poniamo*

$$A_{s+1} = \bigcup_{i<h(s+1)} \chi_{s+1}(i) (= H_{s+1}(L_{s+1}(h(s+1) - 1)))$$

(dove $A_{s+1} = \emptyset$*, se* $h(s+1) = 0$*). Quest'ultima uguaglianza è giustificata dalla monotonia rispetto alla inclusione di* H_{s+1}.

La figura 2.1 e la figura 2.2 illustrano il passaggio dal passo s al passo s+1, in accordo, rispettivamente, alla Clausola (1) e alla Clausola (2) della Definizione 2.2.10. Nelle figure, se f_v è posizionato sopra v allora $r(v) = \{f_v\}$, altrimenti $r(v) = \emptyset$.

f_0			f_3		f_5	f_m	
0	1	2	3	4	5 ----------	m	
f_0			f_3		f_5	f_m	f_{m+1}
0	1	2	3	4	5 ----------	m	$m+1$

Figura 2.1: Dal passo s (configurazione prima sequenza) al passo s+1 (configurazione seconda sequenza) utilizzando la Clausola (1).

Definizione 2.2.11. *Chiamiamo* A_s *l'insieme delle* tesi provvisorie *di* d *al passo* s. *L'insieme* A_d*, definito nel seguente modo:*

$$A_d = \{ f_x : (\exists t)(\forall s \geq t)[f_x \in A_s] \}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
f_0 & & & f_3 & & f_5 & & f_z & & f_m \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & z & z+1 \;\cdots\cdots & m
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_0 & & & f_3 & & f_5 & & & f_{z+1} \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & z & z+1
\end{array}$$

Figura 2.2: Dal passo s (configurazione prima sequenza) al passo $s+1$ (configurazione seconda sequenza) utilizzando la Clausola (2).

è chiamato l'insieme delle tesi finali *di d. Spesso scriveremo $A_{d,s} = A_s$ quando vogliamo specificare il sistema dialettico rivisitato d. Un insieme $A \subseteq \omega$ è chiamato* dialettico rivisitato *se $A = A_d$ per qualche sistema dialettico rivisitato d.*

Sebbene la sequenza $\{A_{d,s}\}_{s\in\omega}$ dipende dalla scelta dell'approssimazione ad H, dal Lemma 2.2.12 segue che lo stesso non vale per l'insieme A_d. Le dimostrazioni dei punti (1) e (2) sono posticipate alla Sezione 2.2.4, dove proveremo la stessa proposizione per i sistemi quasidialettici, dei quali, come vedremo, i sistemi dialettici rivisitati sono un caso particolare.

Lemma 2.2.12. *Sia $d = \langle H, f, c\rangle$ un sistema dialettico rivisitato. Per ogni x,*

1. *esiste $A_d(x) = \lim_s A_s(x)$;*
2. *esiste $r(x) = \lim_s r_s(x)$; $f_x \in A_d$ se e solo se $r(x) = \{f_x\}$; ponendo $L(x) = \bigcup_{y<x} r(y)$ segue che*

$$f_x \in A_d \Leftrightarrow c \notin H(L(x) \cup \{f_x\});$$

3. *$r(x)$, $L(x)$, e l'insieme A_d non dipendono dalla scelta dell'approssimazione computabile ad H.*

Dimostrazione. La dimostrazione di (1) e (2) sono posticipate alla Sezione 2.2.4: (1) seguirà dal Corollario 2.2.32; (2) sarà invece una conseguenza del Lemma 2.2.22, Lemma 2.2.28 e del Lemma 2.2.30.
Infine il punto (3) segue facilmente da (2) per induzione su x. Difatti $L(0) = \emptyset$ e $f_0 \in A_d$ se e solo se $r(0) = \{f_0\}$, se e solo se $c \notin H(\{f_0\})$. Assumiamo l'ipotesi per x, allora $L(x+1) = L(x) \cup r(x)$ e dunque $f_{x+1} \in A_d$ se e solo se $r(x+1) = \{f_{x+1}\}$ se e solo se $c \notin H(L(x+1) \cup \{f_{x+1}\})$. $\square$

2.2.3 Equivalenza tra sistemi dialettici e sistemi dialettici rivisitati

Non è difficile vedere che i sistemi dialettici rivisitati sono equivalenti ai sistemi dialettici come definiti originariamente da Magari. In questa sezione mostriamo infatti che tali sistemi danno origine alla stessa classe di insiemi dialettici.

Teorema 2.2.13. *Possiamo passare uniformemente da una funzione computabile h ad un operatore di chiusura algebrico H tale che: per ogni coppia f, c (dove f è una funzione computabile e $c \in \omega$) se $d = \langle h, f, c\rangle$ è un sistema dialettico allora $d' = \langle H, f, c\rangle$ è un sistema dialettico rivisitato tale che $A_d = A_{d'}$. Inversamente, possiamo passare uniformemente da un operatore di enumerazione H a una funzione computabile h tale che: per ogni coppia f, c (dove f è una funzione computabile e $c \in \omega$) se $d' = \langle H', f, c\rangle$ è un sistema dialettico rivisitato allora $d = \langle h, f, c\rangle$ è un sistema dialettico tale che $A_{d'} = A_d$.*

Dimostrazione. Data una funzione computabile h, come H prendiamo l'operatore di enumerazione associato a d. Notiamo che, anche in mancanza del sistema dialettico d, possiamo costruire in modo uniforme un tale H da h (basta infatti prendere $H = \Psi^\omega$, dove Ψ è costruito da h come nella prova del Lemma 2.2.8).
Inversamente, dato un operatore di enumerazione H', sia h una funzione computabile tale che $h(D)$ è un indice c.e. di $H'(D)$, per ogni insieme finito D. Sia ora $d' = \langle H', f, c\rangle$ un sistema dialettico rivisitato e sia $\Psi = \Phi \cup \{\langle x, \{x\}\rangle : x \in \omega\}$, dove

$$\Phi = \{\, \langle x, D\rangle : x \in W_{h(D)} \,\}\,.$$

Allora, per le assunzioni su H', $\Psi(D) = \Phi(D) = H'(D)$ per ogni insieme finito D e $\Psi^\omega = \Psi = H'$. D'altro canto, per il Lemma 2.2.8, l'operatore di chiusura algebrico H associato a $d = \langle h, f, c\rangle$ soddisfa $H = \Psi^\omega$, quindi $H = H'$.
Il resto della prova segue dalla monotonicità dell'operatore di enumerazione, dalle loro approssimazioni e dagli operatori K_s introdotti nella definizione di Magari. Al passo $n + 1$ esiste una ovvia correlazione tra la sequenza

$$\langle\langle x_0, X_0\rangle, \langle x_1, X_1\rangle, \dots, \langle x_m, X_m\rangle\rangle$$

considerata nella Definizione 2.2.1 e la sequenza

$$\langle\langle x_0, \chi_n(x_0)\rangle, \langle x_1, \chi_n(x_1)\rangle, \dots, \langle x_m, \chi_n(m)\rangle\rangle$$

che segue dalla Definizione 2.2.9, dove, in quest'ultimo caso, $\langle x_0, \dots, x_m\rangle$ è la lista, in ordine crescente, di tutti gli i tali che $r_n(i) \neq \emptyset$. Se d e d' sono rispettivamente un sistema dialettico (come definito da Magari) e un sistema dialettico rivisitato tra loro connessi come ora visto, allora al passo s abbiamo $A_{d,s} \neq A_{d',s}$ ma, come è facile vedere dal Lemma 2.2.5 (che caratterizza A_d) e dal Lemma 2.2.12 (2) (che caratterizza $A_{d'}$), $A_d = A_{d'}$. □

In virtù del Teorema 2.2.13, nel resto del capitolo, i *sistemi dialettici* saranno sempre presentati come sistemi dialettici rivisitati, cioè come triple $\langle H, f, c\rangle$ dove H è un operatore di chiusura algebrico; oppure come una tripla $\langle H, f, c\rangle$ dove H è un operatore di enumerazione tale che $X \subseteq H(X)$, per ogni insieme X. In quest'ultimo caso, usando il Teorema 2.2.13, ci riferiremo di fatto a $d = \langle H^\omega, f, c\rangle$. Notiamo che la richiesta $X \subseteq H(X)$, per ogni X, non elimina l'effettività. Possiamo difatti sempre passare in modo effettivo da H all'operatore di enumerazione $H \cup \{ \langle x, \{x\}\rangle : x \in \omega \}$, il quale, per ogni $X \subseteq \omega$, soddisfa la richiesta $X \subseteq H(X)$. Conseguentemente gli *insiemi dialettici* saranno sempre presentati come insiemi dialettici rivisitati.

Lemma 2.2.14 ([88])**.** *Se $A \in \Pi^0_1$ e $A \neq \omega$, allora esiste un sistema dialettico d tale che $A = A_d$.*

Dimostrazione. Se $A = \emptyset$ allora $A = A_d$ per ogni sistema dialettico $d = \langle H, f, c\rangle$ tale che $c \in H(\emptyset)$. Sia allora $A \neq \emptyset$ e assumiamo che $A \in \Pi^0_1$ e $A^c \neq \emptyset$. Siano $a \in A$ e $b \in A^c$. Definiamo

$$H = \{\langle y, \{x\}\rangle : x \notin A, y \in \omega\} \cup \{\langle a, \emptyset\rangle\} \cup \{\langle x, \{x\}\rangle : x \in \omega\}.$$

(Poniamo $\langle a, \emptyset\rangle \in H$ per soddisfare $H(\emptyset) \neq \emptyset$.) Notiamo che H è un operatore di chiusura algebrico. Infatti, sia $X \subseteq \omega$: chiaramente $X \subseteq H(X)$. D'altro canto, se $X \cap A^c \neq \emptyset$ allora $H(X) = \omega$, quindi $H(X) = H(H(X))$. Se $X \subseteq A$, allora $H(X) = X \cup \{a\}$, da cui segue ancora che $H(X) = H(H(X))$. Prendiamo $d = \langle H, f, b\rangle$, dove f è la funzione di identità. È facile vedere che d è il sistema dialettico desiderato. $\square$

Sebbene ogni insieme co-c.e.[5], differente da ω, sia dialettico, è interessante osservare (vedi [88]) che nessun insieme c.e. è dialettico a meno che non sia decidibile. Dal momento che gli insiemi dialettici che rappresentano una teoria formale corrispondono al completamento di tale teoria (vedi la Nota 2.2.6), questa osservazione non è sorprende poiché corrisponde al ben noto fatto che ogni teoria c.e. completa è decidibile. Notiamo inoltre che ω non è un sistema dialettico poiché, per ogni sistema dialettico d, non può mai accadere che $c \in A_d$.

2.2.4 Sistemi quasidialettici

In questa sottosezione definiamo e studiamo i sistemi quasidialettici. Questi sono un'estensione dei sistemi dialettici, pensati al fine di rendere il metodo per tentativi ed errori come definito da Magari più aderente alla pratica matematica della revisione. La proposta che qua presentiamo prende le mosse, e per certi aspetti precisa, differenti posizioni empiriste à la Lakatos. Dopo aver definito formalmente i sistemi quasidialettici, proveremo alcune fondamentali proprietà di questi e degli insiemi che

[5] Ricordiamo che un insieme A è co-c.e. se e solo se $A \in \Pi^0_1$.

rappresentano, chiamati insiemi quasidialettici.

I sistemi quasidialettici permetteranno di analizzare in che misura i sistemi dialettici siano in grado di catturare quella visione di matematica che procede per tentativi ed errori sostenuta da Magari; in ultima analisi permetteranno di testare le seguenti parole di Magari (cf. [88]):

> il loro [sistemi dialettici] eventuale interesse riposa su certe ipotesi, opinabili, ma, a giudizio dell'autore, sostenibili, riguardanti i sistemi considerati, per esempio l'ipotesi che i sistemi considerati schematizzino bene un modo di procedere sostanzialmente ammesso dalla comunità matematica.

Magari sostiene dunque che il significato generale della sua proposta, nonché la sua eventuale fecondità concettuale, possa essere pienamente compresa solo nel momento in cui consideriamo la cornice filosofica in cui i sistemi dialettici sono incorporati. Come abbiamo visto nel capitolo precedente la cornice filosofica che Magari ha in mente consiste in una forma (piuttosto liberale) di empirismo. Cioè, le teorie matematiche non sono composti statici di verità eterne, ma piuttosto si evolvono nel tempo, mediante un processo in cui gli assiomi sono (anche) scelti tramite un procedimento di tentativi ed errori. È chiaro che, a questo livello di genericità, tale posizione è compatibile con diversi orientamenti in filosofia della matematica (per esempio, Lakatos apre il suo [75] presentando diversi punti di vista che, a suo parere, sono consistenti con la filosofia empirista). Ricordiamo ancora che, quando Magari introdusse i sistemi dialettici non aveva intenzione di sostenere nessuna posizione precisa di empirismo. Al fine di chiarire quest'ultimo punto è utile precisare due aspetti metodologici che, sebbene implicitamente, emergono dalla proposta di Magari:

1. i sistemi dialettici sono *estremamente generali*, nel senso che sono imposti pochi requisiti ai loro componenti di base, cioè all'operatore di deduzione H, alla funzione proponente f e infine al simbolo di contraddizione c. Ad esempio, in generale, H non deve codificare alcuna regola logica ben nota.[6]

2. i sistemi dialettici sono *oggetti puramente sintattici*, cioè sono privi di una semantica formale. Tuttavia, come abbiamo appena detto, c'è una semantica (informale) intesa, che li porta a essere una buona rappresentazione di " un certo modo di procedere, essenzialmente ammesso dalla comunità matematica ". Il contributo principale dei sistemi quasidialettici è esattamente quello di estendere i confini di questa semantica intesa.

[6] Sistemi dialettici che obbediscono a precise restrizioni su H che riflettono il comportamento dei connettivi logici sono studiati in [88, 10].

Dopo il lavoro di Lakatos sembra inevitabile considerare la revisione di assiomi, e non solo la loro eliminazione, come un metodo rilevante in teorie che procedono per tentativi ed errori. I sistemi quasidialettici consentono di investigare la relazione tra sistemi dialettici e una forma di empirismo, concernete teorie matematiche, che incorpora la nozione di "revisione". I sistemi che presenteremo sono infatti capaci di formalizzare l'idea informale di revisione e un loro confronto con i sistemi dialettici permetterà di raggiungere lo scopo prefissatoci. La strategia che ci proponiamo è la seguente. Iniziamo dal porci la seguente domanda: i sistemi dialettici formalizzano realmente l'intuizione informale di una teoria matematica che, nella scelta dei suoi assiomi, procede per tentativi ed errori? A prima vista, una risposta pienamente positiva sembra essere ostacolata dalla mancanza, all'interno della formalizzazione dei sistemi dialettici, di una delle chiavi caratteristiche dei processi per tentativi ed errori, vale a dire una qualche nozione di revisione tramite la quale le nostre proposizioni, in presenza di un possibile problema, non sono scartate ma piuttosto sostituite. I "monster barring" di Lakatos (vedi [76]) forniscono un esempio storico di un modo in cui un'ipotesi matematica, nel momento in cui incontra un controesempio, viene raffinata, invece di essere semplicemente rimossa. I sistemi dialettici sembrano essere inidonei per questi casi, dal momento che la derivazione di una contraddizione impone di scartare l'assioma, e nessuna sostituzione, o perfezionamento, viene considerato. Per tale ragione modifichiamo la definizione originale di Magari con l'introduzione dei sistemi quasidialettici tramite i quali formalizziamo l'idea di revisione. A questo punto si rende possibile confrontare i sistemi dialettici e i sistemi quasidialettici in termini di espressività e di contenuto informativo, e quindi, verificare se una tale nozione di revisione sia già integrata nei sistemi originali di Magari.

Prima di presentare una definizione formale di questi nuovi sistemi, assieme ad alcuni commenti informali utili alla comprensione del loro comportamento, concludiamo concentrandoci su due aspetti generali, e per certi aspetti preliminari, della formalizzazione che proponiamo.
I sistemi quasidialettici estendono i sistemi dialettici aggiungendo due simboli: c^- e f^-. Approssimativamente, il ruolo di f^- è quello di sostituire un certo assioma che, nel corso della computazione ha prodotto qualche "problema" (formalmente codificato con il simbolo c^-) con un altro assioma. Dunque, mentre c rappresenta la contraddizione logica, c^- rappresenta una grande varietà di problemi che potrebbero condurre un matematico alla sostituzione di un assioma. Al livello di generalità in cui la nostra proposta è presentata, come del resto quella di Magari, la specificità di questi tipi di problemi è ignorata. Dunque, al simbolo c^- non associamo nessuna semantica specifica. Al contrario, il nostro scopo è quello di mantenere il significato inteso di c^- abbastanza vago in modo da poter incorporare un'ampia classe di problemi. Questi problemi non appartengono necessariamente al lato formale della pratica matematica. Infatti, grazie alla generalità della nostra proposta, questi

possono includere ogni tipo di *desiderata* informali che possiamo aspettarci da un assioma, come ad esempio la fecondità o la semplicità — o anche ragioni psicologiche o estetiche (queste sono pienamente ammissibile fin tanto che supportino qualche ragione per sostituire un dato assioma). Questa tendenza alla generalità vale anche per la funzione f^-. In particolare, non chiediamo nessuna nozione di rilevanza, tra assiomi e la loro possibile sostituzioni tramite f^-, che potrebbe valere per tutti i sistemi. L'unica condizione che imporremo alla f^- è che questa sia calcolabile. Questa propensione alla generalità rispetto alla funzione f^- potrebbe sembrare in contrasto con il nostro tentativo di catturare l'idea informale di revisione. Infatti, una volta respinta qualsiasi nozione di pertinenza relativa al comportamento di f^-, come possiamo affermare che il concetto di revisione che proponiamo sia da considerarsi come un raffinamento di un assioma? Ancora una volta facciamo appello alla generalità. Dal momento che i problemi codificati da c^- sono pensati come il più generale possibile, non vogliamo limitare le loro soluzioni (vale a dire, gli output di f^-) tramite una regola di rilevanza *a priori.* La f^- può essere meglio compresa se pensata come una funzione che impone un certo numero di correzioni alla f: vale a dire, se è possibile derivare da qualche assioma un problema, sostituiamo tale assioma con uno nuovo, e costringono il sistema a riprendere la computazione da questo nuovo assioma.
Concludiamo citando un ulteriore fenomeno che rappresenta un'importante differenza tra i sistemi dialettici e quelli quasidialettici. In generale, i secondi dipendono dalle approssimazioni all'operatore H, nel senso che diverse approssimazioni dello stesso sistema potrebbero creare diversi insiemi di tesi finale. Ciò è dovuto al fatto che, all'interno di un sistema quasidialettico, un insieme di assiomi X potrebbe derivare sia c che c^-. Pertanto, in questo caso, ci saranno alcune approssimazioni in cui X deriva c prima di c^-, mentre in altre X deriva c^- prima di c. Come risulterà chiaro in seguito, questa differenza influenzerà i corrispondenti insiemi di tesi finali. In particolare, presenteremo un esempio di un sistema quasidialettico il cui insieme di tesi finali dipende dalla scelta dell'approssimazione all'operatore H.

Sistemi quasidialettici: definizione

La definizione dei sistemi quasidialettici è modellata su quella dei sistemi dialettici come presentati nella Sezione 2.2.9.

Definizione 2.2.15. *Un* sistema quasidialettico *q è una quintupla $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$, tale che $\langle H, f, c \rangle$ è un sistema dialettico e q soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *$c^- \in \omega$;*

2. *f^- è una funzione totale computabile e $c^- \notin range(f^-)$;*

3. f^- è aciclica*, cioè per ogni x, la $f^- -$ orbita di x è infinita, dove, per ogni funzione g e numero x, la g-*orbita *di x è definita dall'insieme*

$$orb_g(x) = \{ x, g(x), g(g(x)), \dots, g^n(x), \dots \}.$$

Se $c \neq c^-$ allora q è chiamato un sistema quasidialettico proprio.

Chiamiamo f^- la *funzione di revisione*, e c^- il *controesempio*[7].

Nota 2.2.16. *Facciamo ora qualche osservazione inerente la condizione (3). Sembra ragionevole limitarci ad investigare sistemi in cui l'operazione di sostituzione è "arricchente" nel senso seguente. Supponiamo di avere un assioma ax_1 insoddisfacente (ricordiamo ancora una volta che questo potrebbe avvenire per diverse ragioni). Allora lo sostituiamo con l'assioma ax_2. Ipotizziamo che in seguito si verifichi qualche problema con ax_2, e quindi dobbiamo sostituire anche quest'ultimo con un terzo assioma ax_3. Ora, volendo armonizzare la definizione di f^- con qualche idea informale di "prova ed errore", in cui la conoscenza è ottenuta attraverso una successione di proposte sempre più raffinate, sembra naturale chiedere che ax_3 sia diverso da ax_1. L'aciclicità formalizza questa intuizione. È importante notare che la condizione (3) non è effettiva. Questo può sembra fortemente in conflitto con i sistemi dialettici in cui tutte le componenti di base sono calcolabili. Invece di considerare questo come un aspetto negativo della nostra formalizzazione, sosteniamo che tale fatto esprime solo uno dei limiti ben noti, in termini di effettività, che sorgono quando lavoriamo con i sistemi formali. Dopo tutto, i matematici sarebbero anche felici di sapere a priori se i loro sistemi sono coerenti o no - ma, ahimè, a causa dei teoremi di Gödel, semplicemente non possono.*

Le nostre definizioni di *tesi provvisorie* e *tesi finali* seguono quelle introdotte da Magari per i sistemi dialettici. La differenza consiste, naturalmente, nel ruolo svolto dagli ulteriori simboli f^- e c^-. Informalmente, se in un determinato passo s possiamo derivare c^- da un insieme di assiomi $f_0, \dots, f_n$, allora sostituiamo f_n con $f^-(f_n)$. Dunque c^-, invece di eliminare semplicemente un assioma, impone una revisione (magari un indebolimento) dell'assioma che ha permesso di derivarlo. Questa unica differenza ha (almeno a prima vista) conseguenze significative anche per quanto riguarda gli aspetti già considerati nella definizione di Magari. In primo luogo, è chiaro che un sistema quasidialettico, mentre computa, potrebbe ammettere ripetizioni nei suoi insieme di assiomi. In altre parole, lo stesso assioma può entrare nel sistema molte volte. Inoltre, mentre in un sistema dialettico il "nuovo" assioma proposto dopo una contraddizione è sempre il successore (secondo la funzione proponente f) dell'assioma eliminato, nel nostro contesto lo scenario è diverso. Infatti, l'assioma

[7]La nostra scelta di usare la parola "controesempio" per riferirsi a c^- è in gran parte motivato da una questione di convenienza. Infatti, a causa della grande varietà di possibili significati di c^- non esiste un unica parola in grado di rappresentarli tutti.

eliminato, ad esempio f_i, potrebbe essere stato oggetto di qualche sostituzione di un assioma precedente f_j, vale a dire $f_i = f^-(f_j)$. In questo caso, vorremmo continuare la nostra computazione dal successore di f_j, vale a dire f_{j+1}. Questo perché potremmo avere scartato f_{j+1} a causa di qualche conflitto con f_i. Così, una volta che f_i viene sostituito, vogliamo testare nuovamente l'assioma f_{j+1}. Naturalmente, lo stesso vale nel caso in cui $f_j = f^-(f_k)$, per qualche f_k (in questo caso, prederemo f_{k+1} come la continuazione della nostra computazione). L'ultimo ingrediente della formalizzazione di un sistema quasidialettico è dato dalla funzione $r_s(x)$. Questa funzione è l'analoga della funzione $r_s(x)$ utilizzata nella definizione dei sistemi dialettici rivisitati, dove, per ogni s, x avevamo o $r_s(x) = \emptyset$ oppure $R_s(x) = \{f_x\}$. Per i sistemi quasidialettici, $r_s(x)$ sarà sempre una stringa di assiomi: il suo ruolo (molto più importante qui che per i sistemi dialettici) è quello di prendere nota, per gli assiomi considerati al passo s, di tutta la loro storia, cioè di registrare tutte le possibili azioni di f^-, nelle fasi precedenti, che hanno portato alla loro formazione. Formalizziamo ora queste queste ultime osservazioni.

Tesi provvisorie e tesi finali dei sistemi quasidialettici

Sia $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$ un sistema quasidialettico, e si $\alpha = \{H_s\}_{s\in\omega}$ una approssimazione computabile a H. (Come vedremo, una grande differenza rispetto ai sistemi dialettici è che l'insieme delle tesi finali dipende dall'approssimazione calcolabile all'operatore di enumerazione scelta.)

Definizione 2.2.17. *Dati q e α come sopra, definiamo per induzione diversi parametri calcolabili (tutti dipendenti dalla scelta di α): A_s (un insieme finito), r_s (una funzione tale che per ogni x, $r_s(x)$ è una stringa finita di numeri, pensata come una stringa "verticale" o* pila*) $p(s)$ (un numero, il numero più grande tale che $r_s(p(s)) \neq \langle\ \rangle$ (ricordiamo che il simbolo $\langle\ \rangle$ denota la stringa vuota)), $h(s)$ (un numero). In aggiunta, abbiamo alcuni parametri derivati: $\rho_s(x)$ (il top della pila $r_s(x)$), $L_s(x) = \{\, \rho_s(y) : y < x \text{ e } r_s(y) \neq \langle\ \rangle \,\}$, e per ogni $i \leq p(s)$, $\chi_s(i) = \bigcup_{j\leq i} H_s(L_s(j))$.*

Passo 0.

Definiamo $p(0) = 0$, $h(0) = 0$,

$$r_0(x) = \begin{cases} \langle f_0 \rangle & x = 0, \\ \langle\ \rangle & x > 0; \end{cases}$$

e poniamo $A_0 = \emptyset$.

Passo $s + 1$.

Assumiamo $p(s) = m$. Distinguiamo i seguenti casi:

1. *non esiste nessun* $z \le m$ *tale che* $\{c, c^-\} \cap \chi_s(z) \neq \emptyset$*: in questo caso poniamo* $p(s+1) = m+1$ *e definiamo*

$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_s(x) & \text{se } x \le m, \\ \langle f_{m+1} \rangle & \text{se } x = m+1, \\ \langle\, \rangle & \text{se } x > m+1; \end{cases}$$

2. *esiste uno* $z \le m$ *tale che* $c \in \chi_s(z)$ *e per ogni* $z' < z$, $c^- \notin \chi_s(z')$*: in questo caso poniamo* $p(s+1) = z+1$ *e definiamo*

$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_s(x) & x < z, \\ \langle f_{z+1} \rangle & x = z+1, \\ \langle\, \rangle & x = z \text{ oppure } x > z+1; \end{cases}$$

3. *esiste uno* $z \le m$ *tale che* $c^- \in \chi_s(z)$ *e per ogni* $z' \le z$, $c \notin \chi_s(z')$*: in questo caso poniamo* $p(s+1) = z+1$ *e definiamo, per* $\rho_s(z) = f_y$,

$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_s(x) & x < z, \\ r_s(x)^\frown\langle f^-(f_y) \rangle & x = z, \\ \langle f_{z+1} \rangle & x = z+1, \\ \langle\, \rangle & x > z+1. \end{cases}$$

Infine definiamo $h(s+1) = p(s+1)$*, se si applica la Clausola (1), altrimenti* $h(s+1) = p(s+1) - 1$ *e poniamo*

$$A_{s+1} = \bigcup_{i<h(s+1)} \chi_{s+1}(i) (= H_{s+1}(L_{s+1}(h(s+1)-1))).$$

Chiamiamo A_s *l'insieme delle* tesi provvisorie *di* q *al passo* s*. L'insieme* A_q^α *definito come*

$$A_q^\alpha = \{\, f_x : (\exists t)(\forall s \ge t)[f_x \in A_s] \,\}$$

è chiamato l'insieme delle tesi finali *di* q *rispetto a* α*. Spesso scriveremo* $A_s = A_{q,s}^\alpha$ *quando vogliamo specificare il sistema quasidialettico* q *e l'approssimazione* α *all'operatore di enumerazione scelta. Un insieme* $A \subseteq \omega$ *è chiamato* quasidialettico *se* $A = A_q^\alpha$ *per qualche sistema quasidialettico* q *e per l'approssimazione* α *all'operatore di enumerazione di* q*; qualche volta diremo in questo caso che* A *è* rappresentato *dalla coppia* (q, α)*.*

Pile, top delle pile e slot

Facciamo ora alcune osservazioni sulla Definizione 2.2.17. In primo luogo, si noti che nel caso in cui un certo insieme di assiomi derivi, in un determinato passo, sia c che

c^-, allora il sistema dà priorità alla derivazione di c. In secondo luogo, in quanto segue considereremo gli elementi del dominio di r_s come *slot*. In vista dell'ampio utilizzo che ne faremo in seguito dedichiamo alcune parole per spiegare come gli slot devono essere pensati. Ad ogni passo s della computazione, quando diremo che x è lo *slot di un assioma* f_y, intendiamo che $r_s(x)$ è una stringa che ha f_y come elemento più a destra. Dunque

$$r_s(x) = \langle f_x, f^-(f_x), \ldots, (f^-)^{(n)}(f_x) \rangle$$

dove l'ultimo elemento della stringa $f_y = (f^-)^{(n)}(f_x)$, è stato ottenuto al passo s, attraverso una sequenza di sostituzioni, iniziata dall'assioma f_x, e determinata, grazie alla funzione f^-, per mezzo del caso (3) della procedura quasidialettica.

Le figure 2.3–2.5 illustrano i vari casi della Definizione 2.2.17. Le stringhe verticali sopra i vari slot rappresentano le pile $r(x)$ nei diversi passi della computazione. In ciascuna figura sono raffigurati solo gli slot rilevanti: naturalmente è inteso che per ogni slot v che segue l'ultimo slot raffigurato $r(v) = \langle\ \rangle$ (dove per semplicità omettiamo di specificare a quale passo s è valutato il parametro $r_s(v)$). Per ogni slot x l'insieme $L(x)$ consiste degli assiomi che sono al top delle pile non vuote $r(y)$, con $y < x$.

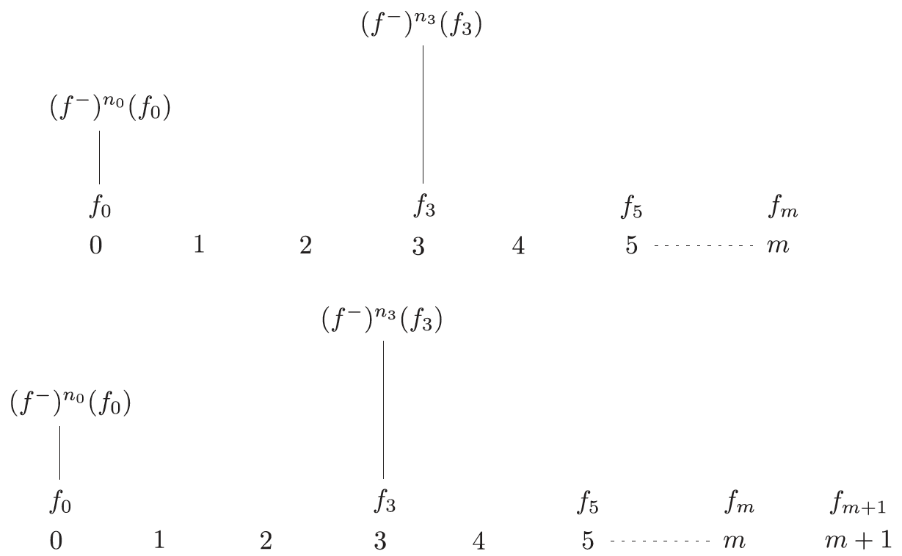

Figura 2.3: Dal passo s (configurazione prima sequenza) al passo $s+1$ (configurazione seconda sequenza) utilizzando la Clausola (1).

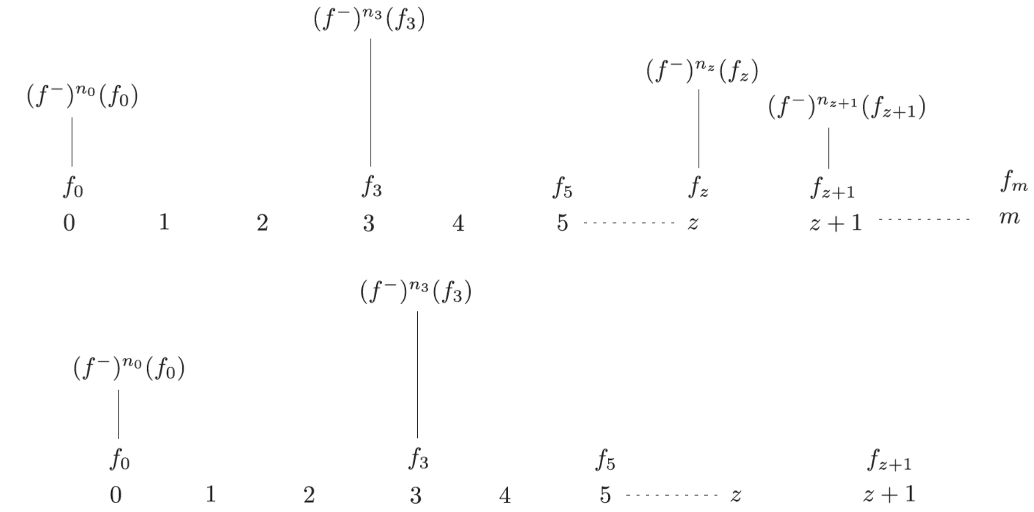

Figura 2.4: Dal passo s (configurazione prima sequenza) al passo $s+1$ (configurazione seconda sequenza) utilizzando la Clausola (2).

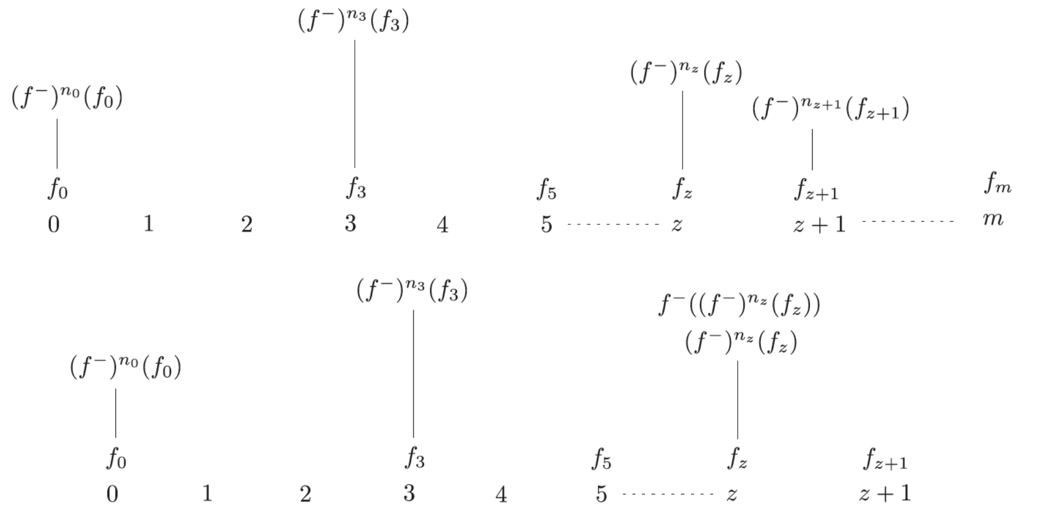

Figura 2.5: Dal passo s (configurazione prima sequenza) al passo $s+1$ (configurazione seconda sequenza) utilizzando la Clausola (3).

Dipendenza delle tesi finali dalle approssimazioni

Diamo ora un esempio che mostra come la definizione degli insieme quasidialettici dipende dall'approssimazione all'operatore di enumerazione scelta.

Esempio 2.2.18. *Consideriamo il sistema quasidialettico* $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$*, dove*

$f_x = x$, $f^-(x) = x+2$, $c = 1$, $c^- = 2$, e

$$H = \{\, \langle y, \{2x+1\}\rangle : x, y \in \omega \,\} \cup \{\langle 0, \emptyset\rangle\} \cup \{\, \langle y, \{y\}\rangle : y \in \omega \,\}$$

(l'assioma $\langle 0, \emptyset\rangle \in H$ è dato al fine di soddisfare la richiesta che in un sistema dialettico $H(\emptyset) \neq \emptyset$). È facile vedere che H è un operatore di chiusura: se $y \notin H(X)$, allora $y \neq 0$ e X non contiene nessun numero dispari, ma allora $H(X)$ non contiene nessun numero dispari, quindi $y \notin H(H(X))$. È inoltre facile vedere che esistono approssimazioni computabili α e β a H, tale che: in α, per ogni x, $\langle c^-, \{2x+1\}\rangle$ viene prima di $\langle c, \{2x+1\}\rangle$, e dunque, durante la computazione di $2x+1$, la coppia (q, α) usa la Clausola (3) della definizione di tesi provvisoria; al contrario, in β, per ogni x, $\langle c, \{2x+1\}\rangle$ viene prima di $\langle c^-, \{2x+1\}\rangle$, e in tal caso sarà usata la Clausola (2). Ovviamente queste due approssimazioni determinano insiemi quasidialettici diversi dal momento che $A_q^\alpha = \{\, 0 \,\}$, mentre, per esempio $4 \in A_q^\beta$. Inoltre, α dà origine a funzioni $r_s^\alpha(x)$, $\rho_s^\alpha(x)$, che hanno comportamenti "asintotici" differenti dalle funzioni $r_s^\beta(x)$, $\rho_s^\beta(x)$ derivanti da β. Abbiamo ad esempio che $\{\rho_s^\alpha(1) : s \in \omega\}$ è infinito. (Se in aggiunta $\alpha = \{H_s\}_{s\in\omega}$ soddisfa $\langle c^-, \{2x+1\}\rangle \in H_{x+2}$, allora per ogni s, $r_s^\alpha(x) = \langle\ \rangle$, per ogni $x > 2$, cioè, per ogni $x > 2$, l'assioma x non è mai "proposto".) Al contrario, $\{\rho_s^\beta(x) : s \in \omega\}$ è finito per ogni x.

Dato il precedente esempio, si potrebbe obiettare che un sistema quasidialettico, piuttosto che una quintupla $\langle H, f, f^-, c, c^-\rangle$ dovrebbero essere la quintupla $\langle \alpha, f, f^-, c, c^-\rangle$, dove α è un'approssimazione calcolabile a un operatore di enumerazione H. Questo è del tutto ragionevole in quanto per dedurre da H per prima cosa dobbiamo essere in grado di approssimare H. Per uniformià alla proposta di Magari diamo invece la seguente:

Definizione 2.2.19. *Un* sistema quasidialettico approssimato *è una coppia (q, α) dove q è un sistema quasidialettico $q = \langle H, f, f^-, c, c^-\rangle$, e α è una approssimazione computabile a H.*

Quindi un insieme A è quasidialettico se esiste un sistema quasidialettico approssimato (q, α) tale che $A = A_q^\alpha$.

Lemma 2.2.20. *Ogni insieme dialettico A è quasidialettico, esiste infatti un sistema quasidialettico q, tale che per ogni approssimazione computabile α all'operatore di enumerazione di H, vale $A = A_q^\alpha$.*

Dimostrazione. Se $d = \langle H, f, c\rangle$ è un sistema dialettico, allora sia f^- una funzione calcolabile aciclica tale che $c^- \notin range(f^-)$. È chiaro che, ponendo $q = \langle H, f, f^-, c, c\rangle$ si ha $A_d = A_q$. Notiamo che in questo caso $c^- = c$ e dunque la Clausola (3) della Definizione 2.2.17 non viene mai usata. □

Proprietà generali dei sistemi quasidialettici

L'esistenza di sistemi quasi-dialettici approssimati (q, α), come mostrato nell'Esempio 2.2.18, non è solo una questione di curiosità. In realtà, come vedremo, coppie (q, α) che eventualmente propongono tutti gli assiomi, e coppie che al contrario possono fallire a proporne alcuni non condividono la stessa classe di insiemi rappresentabili. Al fine di distinguere queste due tipologie diamo una definizione preliminare:

Definizione 2.2.21. *Sia (q, α) un sistema quasidialettico approssimato e sia y uno slot. Diciamo che (q, α) ha un* loop *sopra y se $\{ \rho_s(y) : s \in \omega \}$ è infinito. Se (q, α) non ha loop lo chiamiamo* loopless.

Pertanto, un loop può essere visualizzato come una pila infinita di sostituzioni posta sopra uno slot [8]. L'esempio 2.2.18 mostra che, per un sistema quasidialettico, avere o non avere un loop dipende dall'approssimazione all'operatore di enumerazione H scelta. Vediamo ora un risultato che vale sia per i sistemi quasidialettici con loop sia per quelli loopless. Tale lemma mostra quanto si verifica la stabilità di un dato insieme di assiomi.

Lemma 2.2.22. *Sia (q, α) un sistema quasidiallettico approssimato e sia y uno slot. Se per ogni $x \leq y$ la coppia (q, α) non ha loop su x allora esiste $\lim_s r_s(y)$, cioè esiste un passo t tale che, per ogni $s \geq t$, $r_s(y) = r_t(y)$.*

Dimostrazione. La prova è per induzione su y. Per $y = 0$ la proposizione è ovvia. Ricordiamo che $r_0(0) = \langle f_0 \rangle$. Se non esiste un passo t tale che $\{c, c^-\} \cap H_t(\{r_t(0)\}) \neq \emptyset$ allora per ogni s, $r_s(0) = \langle f_0 \rangle$. Se esiste un passo t tale che $c \in H_t(\{r_t(0)\})$, allora per ogni $s \geq t$, $r_s(0) = \langle\ \rangle$. Se non esiste t tale che $c \in H_t(\{r_t(0)\})$, ma, poiché q non ha loop sopra 0, esiste un ultimo t tale che $c^- \in H_t(\{r_t(0)\})$, allora, per ogni $s \geq t$, segue $r_s(0) = r_t(0)$.
Assumiamo che la proposizione valga per y e che la coppia (q, α) non ha loop sopra nessun $x \leq y + 1$. Allora per ipotesi induttiva esiste un più piccolo passo t (necessariamente, $t > 0$) tale che per ogni $s > t$, e $x \leq y$, $r_s(x) = r_t(x)$, e sia $L(y + 1) = L_t(y + 1)$. Questo implica che $\{c, c^-\} \cap H(L(y + 1)) = \emptyset$. Dalla minimalità di t, segue $L_t(y + 1) \neq L_{t-1}(y + 1)$. Esaminiamo ora tutte le possibilità che possono avere portato ad un cambiamento al passo t. Prima di tutto, non è possibile che $h(t) = k < y-1$, poiché altrimenti allo stadio $t+1$, per la clausola (1), dovremmo cambiare $r_{t+1}(k+2)$, contrariamente alla scelta di t, così $k+2 \leq y$. Se $h(t) = y-1$, allora al passo t poniamo $r_t(y) = \langle f_y \rangle$, $r_t(y+1) = \langle\ \rangle$ ma a $t+1$ cambiamo questo con $r_{t+1}(y+1) = \langle f_{y+1} \rangle$. Se $h(t) = y$, allora poniamo $r_t(y+1) = \langle f_{y+1} \rangle$. In tutti i casi, vediamo che esiste un più piccolo passo $t_0 \in \{t, t+1\}$ al quale $r_{t_0}(y+1) = \langle f_{y+1} \rangle$. Se esiste un passo $s_0 \geq t_0$ tale che $c \in H(L(y+1) \cup \{\rho_{s_0}(y+1)\})$ allora per ogni $s \geq s_0$

[8] Seguendo questa intuizione si potrebbe mettere in discussione la scelta di chiamare tali pile infinite "loop". La nostra scelta è dettata dall'intuizione familiare di un sistema "che va in loop".

segue $r_s(y+1) = \langle\ \rangle$; altrimenti, poiché assumiamo che non ci sono loop sopra $y+1$, segue che, o non esiste nessun passo $s \geq s_0$ tale che $c^- \in H(L(y+1) \cup \{\rho_s(y+1)\})$, nel qual caso, per ogni $s \geq s_0$, segue $r_s(y+1) = \langle f_{y+1} \rangle$, oppure esiste un più piccolo passo $s_1 \geq s_0$, tale che $c^- \in H(L(y+1) \cup \{\rho_{s_1}(y+1)\})$, nel qual caso $r_s(y+1) = r_{s_1}(y+1)$, per ogni $s \geq s_1$. □

La prova del precedente lemma mostra inoltre il seguente:

Corollario 2.2.23. *Sia (q, α) un sistema quasidialettico approssimato e sia y uno slot. Se t è il più piccolo passo tale che per ogni $s \geq t$ e $x \leq y$, $r_s(x) = r_t(x)$, allora a $s_0 = t$ oppure a $s_0 = t+1$ abbiamo $r_{s_0}(y+1) = \langle f_{y+1} \rangle$.*

Dimostrazione. Immediata. □

Intuitivamente, l'ultimo risultato afferma che non esiste nessuna perdita di informazione - in termini di assiomi proposti - a lavorare dopo la stabilizzazione di un dato $L(x)$. Infatti, il risultato mostra che ogni assioma f_x viene proposto dopo la stabilizzazione di $L(x)$. La seguente sezione fornisce una caratterizzazione completa dei sistemi quasidialettici con loop.

Caratterizzazione dei sistemi quasidialettici con loop

Includere i loop nella nostra interpretazione intuitiva non è semplice. Prendiamo le mosse dall'idea di Magari secondo la quale i sistemi dialettici rappresentano il comportamento di un matematico - o anche di una comunità di matematici - nel momento in cui deriva una contraddizione. In questo scenario, i sistemi quasidialettici con loop descrivono una comunità di matematici in cui la progressione della teoria è indeterminatamente interrotta da un raffinamento continuo di uno stesso assioma - un tipo di comportamento che potrebbe essere scherzosamente comparato con la burocrazia Kafkiana. Tuttavia i loop non sono fenomeni così patologici nella teoria dei sistemi quasidialettici.
Da un lato, a causa della condizione (3) della Definizione 2.2.15, ogni f^- - orbita di un dato assioma è infinita. Pertanto, in linea di principio non si può escludere la possibilità di costruire una pila ascendente infinita su alcun assioma. Naturalmente, se questa situazione si verificherà o meno dipende dall'operatore H, e dalla sua approssimazione. Inoltre, è opportuno considerare sistemi quasidialettici con loop per almeno due motivi. In primo luogo, possiamo fornire in modo agevole una loro caratterizzazione completa. In secondo luogo, anche se a prima vista i sistemi quasidialettici con i loop possono apparire, in una certa misura, stupidi, si può dimostrare che essi sono in grado di rappresentare insiemi (segnatamente insiemi c.e non computabili) che non sono rappresentabili dai sistemi dialettici. Come vedremo, ciò

si verifica in quanto le informazioni codificabili in un loop non sono necessariamente banali. Morale della storia: non tutta la burocrazia è inutile.

Lemma 2.2.24. *Sia* (q, α) *un sistema quasidialettico approssimato con loop. Allora* A_q^α *è un insieme c.e..*

Dimostrazione. Sia b l'ultimo slot sopra il quale la coppia (q, α) ha un loop. Per il Lemma 2.2.22, dovrà esistere un passo della computazione t tale che, per ogni $s \geq t$, $L_s(b) = L_t(b)$: poniamo $X = L_t(b)$. Chiaramente, fintanto che X è finito, $H(X)$ è un insieme c.e.. Rimane dunque da provare che $A_q^\alpha = H(X)$. L'inclusione $\supseteq$ è ovvia, poiché per ogni $s \geq t$, $X \subseteq L_s(h(s))$. Per mostrare il viceversa, notiamo che per ogni passo $s \geq t$ in cui aggiungiamo un assioma sopra b, definiamo l'insieme delle tesi provvisorie come $H_s(X)$. Quindi nessun elemento al di fuori di $H(X)$ può essere una tesi finale. $\square$

Ricordiamo che un insieme c.e. è *semplice* se il suo complemento è infinito e non contiene alcun insieme infinito c.e.. Il prossimo lemma mostra come la proprietà di semplicità fornisce una limitazione sul tipo di informazioni che possono essere codificate all'interno di un loop. Diciamo che un insieme A è coinfinito se il suo complemento è infinito.

Lemma 2.2.25. *Sia* A *un insieme c.e.. Allora esiste un sistema quasidialettico approssimato* (q, α) *con loop tale che* $A_q^\alpha = A$ *se e solo se* A *è coinfinito e non semplice.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$): Se A è coinfinito e non semplice, allora esiste un sottoinsieme infinito c.e. $B \subseteq A^c$, tale che $A^c \smallsetminus B$ contiene almeno due elementi. Sia $b = \min B$: possiamo assumere senza perdita di generalità che $b = \min A^c$. Allora consideriamo un sistema quasidialettico, $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$, dove f è l'identità, f^- è qualsiasi funzione totale computabile tale che $range(f^-) \subseteq B$, $c \neq c^-$, $c, c^- \in A^c \smallsetminus B$, H soddisfa $H(\emptyset) = A$ e infine $c^- \in H(\{\, x \,\})$ se e solo se $x \in B$. Per scegliere un H appropriato che sia anche un operatore di chiusura algebrico, prendiamo

$$H = \{\, \langle y, \{x\} \rangle : x \in B, y \in \omega, y \neq c \,\} \cup \{\, \langle a, \emptyset \rangle : a \in A \,\} \cup \{\, \langle x, \{x\} \rangle : x \in \omega \,\}.$$

Per mostrare che $H(X) = H(H(X))$, notiamo che se $X \cap B \neq \emptyset$ allora $H(X) = \omega \smallsetminus \{c\} = H(\omega \smallsetminus \{c\})$, altrimenti $H(X) = A = H(A)$. È chiaro che, indipendentemente dalla scelta dell'approssimazione α con cui lavoriamo, avremmo un loop sopra b, e chiaramente per ogni approssimazione α, $A_q = A_q^\alpha = A$.
($\Rightarrow$): Supponiamo che A è c.e. e che esista un sistema quasidialettico approssimato (q, α) con loop tale che $A_q^\alpha = A$. Sia b il più piccolo slot tale che esiste un loop sopra b. È immediato vedere che $orb_{f^-}(b)$ è un insieme infinito c.e.. Mostriamo che $orb_{f^-}(b) \subseteq A^c$. Supponiamo al contrario che qualche $f_y \in orb_{f^-}(b)$ appartenga a A. Allora, poiché $A = A_q^\alpha$, questo significa che $f_y \in A_q^\alpha$. Per il Lemma 2.2.22, dovrà

esistere un passo t tale che per ogni $s \geq t$, $L_s(b) = L_t(b)$: poniamo $X = L_t(b)$. Dunque, come nella prova del precedente lemma, avremmo che $f_y \in H(X)$. Ma fintanto che f_y appartiene al loop su b, avremmo $c^- \in H(X \cup \{ f_y \})$. D'altro canto, poiché H è un operatore di chiusura, abbiamo $X \subseteq H(X)$ e quindi per $\{f_y\} \subseteq H(X)$, otteniamo

$$H(X \cup \{f_y\}) \subseteq H(H(X)) = H(X).$$

Segue dunque che a qualche passo $s > t$, avremmo $c^- \in H_s(X)$, contrariamente al fatto che $L(b)$ non cambia una volta superato il passo t. □

Nota 2.2.26. *Notiamo che la prove del Lemma 2.2.25 mostra che: dato un insieme coinfinito non semplice A, esiste un sistema quasidialettico proprio q, tale che per ogni approssimazione calcolabile all'operatore di enumerazione H vale $A = A_q^\alpha$.*

Gli ultimi due lemmi danno la seguente caratterizzazione dei sistemi quasidialettici con loop.

Teorema 2.2.27. *Gli insiemi che sono rappresentabili dai sistemi quasidialettici approssimati (q, α) con loop sono esattamente gli insiemi infiniti c.e. non semplici.*

Dimostrazione. Immediata. □

Primi risultati per i sistemi quasidialettici loppless

In questa sezione presentiamo alcune proprietà utili dei sistemi quasiadialettici approssimati loopless. Tra questi, di grande rilevanza per il seguito è il Lemma 2.2.28, il quale può essere pensato come un risultato di località che, informalmente, esprime il seguente fatto: anche se un sistema quasidialettico, per mezzo della funzione di revisione f^-, potrebbe modificare l'ordine in cui gli assiomi vengono testati, ciò che conta veramente per un assioma f_x al fine di essere una tesi finale è il fatto che f_x ha x tra i suoi slot. Dunque, l'espressività di un sistema quasidialettico loopness, che potrebbe proporre un assioma diverse volte, finisce con una sorta di ridondanza: tra tutte le possibili occorrenze di f_x nell'elenco degli assiomi proposti, quella che conta veramente è l'occorrenza che è stata proposta nello slot x.

Dato il Lemma 2.2.22, se la coppia (q, α) è un sistema quasidialettico approssimato loopless, allora i corrispondenti parametri $r_s(x), \rho_s(x), L_s(x)$ raggiungono il limite rispetto a s. Siamo dunque giustificati a definire, per ogni x,

$$r(x) = \lim_s r_s(x) \qquad \rho(x) = \lim_s \rho_s(x) \qquad L(x) = \lim_s L_s(x).$$

Lemma 2.2.28. *Sia (q, α) un sistema quasidialettico approssimato loopless. Allora $f_y \in A_q^\alpha$ se e solo se*

$$(\exists t)(\forall s \geq t)[r_s(y) = \langle f_y \rangle].$$

Notiamo che questo è equivalente a dire che esiste un t tale che $\rho_s(y) = f_y$ per ogni $s \geq t$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$): Sia dato f_y. Sotto l'ipotesi, e per il Lemma 2.2.22, sia t_0 un passo tale che per ogni $s \geq t_0$, $L_s(y+1) = L(y+1)$. Allora per ogni $s \geq t_0$, segue:

$$f_y \in L(y+1) \subseteq L(h(s)).$$

Sia $t_1 \geq t_0$ tale che per ogni $s \geq t_1$, $L(y+1) \subseteq H_s(L(y+1))$ (qua usiamo il fatto che $X \subseteq H(X)$ per ogni X): allora per ogni $s \geq t_1$ segue

$$L(y+1) \subseteq H_s(L(y+1)) \subseteq H_s(L(h(s))) = A^{\alpha}_{q,s},$$

quindi $f_y \in A^{\alpha}_q$.

($\Rightarrow$): Assumiamo $f_y \in A^{\alpha}_q$, cioè $f_y \in A^{\alpha}_{q,s}$ per ogni $s \geq t_0$, per qualche t_0. Proviamo che esiste un numero i, tale che, per ogni $s \geq t_0$, $i < h(s)$ e $f_y \in H_s(L_s(i))$. Fintanto che $f_y \in A^{\alpha}_{q,t_0}$, esiste un minimo $i < h(t_0)$ tale che $f_y \in H_{t_0}(L_{t_0}(i))$: mostriamo che questo è il numero i desiderato. Al fine di provare ciò, assumiamo che esiste un minimo $s \geq t_0$ tale che $f_y \in H_s(L_s(i))$, ma $f_y \notin H_{s+1}(L_{s+1}(i))$: allora $h(s+1) \leq i$, e quindi $f_y \notin H_{s+1}(L_{s+1}(h(s+1)))$, cioè $f_y \notin A^{\alpha}_{q,s+1}$, contro il fatto che $s+1 \geq t_0$. Dunque esiste un minimo $x \leq i$ tale che $f_y \in H(L(x))$. Ora poniamo che s_0 sia il passo nel quale viene proposto f_y allo slot y, come nel Corollario 2.2.23. Vorremmo quindi rimuovere f_y da $r(y) = \langle f_y \rangle$, solo se a qualche passo successivo s avremmo $c \in H_s(L(y) \cup \{f_y\})$, oppure $c^- \in H_s(L(y) \cup \{f_y\})$. Segue che $f_y \notin H(L(y))$: altrimenti, come nella prova dell'implicazione sinistra-destra del Lemma 2.2.25, avremmo $\{\, c, c^- \,\} \cap H(L(y)) = H(L(y) \cup \{\, f_y \,\}) \neq \emptyset$, contrariamente al fatto che $L(y)$ è l'insieme limite. Dunque $L(y) \subset L(x)$, allora $\{\, c, c^- \,\} \cap H(L(x) \cup \{\, f_y \,\}) \neq \emptyset$: questo implica $f_y \notin H(L(x))$, altrimenti, similmente alla prova del Lemma 2.2.25, concludiamo $\{\, c, c^- \,\} \cap H(L(x)) \neq \emptyset$, contrariamente al fatto che $L(x)$ è l'insieme limite. Contraddizione contro $f_y \in H(L(x))$.
La proposizione riguardo $\rho_s(y)$ è ovvia, poiché f^- è aciclica, e dunque $\rho_s(y) = f_y$ se e solo se la lunghezza di $r_s(y)$ è 1. $\square$

Dato un sistema quasidialettico approssimato (q, α), tale che per ogni x, esistono $\rho(x) = \lim \rho_s(x)$ e $r(x) = \lim r_s(x)$, sia $L = \{\rho(x) : x \in \omega \text{ e } r(x) \neq \langle\ \rangle\}$ (dove $\rho_s(x)$ e $r_s(x)$ sono presi rispetto a α).

Teorema 2.2.29. *Se q è un sistema quasidialettico approssimato loopless, allora $A^{\alpha}_q = L$. Inoltre, per ogni y,*

$$r(y) \neq \langle\ \rangle \Rightarrow range(r(y)) \cap A^{\alpha}_q = \{\rho(y)\}.$$

Dimostrazione. Il Lemma 2.2.28 mostra che $A^{\alpha}_q \subseteq L$. Il viceversa è banale, poiché per definizione $\rho(y) \in A^{\alpha}_{q,s}$, per ogni s "abbastanza grande".
Supponiamo ora che $r(y) \neq \langle\ \rangle$, e per il Lemma 2.2.22, sia t_0 il più piccolo passo della computazione dopo il quale $L_s(y)$ non cambia più. Assumiamo $t_1 > t_0$, $\rho_{t_1}(y) \neq \rho(y)$, e $\rho_{t_1}(y) = f_z \in A^{\alpha}_q$. Allora, dal Lemma 2.2.5, $r(z) = \langle f_z \rangle$. Sia $v = \max\{z, y\} + 1$,

e sia $t_2 \geq t_1$ un passo dopo il quale per nessun $u \leq v$ cambia $r_s(u)$; ma $f_z \in L(v)$, quindi a qualche passo della computazione $s \geq t_2$ avremmo $\{c, c^-\} \cap H(L(v)) \neq \emptyset$, contraddizione in quanto $L(v)$ ha già raggiunto il suo limite. □

Il lemma seguente può essere presentato come una naturale estensione del Lemma 2.2.5.

Lemma 2.2.30. *Sia (q, α) un sistema quasidialettico approssimato loopless. Allora, $f_x \in A_q^\alpha$ se e solo se né $c \in H(L(x) \cup \{ f_x \})$ né $c^- \in H(L(x) \cup \{ f_x \})$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Dal Lemma 2.2.28 segue che $L(x+1) = L(x) \cup \{ f_x \}$, dunque non potremmo avere $\{ c, c^- \} \cap H(L(x+1))$ poiché $L(x+1)$ è l'insieme limite.

($\Leftarrow$): Dopo aver proposto, al passo s_0, f_x allo slot x (vedi Corollario2.2.23), e sotto l'assunzione che né $c \in H(L(x) \cup \{ f_x \})$, né $c^- \in H(L(x) \cup \{ f_x \})$, $r(x)$ non cambierà più, e quindi $\rho(x) = f_x$. Dunque per il Lemma 2.2.28 segue $f_x \in A_q^\alpha$. □

Nota 2.2.31. *La prova del precedente teorema mostra che se (q, α) è un sistema quasidialetico approssimato, tale che non ci sono loop sopra nessun $y < x$, allora $f_x \in A_q^\alpha$ se e solo se né $c \in H(L(x) \cup \{ f_x \})$ né $c^- \in H(L(x) \cup \{ f_x \})$.*

Corollario 2.2.32. *Per ogni sistema quasi dialettico approssimato (q, α), l'insieme quasidialettico A_q^α è Δ_2^0.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.2.27, se (q, α) è un sistema quasidialettico approssimato con loops, allora A_q^α è c.e., quindi Δ_2^0. Sia ora q un sistema quasidialettico approssimato loopless. Dal Lemma 2.2.22 e dal Lemma 2.2.28, si ha che per ogni x, esite il limite $\lim_s r_s(x) = r(x)$, e conseguentemente, quando $r_x \neq \langle \, \rangle$, esiste il limite $\lim_s \rho_s(x)$. Definiamo

$$A_s = \{f_y : \rho_s(y) = f_y\}.$$

È chiaro dal Lemma 2.2.28 che

$$f_y \in A_q \Longleftrightarrow (\exists t)(\forall s \geq t)[f_u \in A_s]$$

Inoltre, per ogni y, esiste il limite $\lim_s A_s(f_y)$, poiché dopo il passo s_0 al quale proponiamo $r_{s_0}(y) = \langle f_y \rangle$, ed ogni $r(x)$, con $x < y$, raggiunge il limite, una volta che cambiato $\rho(y)$, data l'aciclicità di f^-, non possiamo più avere $\rho_s(y) = f_y$, per ogni passo futuro s. Quindi la sequenza computabile di insiemi $\{A_s\}_{s \in \omega}$ è una Δ_2^0 approssimazione a A_q^α. □

La facile costruzione che segue (assieme al Lemma 2.2.20) dimostra che i sistemi dialettici possono essere considerati come sistemi quasidialettici propri loopless, nel senso che questa identità è indipendente dall'approssimazione scelta all'operatore di enumerazione del sistema quasidialettico.

Lemma 2.2.33. *A partire da ogni sistema dialettico $d = \langle H, f, c \rangle$, e ogni numero $c^- \neq c$, possiamo costruire effetivamente un sistema quasidialetico q, tale che, se $c^- \notin A_d$, allora per ogni approssimazione α all'operatore di enumerazione di q, abbiamo che (q, α) è loopless e $A_q^\alpha = A_d$.*

Dimostrazione. Sia $d = \langle H, f, c \rangle$ un sistema dialettico e sia $c^- \neq c$. Consideriamo il sistema quasidialettico $q = \langle H^*, f, f^-, c, c^- \rangle$, dove f^- è una funzione computabile aciclica che non ha c^- nel suo codominio e tale che $f^-(c^-) = f^-(c) = a \in H(\emptyset)$. Sia infine

$$H^* = \{ \langle x, D \rangle : x \neq c^- \ \& \ \langle x, D \rangle \in H \} \cup \{\langle c^-, \{c^-\}\rangle, \langle c^-, \{c\}\rangle\}.$$

Dato $X \subseteq \omega$ è facile vedere che $H^*(X) \subseteq H(X)$: infatti se $x \in H^*(X)$ e $x \neq c^-$ allora, per definizione di H^*, $x \in H(X)$; se $x = c^-$ allora o $c^- \in X$ e quindi $x \in H(X)$, oppure $c \in X$ e quindi $x \in H(X)$. Segue immediatamente dalla definizione che per $x \neq c^-$, se $x \in H(X)$ allora $x \in H^*(X)$. Mostriamo ora che H^* è un operatore di chiusura se lo è H. Sia dato $X \subseteq \omega$: chiaramente, $X \subseteq H^*(X)$. Vogliamo mostrare che $H^*(H^*(X)) \subseteq H^*(X)$. Assumiamo $x \in H^*(H^*(X))$. Se $x = c^-$, cioè $c^- \in H^*(H^*(X))$ allora ci sono due possibilità: o $c^- \in H^*(X)$ oppure $c \in H^*(X)$. Nel primo caso, la proposizione è vera; nel secondo abbiamo $c \in H(X)$, ma allora $c^- \in H(\{c\}) \subseteq H(H(X)) = H(X) \subseteq H^*(X)$. Se $x \neq c^-$, allora da $x \in H^*(H^*(X))$ otteniamo $x \in H(H^*(X)) \subseteq H(H(X)) = H(X)$, dato che $x \in H^*(X)$, per definizione di H^*.
Consideriamo ora una approssimazione computabile a H^*, e qualsiasi approssimazione computabile a H. Relativamente a queste approssimazioni distingueremo r, L, come r^d, L^d se avremo a che fare con d oppure r^q, L^q se avremmo a che fare con q. Vogliamo ora mostrare per induzione su x che: se $c^- \notin A_d$, allora $A_q^\alpha = A_d$. Mostriamo che

$$f_x \in A_d \Leftrightarrow f_x \in A_q^\alpha,$$

e per ogni $y \leq x$, $r_s^q(y)$ raggiunge il limite $r^q(y)$, e se $y \in \{c, c^-\}$, allora $r^q(y) \in \{\langle\ \rangle, \langle y, a \rangle\}$.
Supponiamo che la proposizione sia vera per ogni $y < x$. Assumiamo inoltre che $f_x \notin A_d$. Allora $c \in H(L^d(x) \cup \{f_x\})$, dal quale segue che $c \in H^*(L^d(x) \cup \{f_x\})$ e quindi $c \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$, così per induzione $L^d(x) \subseteq L^q(x)$. Ora può essere il caso che $c^- \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$. Se dopo il minimo passo al quale $L^q(x)$ si stabilizza, l'evento $c \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ appare precedentemente dell'evento $c^- \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ (cioè, dipendente dall'approssimazione a H^*, c è enumerato in $H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ prima che c^- sia enumerato in $H^*(L^q(x) \cup \{f_x\}))$ allora $r^q(x) = \langle\ \rangle$, e $f_x \notin A_q^\alpha$. Se $c^- \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ appare prima, allora dobbiamo esaminare due possibilità: la prima, $c^- \in L^q(x) \cup \{f_x\}$, quindi $c^- = f_x$ ($L^q(x) \subseteq A_d$, per ipotesi induttiva, poiché $a \in A_d$) e in questo caso è facile vedere che $r^q(x) = \langle c^-, a \rangle$. La seconda possibilità è $c \in L^q(x) \cup \{f_x\}$, che similmente implica $c = f_x$: dunque in questi casi segue che $r^q(x) = \langle c, a \rangle$.

Viceversa, supponiamo che $f_x \notin A^\alpha_q$: allora (da Lemma 2 e Nota 2.2.31) $c^- \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ oppure $c \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$. Se $c^- \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ appare prima, come sopra, $c^- \in L^q(x) \cup \{f_x\}$ oppure $c \in L^q(x) \cup \{f_x\}$: se $c^- = f_x$, allora $r^q(x) = \langle c^-, a\rangle$ e $f_x \notin A_d$ dalla scelta di c^-. Notiamo che $c^- \in L^q(x)$ non può verificarsi fintanto che per ipotesi induttiva $L^q(x) \subseteq L^d(x) \cup \{ a \}$, e quindi se $c^- \in L^q(x)$ allora segue $c^- \in A_d$; dall'altro lato, se $c = f_x$ allora $r^q(x) = \langle c, a\rangle$ e $f_x \notin A_d$. Rimane da considerare il caso in cui $c \in H^*(L^q(x) \cup \{f_x\})$ appare prima: ma allora $r^q(x) = \langle\ \rangle$; inoltre $c \in H(L^q(x) \cup \{f_x\})$, quindi, dall'ipotesi induttiva $L^q(x) \subseteq A_d$, avremmo che $f_x \notin A_d$. Questo mostra il passo induttivo. □

Corollario 2.2.34. *Ogni insieme dialettico A, tale che A^c ha almeno due elementi, è rappresentato da un sistema quasidialettico loopless (e la rappresentazione è indipendente da ogni approssimazione computabile all'operatore di enumerazione del sistema quasidialettico).*

Dimostrazione. Sia $d = \langle H, f, c\rangle$ un sistema dialettico. Se $\omega \smallsetminus \{c\} \nsubseteq A_d$, allora applichiamo il precedente lemma. La proposizione riguardante $A = \omega$ è ovvia. □

In questa sottosezione abbiamo introdotto e studiato dei sistemi capaci di formalizzare il concetto di revisione in matematica. Nelle sezioni che seguono, in linea con quanto espresso nella introduzione di questa sottosezione, andremo a comparare la potenza deduttiva dei sistemi dialettici con quella dei sistemi quasidialettici.

2.3 Gradi dialettici, gradi quasidialettici, gradi di Turing e gradi di enumerazione

In questa sezione proviamo che i sistemi dialettici e i sistemi quasidialettici hanno lo stesso contenuto informativo, nel senso che questi rappresentano due classi di insiemi (rispettivamente, insiemi dialettici e insiemi quasidialettici) che hanno gli stessi gradi di Turing e gli stessi gradi di enumerazione.
Un insieme *quasidialettico loopless* è un insieme rappresentato da un sistema quasidialectico approssimato loopless. Questo è proprio se lo è il sistema quasidialettico che lo rappresenta.

Definizione 2.3.1. *Un grado di Turing (grado di enumerazione, rispettivamente) è denominato* dialettico *se contiene un insieme dialettico; ed è denominato* quasidialettico *se contiene un insieme quasidialettico.*

2.3.1 Insiemi dialettici, insiemi quasidialettici e gradi di Turing

Il seguente teorema caratterizza i gradi di Turing dialettici e i gradi di Turing quasidialettici.

Teorema 2.3.2. *I gradi dialettici di Turing e i gradi quasidialettici di Turing coincidono. Più precisamente entrambi coincidono con i gradi di Turing c.e..*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste di due passi. Mostriamo (Lemma 2.3.3) che ogni grado di Turing c.e. è un grado dialettico; dopo di che mostriamo (Lemma 2.3.4) che ogni grado quasidialettico è un grado di Turing c.e.. Dal momento che ogni insieme dialettico è qasidialettico (vedi Lemma 2.2.20 e Corollario 2.2.34) la proposizione segue immediatamente. □

Lemma 2.3.3. *Per ogni insieme c.e. A esiste un sistema dialettico $d = \langle H, f, c\rangle$ tale che $A_d \equiv_{tt} A$.*

Dimostrazione. Questa è una conseguenza immediata del fatto che ogni insieme Π^0_1 $A \neq \omega$ è dialettico (cf. [88]; vedi anche 2.3.8). Quindi, se A è c.e. allora $A \equiv_{tt} A^c$, e A^c è dialettico. □

Lemma 2.3.4. *Se (q, α) è un sistema quasidialettico approssimato, allora A^α_q ha grado di Turing c.e..*

Dimostrazione. Se (q, α) è un sistema quasidialettico approssimato con loop, allora A^α_q è c.e., vedi Lemma 2.2.24. Quindi in questo caso la proposizione è banale.
Consideriamo ora il caso in cui (q, α) è loopless. Ricordiamo il seguente fatto sugli insiemi Δ^0_2. Data una funzione computabile $g(x, s)$ tale che, per ogni x, $g(x, 0) = 0$ e $\lim_s g(x, s)$ esiste. Ricordiamo inoltre che la *funzione del minimo modulo* m per g è la funzione

$$m(x) = \mu s. (\forall t \geq s)[g(x, t) = g(x, s)].$$

Notiamo che se A è un insieme Δ^0_2 tale che $\chi_A(x) = \lim_s g(x, s)$ (dove g è una funzione computabile a codominio $\{0, 1\}$) e m è la funzione di minimo modulo per g, allora $A \leq_T m$. D'altro canto, se B è l'insieme c.e.

$$B = \{\langle x, s\rangle : (\exists t > s)[g(x, t) \neq g(x, s)]\}$$

allora $B \equiv_T m$. Dunque la funzione del minimo modulo ha sempre grado di Turing c.e. (vedi ad esempio [144]). Quindi, se A è un insieme Δ^0_2, $g(x, s)$ è una funzione computabile a codominio $\{0, 1\}$ tale che $\chi_A(x) = \lim_s g(x, s)$, per ogni x, m è la funzione di minimo modulo per g e $m \leq_T A$, dunque A ha grado di Turing c.e..
Se (q, α) è loopless, allora dal Lemma 2.2.22 e Lemma 2.2.28, segue che per ogni x, esiste il limite $\lim_s r_s(x) = r(x)$, e di conseguenza esiste $r(x) \neq \langle\ \rangle$, $\lim_s \rho_s(x) = \rho(x)$; inoltre, la seuqenza computabile di insiemi $\{A_s\}_{s\in\omega}$,

$$A_s = \{f_x : r_s(x) = \langle f_x\rangle\},$$

è una approssimazione Δ^0_2 a A^α_q. Sia m la funzione del minimo modulo per tale approssimazione, o più precisamente per la funzione

$$g(f_x, s) = \begin{cases} 1, & \text{if } f_x \in A_s, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostriamo ora, usando A^α_q come oracolo, che possiamo computare un limite superiore per $m(f_x)$. Fintanto che f è una permutazione computabile segue immediatamente che $m \leq_T A^\alpha_q$.
Se s_x è un passo tale che per ogni $y < x$, $r_s(y)$ ha già raggiunto il limite (con $s_0 = 0$), allora per la procedura quasidialettica, $r_s(x)$ può cambiare al passo $s+1 > s_x$, solo se $r_{s+1}(x) = r_s(x)^\frown\langle\rho_{s+1}(x)\rangle$, oppure se $r_s(x) \neq \langle\ \rangle$ e $r_{s+1}(x) = \langle\ \rangle$. In quest'ultimo caso, per la scelta di s_x, per ogni $t \geq s+1$ abbiamo che $r_{s+1}(x) = \langle\ \rangle$. Per il Teorema 2.2.29 sappiamo che se $r(x) \neq \langle\ \rangle$ allora $range(r(x)) \cap A^\alpha_q = \{\rho(x)\}$. Per computare s_{x+1} basta utilizzare il seguente algoritmo, con oracolo A^α_q: cerca il minimo $s > s_x$ tale che o $r_s(x) = \langle\ \rangle$, oppure $\rho_s(x) \in A^\alpha_q$.
Segue che per ogni $s \geq s_{x+1}$, $g(f_x, s) = g(f_x, s_{x+1})$ e dunque $m(f_x) \leq s_{x+1}$. □

Concludiamo questa sezione con la seguente conseguenza del Teorema 2.3.2. Ricordiamo che un insieme infinito $A \subseteq \omega$ è *immune* se non contiene nessun sottoinsieme infinito c.e..

Corollario 2.3.5. *Ogni grado di Turing dialettico nonzero contiene qualche sistema dialettico immune.*

Dimostrazione. Sia A un insieme dialettico non-decidibile. Per il Teorema 2.3.2 esiste un insieme c.e. non-decidibile B tale che $A \equiv_T B$. Sia

$$S = \{\, \sigma \in 2^{<\omega} : \sigma < \chi_B \,\}$$

dove $<$ è un ordine lessicografico sulle stringhe. Chiaramente, S è c.e.: per vedere ciò, sia $\{\, b_s \,\}_{s\in\omega}$ una enumerazione computabile 1-1 di B; sia $B^s = \{b_0, \ldots, b_s\}$ e sia σ_s il segmento iniziale finito più lungo della funzione caratteristica di B^s che finisce con 1; allora è facile vedere che

$$S = \{\sigma \in 2^{<\omega} : (\exists s)[\sigma < \sigma_s]\}.$$

A questo punto (identificando ω con $2^{<\omega}$), prendiamo il sistema dialettico $d = \langle H, f, c\rangle$, dove f enumera $2^{<\omega}$ nell'ordine lessicografico per estensione, c è una stringa differente da λ, e H è l'operatore di enumerazione

$$\begin{aligned} H =& \{\langle\lambda, \emptyset\rangle\} \cup \{\langle x, \{x\}\rangle : x \in \omega\} \cup \{\, \langle x, \{\, \sigma \,\}\rangle : x \in \omega \,\&\, \sigma \in S \,\} \\ & \cup \{\, \langle x, \{\, \sigma, \tau \,\}\rangle : x \in \omega \,\&\, \mid\sigma| = |\tau| \,\&\, \sigma < \tau \,\} : \end{aligned}$$

l'assioma di $\langle \lambda, \emptyset \rangle \in H$ permette di rispettare la richiesta, nella definizione di sistema dialettico, che $H(\emptyset) \neq \emptyset$. Chiaramente H è un operatore di chiusura. Possiamo vedere ora che

$$A_d = \{\, \sigma : \sigma \subset c_B \,\},$$

come puè essere facilmente provato per induzione su x usando (vedi il Lemma 2.2.30)

$$f_x \in A_d \Leftrightarrow c \notin H(L(x) \cup \{f_x\}).$$

Quindi $A_d \equiv_T A$ e A_d è immune. □

2.3.2 Insiemi dialettici, insiemi quasi dialettici e gradi di enumerazione

Per caratterizzare i gradi di enumerazione degli insiemi dialettici e degli insiemi quasidialettici per prima cosa dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 2.3.6. *Se A è un insieme quasidialettico loopless allora $A^c \leq_e A$.*

Dimostrazione. Sia $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$ un sistema quasidialettico, sia $\alpha = \{H_s\}_{s\in\omega}$ una approssimazione a H tale che (q, α) è loopless e siano infine $r_s(x), \rho_s(x), L_s(x)$ come nella definizione degli insiemi quasidialettici (rispetto a α). Per semplicità, scriviamo $A = A_q^\alpha$. Dal Lemma 2.2.30 e dal Corollario 2.2.32 è facile provare che

$$f_x \in A^c \Leftrightarrow (\exists s)[\{c, c^-\} \cap H_s(L_s(x) \cup \{\, f_x \,\}) \neq \emptyset \,\&\, L_s(x) \subseteq A].$$

Questo fornisce un algoritmo che trasforma ogni data enumerazione di A in una enumerazione di A^c, da cui segue $A^c \leq_e A$. □

Notazione: In ciò che segue denotiamo con il simbolo $\oplus$ il join nel semireticolo dei gradi di Turing.

Corollario 2.3.7. *Se A è un insieme quasidialettico loopless, allora $A \equiv_e A^c \oplus A$, quindi il grado di enumerazione di A è totale (cioè contiene il grafo di qualche funzione totale).*

Dimostrazione. La prova è ovvia poiché, per ogni insieme A, $A^c \oplus A \equiv_e \chi_A$. □

Lemma 2.3.8. *Se A è un insieme quaisidialettico loopless, allora esiste un insieme c.e. B tale che $A \equiv_e B^c$, quindi il grado di enumerazione di A è Π_1^0.*

Dimostrazione. Sappiamo che $A \equiv_T m$, dove m è la funzione del minimo modulo per l'approssimazione Δ_2^0 a A, a cui abbiamo fatto riferimento nella prova del Lemma 2.3.4; d'altro canto, $m \equiv_T B$, per qualche insieme c.e. B, quindi

$$A^c \oplus A \equiv_T B^c \oplus B,$$

dal quale, per la totalità dei gradi di enumerazione di $A^c \oplus A$ e $B^c \oplus B$, vedi per esempio [26], segue
$$A^c \oplus A \equiv_e B^c \oplus B;$$
infine $B^c \equiv_e B^c \oplus B$, fintanto che B è c.e., e quindi, per il precedente corollario, $A \equiv_e B^c$. □

Siamo ora pronti per caratterizzare i gradi di enumerazione dei sistemi dialettici e quelli dei sistemi quasidialettici.

Teorema 2.3.9. *I gradi di enumerazione degli insiemi dialettici e quelli degli insiemi quasidialettici coincidono con i gradi di enumerazione* Π_1^0.

Dimostrazione. Se A è un insieme quasidialettico loopless (e questo include anche il caso in cui A è dialettico), allora il suo grado di enumerazione è Π_1^0 per il Lemma 2.3.8. Se A è rappresentato da un sistema qauasidialettico approssimato con loop, allora A è c.e., e quindi $A \equiv_e B$, per ogni insieme decidibile B: ma ogni insieme decidibile è Π_1^0.
D'altro canto, se B è c.e., allora per il Lemma 2.3.3 esiste un sistema dialettico A tale che $A \equiv_T B$, quindi, similmente alla prova del Lemma 2.3.8, $A^c \oplus A \equiv_e B^c \oplus B$. Ma poiché B è c.e., segue $B^c \oplus B \equiv_e B^c$, e per il Corollario 2.3.7 abbiamo che $A \equiv_e A^c \oplus A$ e quindi $A \equiv_e B^c$. □

Il seguente corollario è un'estensione ai sistemi quasidialettici dell'osservazione fatta da Magari in [88] secondo la quale ogni insieme dialettico c.e. è decidibile.

Corollario 2.3.10. *Se A è un insieme c.e. quasidialettico loopless allora A è decidibile.*

Dimostrazione. Se A è un insieme quasidialettico loopless, allora $A^c \leq_e A$ per il Lemma 2.3.6. Quindi, se A è c.e., altrettanto sarà A^c. □

I risultati mostrati in questa sezione suggeriscono che i sistemi dialettici supportano implicitamente una nozione di revisione. Siamo così giunti ad una risposta, che nella prossima sezione vedremmo essere solo parziale, alla domanda che ci siamo posti nell'introduzione della sottosezione 2.2.4. La proposta di Magari sembra infatti abbastanza robusta da formalizzare teorie matematiche che, nel loro procedere per tentativi ed errori, utilizzano il metodo della revisione. La coincidenza tra gradi dialettici e gradi quasidialettici mostra infatti che i sistemi quasidialettici non incrementano la potenza computazionale dei sistemi dialettici, se per potenza computazionale di un sistema intendiamo il suo grado di computabilità relativa. Tuttavia nella prossima sezione vedremo come le cose cambiano se andiamo a comparare i due sistemi dal punto di vista degli insiemi che rappresentano.

2.4 Distribuzione degli insiemi dialettici e degli insieme quasidialettici nella classe degli insieme limite

Un risultato dovuto a Jockusch (cf. [58]) stabilisce che non esistono completamenti dell'aritmetica di Peano PA che sono una combinazione lineare di insiemi c.e., cioè non esistono completamenti di PA in nessun livello finito della gerarchia di Ershov. Il risultato è stato recentemente generalizzato ad ogni teoria essenzialmente indecidibile da Schmerl (cf. [139]). Data una teoria formale T (con un insieme c.e. di teoremi), e ogni coppia f, c dove f è una permutazione computabile di ω e c è un numero che codifica la contraddizione, è possibile associare a T un sistema dialettico $d = \langle H, f, c\rangle$ tale che A_d è, previa codifica di T, un completamento di T (cf. [88]). Una problema che segue immediatamente è allora quello di caratterizzare i livelli della gerarchia di Ershov che contengono insiemi dialettici e quasidialettici. In questa sezione mostriamo che in ogni livello finito maggiore di 2 della gerarchia di Ershov si trova un sistema dialettico che non appartiene a nessun livello precedente, tuttavia nessun insiemi dialettico esce dalla classe degli insiemi ω-c.e.. Diversamente è possibile trovare un insieme quasidialettico proprio in ogni livello della gerarchia di Ershov e inoltre tale insieme non appartiene a nessun livello precedente.

2.4.1 La gerarchia di Ershov

Diamo ora alcune definizioni e fatti base relativi la gerarchia di Ershov. Come è noto, la gerarchia di Ershov classifica gli insiemi Δ^0_2, attraverso le classi Σ^{-1}_a, dove a è la notazione di Kleene per un ordinale computabile. Per ogni $a \in O$, per O notazione ordinale di Kleene, il simbolo $|a|_O$ rappresenta il numero ordinale di cui a è notazione e il simbolo $<_O$ indica la relazione di ordinamento parziale su O. La gerarchia di Ershov è stata inizialmente introdotta in [33, 34, 35]; la nostra presentazione si basa sul volume [8].

Definizione 2.4.1. *Se $a \in O$ è una notazione per un ordinale computabile diverso da zero, allora un insieme di numeri A è detto essere Σ^{-1}_a se esistono due funzione computabili $g(x, s)$ e $h(x, s)$ tale che, per ogni x, s,*

1. $\chi_A(x) = \lim_s g(x, s)$, *con* $g(x, 0) = 0$;
2. (a) $h(x, 0) = a$ *e* $h(x, s + 1) \leq_O h(x, s)$;
   (b) $g(x, s + 1) \neq g(x, s) \Rightarrow h(x, s + 1) \neq h(x, s)$.

Senza perdita di generalità, possiamo assumere che ad ogni passo s, $\{x : g(x, s) = 1\} \subseteq [0, s]$ dove $[0, s] = \{x : x \leq s\}$.

Ricordiamo che ([34]) se $a <_O b$ allora Σ^{-1}_a è contenuta propriamente in Σ^{-1}_b.

Definizione 2.4.2. *Sia $a \in O$, un insieme A è detto essere* propriamente Σ_a^{-1} *se*

$$A \in \Sigma_a^{-1} \smallsetminus \bigcup_{b <_O a} \Sigma_b^{-1}.$$

Al fine di costruire un insieme A che è propriamente Σ_a^{-1}, è possibile distinguere i due casi in cui $|a|_O$ è un ordinale successore, oppure un ordinale limite:

1. se $|a|_O$ è un successore, diciamo $a = 2^b$, con $|a|_O = |b|_O + 1$, allora $A \in \Sigma_a^{-1} \smallsetminus \Sigma_b^{-1}$;

2. se $|a|_O$ è un limite, diciamo $a = 3 \cdot 5^e$, allora $A \in \Sigma_a^{-1}$ tale che, per ogni n, $A \notin \Sigma_{\phi_e(n)}^{-1}$.

Tuttavia, basandosi sul lemma che segue, nella prova del Teorema 2.4.13 la costruzione di A è mantenuta uniforme. Ricordiamo che se $a \in O$ è una notazione per un ordinale non zero, allora l'insieme $P_a = \{b \in O : b <_O a\}$ è c.e. (vedi ad esempio [8]), e quindi esiste una biezione computabile $p : \omega \times P_a \to \omega$.

Lemma 2.4.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Per ogni $a \in O$, esiste un indice $\{V_e\}_{e\in\omega}$ della famiglia di tutti i Σ_a^{-1}-insiemi, tale che $\{\langle e, x\rangle : x \in V_e\} \in \Sigma_a^{-1}$. Inoltre, da e è possibile trovare in modo effettivo una coppia $\langle g_e, h_e\rangle$ di funzioni computabili, come nella Definizione 2.4.1, che testimoniano $V_e \in \Sigma_a^{-1}$.*

2. *Dato $a \in O$, sia $p : \omega \times P_a \to \omega$ una biezione computabile. Esiste un indice $\{Z_{p(e,b)} : e \in \omega, b \in P_a\}$, di tutti gli insiemi in $\bigcup_{b<_O a} \Sigma_b^{-1}$. Inoltre, da e, b è possibile trovare in modo effettivo una coppia $\langle g_{p(e,b)}, h_{p(e,b)}\rangle$ di funzioni computabili, come definito nella Definizione 2.4.1, che testimoniano $Z_{p(e,b)} \in \Sigma_b^{-1}$.*

Dimostrazione. Rimandiamo a [8] per il punto (1). Per quanto riguarda (2) rimandiamo a [125]. □

I livelli finiti della gerarchia di Ershov e gli insiemi ω-c.e.

Poiché ogni ordinale ha solo una notazione, usualmente scriviamo Σ_n^{-1} al posto di Σ_a^{-1}, se a è la notazione di $n \in \omega$, e diciamo che un insieme A è *n-c.e.* se $A \in \Sigma_n^{-1}$, o equivalentemente, esiste una funzione computabile $g(x, s)$ tale che

1. $\chi_A(x) = \lim_s g(x, s)$, e $g(x, 0) = 0$;

2. $|\{s : g(x, s + 1) \neq g(x, s)\}| \leq n$.

Possiamo assumere che per ogni s, $\{x : g(x,s) = 1\} \subseteq [0,s]$. Inoltre,

Definizione 2.4.4. *Un insieme A è ω-c.e. se esistono due funzioni computabili $g(x,s)$ e $h(x)$ tali che, per ogni x,*

1. $\chi_A(x) = \lim_s g(x,s)$ *e* $g(x,0) = 0$*;*
2. $|\{s : g(s+1) \neq g(s)\}| \leq h(x)$*.*

Come nella Definizione 2.4.1, possiamo assumere che ad ogni s, $\{x : g(x,s) = 1\} \subseteq [0,s]$.

2.4.2 Insiemi dialetici e gerachia di Ershov

Caratterizziamo ora i livelli $a \in O$ della gerarchia di Ershov contenenti insiemi dialettici Σ_a^{-1}. Il primo punto del Teorema 2.4.5 è essenzialmente dovuto a Bernardi [10].

Teorema 2.4.5. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se A_d è un insieme dialettico, allora A_d è ω-c.e.;*
2. *per ogni n con $2 \leq n \leq \omega$, esiste un insieme dialettico proprio n-c.e..*

Dimostrazione. Iniziamo dal dimostrare il punto (1). La proposizione segue dal fatto che se A_d è dialettico allora $A_d \leq_{tt} \emptyset'$ ([10]), e dall'altro lato, ogni insieme $B \leq_{tt} \emptyset'$ è ω-c.e. (cf. [122]). Diamo ora una prova diretta del fatto che A_d è ω-c.e., dove ci riferiamo all'approssimazione $\{A_{d,s}\}_{s\in\omega}$ di A_d, data dall'insieme delle tesi provvisorie. Sia $\sigma(y,s)$ la stringa di lunghezza $y+1$,

$$\sigma(y,s)(i) = \begin{cases} 1, & \text{if } f_i \in L_s(y+1), \\ 0 & \text{if } f_i \notin L_s(y+1). \end{cases}$$

Dimostriamo che per ogni y, $\sigma(y,s)$ può cambiare al massimo 2^{y+1} volte. Questa vale banalmente per $y=0$. Se t_0 è il minimo passo al quale $\sigma(y,s)$ non cambia più, allora dopo t_0, $\sigma(y+1,s)$ può cambiare nuovamente al cambiare di $\chi_{A_{d,s}}(f_{y+1})$. Ma questo può avvenire al massimo altre due volte. Dunque $\sigma(y+1,s)$ può cambiare al massimo 2^{y+2} volte. Da questo segue banalmente che, in generale, $\chi_{A_{d,s}}(f_y)$ e dunque $\sigma(y,s)$ può cambiare al massimo 2^{y+1} volte. Questo conclude la prova di (1).

Mostriamo ora il punto (2). Sia $2 \leq n < \omega$ e sia $\{V_e : e \in \omega\}$ una enumerazione computabile degli insiemi $(n-1)$-c.e. nel senso della definizione del Lemma 2.4.3 (1), e corrispondentemente sia $\{V_{e,s} : e,s \in \omega\}$ una sequenza computabile di insiemi finiti tali che, per ogni e, $\{V_{e,s} : s \in \omega\}$ è una approssimazione $(n-1)$ a V_e. Prendiamo

$$V_{e,s} = \{\, x : g_e(x,s) = 1 \,\},$$

dove ci riferiamo alla coppia di funzioni computabili $\langle g_e, h_e \rangle$ che testimoniano che V_e è in Σ^{-1}_{n-1}, come nel Lemma 2.4.3 (1); notiamo che, per ogni x,

$$|\{s : \chi_{V_{e,s}}(x) \neq \chi_{V_{e,s+1}}(x)\}| \leq n - 1.$$

Costruiamo un sistema dialettico d tale che $A_d \neq V_e$, per ogni e e $A_d \in \Sigma^{-1}_n$. Il nostro sistema dialettico sarà della forma $d = \langle H, f, c \rangle$, dove noi costruiremo H, mentre f è la funzione di identità, cioè $f_x = x$ e $c = 1$. Al fine di rendere la costruzione più semplice da descrivere, l'operatore di enumerazione H che costruiremo non sarà un operatore di chiusura. Tuttavia, applicando la procedura dialettica al fine di determinare l'insieme delle tesi finali (che non utilizza il fatto che l'operatore di enumerazione è un operatore di chiusura), la definizione di A_d rimane legittima: proveremo, nel Lemma 2.4.10, che $A_d = A_{d'}$ dove $d' = \langle H', f, c \rangle$ e H' è un operatore di chiusura.

Descrizione informale della costruzione

La costruzione è per passi. Al passo s definiamo:

1. una approssimazione H_s all'operatore di enumerazione H;
2. i valori $g(x, s)$ di una funzione computabile; la costruzione garantirà che per ogni x, esiste $\lim_s g(x, s)$, e di fatto $|\{s : g(x, s) \neq g(x, s + 1)\}| \leq n$ (quindi $A = \{x : \lim_s g(x, s) = 1\}$ è in Σ^{-1}_n) e $A \neq V_e$ per ogni e.

In altre parole, costruiamo un insieme A con la proprietà desiderata che A sia n-c.e., ma non $(n - 1)$-c.e.; contemporaneamente, costruiamo H, dal definire passo dopo passo una approssimazione computabile a H; osserviamo che $A = A_d$, dove $d = \langle H, f, c \rangle$.

Richieste. In aggiunta alle richieste generali che $A = A_d$, e A è n-c.e., le richieste da soddisfare sono, per ogni $e \in \omega$:

$$P_e : A \neq V_e.$$

Strategia per soddisfare P_e. Nominiamo un testimone b_e, dove inizialmente $b_e \in A$ (quindi inizialmente, cambiamo $\chi_A(b_e)$ (o, piuttosto, il valore corrente $\chi_{A_s}(b_e)$ di $\chi_A(b_e)$) dal valore 0 al valore 1); allora, ogni vola che $\chi_A(b_e) = \chi_{V_e}(b_e)$, rispondiamo cambiando $\chi_A(b_e)$, così da avere $\chi_A(b_e) \neq \chi_{V_e}(b_e)$. Fintanto che $\chi_{V_e}(b_e)$ può cambiare al massimo $n - 1$ volte, segue che $\chi_A(b_e)$ cambierà al massimo n volte, entrambi gli insiemi A e V_e finiranno con i valori finali $\chi_A(b_e) \neq \chi_{V_e}(b_e)$, come desiderato.

Dunque, ciò che dobbiamo veramente spiegare è come costruire simultaneamente H, in modo da ottenere $A = A_d$. A tal fine, un *testimone* per P_e è un intervallo chiuso $I(e) = [a_e, b_e]$, dove definiamo $b_e = a_e + n - 2$. Supponiamo che per ogni e, $a_{e+1} = a_e + n - 1$, così che gli insiemi $I(e)$ sono a due a due disgiunti. Supponiamo inoltre che $a_0 = 2 = c + 1$.
Quando designiamo $I(e)$, momentaneamente poniamo $I(e) \subseteq A$, e eseguiamo il seguente algoritmo, dove i numeri di cicli sono contati da i_e:

1. poni $i_e = n - 1$;

2. se $b_e \in V_e$, togli b_e da A e aggiungi l'assioma $\langle c, \{a_e + j, b_e : j < i_e\}\rangle \in H$; poni $i_e = i_e - 1$; vai a (3);

3. se $b_e \notin V_e$, allora inserisci b_e in A; elimina $a + i_e$ da A e aggiungi l'assioma $\langle c, \{a_e + i_e\}\rangle \in H$ (dal quale segue che $a_e + i_e$ non appartiene a A_d); poni $i_e = i_e - 1$; vai a (2).

Analisi dei risultati della strategia per P_e. Analizziamo più in dettaglio i risultati della strategia per P_e. Segnatamente verifichiamo la strategia per ottenere $A = A_d$, dove $d = \langle H, f, c\rangle$.
Se $i_e = n - 1$ è il valore finale di i_e, allora non aggiungiamo nessun assioma in H che involve elementi di $I(e)$, dunque $b_e \in A_d$ e $a_e + j \in A_d$, per ogni $j < n - 2$. Questi valori di A_d coincidono con quelli di A relativamente agli elementi di $I(e)$.
Supponiamo che il valore di i_e decresce a $i_e = i$ da $i_e = i + 1$. Usiamo il Lemma 2.2.30, il Corollario 2.2.32, un semplice argomento induttivo su i e la definizione di H. Assumiamo per induzione che non siano stati dati assiomi $\langle c, \{a_e + j\}\rangle \in H$, per ogni $j < i$; nessun assioma $\langle c, \{a_e + j, b_e : j < i\}\rangle \in H$; e ci siano già assiomi $\langle c, \{a_e + j\}\rangle \in H$, per ogni $i < j < n - 2$.

1. se b_e è tolto da A, allora aggiungiamo l'assioma $\langle c, \{a_e + j, b_e : j < i\}\rangle \in H$; concludiamo che se questo è il valore finale di i_e, allora $b_e \notin A_d$, fintanto $\{a_e + j : j < i\} \subseteq A_d$, e quindi $c \in H(L(b_e) \cup \{b_e\})$; inoltre $a_e + j \notin A_d$, per ogni $i \leq j < n - 2$; il corrispondente valore di χ_{A_d} sugli elementi di $I(e)$ coincide con quelli di χ_A;

2. se b_e è reinserito in A, allora aggiungiamo l'assioma $\langle c, \{a_e + i\}\rangle \in H$, dunque $a_e + i$ sarà fuori A_d; quindi l'assioma $\langle c, \{a_e + j, b_e : j < i + 1\}\rangle \in H$ non si applica e se i è il valore finale di i_e, allora $b_e \in A_d$ poiché $c \notin H(L(b_e) \cup \{b_e\})$. Inoltre abbiamo che $\{a_e + j : j < i\} \subseteq A_d$, e $a_e + j \notin A_d$, per ogni $i < j < n - 1$; il corrispondente valore di χ_{A_d} sugli elementi di $I(e)$ coincide con quelli di χ_A.

La costruzione. La costruzione è per passi. Faremo uso dei parametri $i_{e,s}$, approssimando al passo s il numero i_e come nella sezione 2.4.2.

Definizione 2.4.6. *Un richiedente* P_e richiede attenzione *al passo* s*, se* $s > 0$*, e (nell'ordine)* $i_{e,s}$ *non è definito oppure* $b_e \in V_{e,s}$ *se e solo se* $b_e \in A_{s-1}$*.*

Passo 0**.** Sia $H_0 = \{\langle 0, \emptyset \rangle, \langle c, \{c\} \rangle\}$. (Abbiamo $0 \in H(\emptyset)$ al fine di soddisfare la definizione di sistema dialettico, che chiede $H(\emptyset) \neq \emptyset$; chiediamo invece $\langle c, \{c\} \rangle \in H_0$ poiché avremmo immediatamente $c \in H(X)$ se $c \in X$.) Sia anche $g(x, 0) = 0$, per ogni x. Poniamo $i_{e,0}$ indefinito, per ogni e.

Passo $s + 1$**.** Consideriamo tutti gli $e \leq s$ tali che P_e richiedono attenzione al passo $s + 1$.

1. Se $i_{e,s}$ non è definito, allora poniamo $i_{e,s+1} = n - 1$. Poniamo $I(e) \subseteq A_{s+1}$ dal definire $g(x, s + 1) = 1$, per ogni numero $x \in I(e)$.

2. Altrimenti (necessariamente, $i_{e,s} > 0$) definiamo $i_{e,s+1} = i_{e,s} - 1$, e:

   (a) se $b_e \in V_{e,s+1}$ allora aggiungiamo l'assioma $\langle c, \{a_e + j, b_e : j < i_{e,s}\} \rangle \in H$, definiamo $g(b_e, s + 1) = 0$;

   (b) se $b_e \notin V_{e,s+1}$ allora aggiungiamo l'assioma $\langle c, \{a_e + i_{e,s}\} \rangle \in H$, definiamo $g(a_e + i_{e,s}, s + 1) = 0$, $g(b_e, s + 1) = 1$.

Poniamo H_{s+1} come H_s più gli assiomi per H aggiunti al passo $s + 1$. Sia inoltre $g(0, s+1) = 1$. A meno che non esplicitamente ridefiniti durante il passo $s+1$, tutti i restanti parametri e valori mantengono lo stesso valore del passo s. In particolare $g(c, s + 1) = 0$. Vai al passo $s + 2$.

Verifica. La verifica si basa sui seguenti lemmi.

Lemma 2.4.7. *A è n-c.e..*

Dimostrazione. Se un numero x cade in qualche $I(e)$, allora è chiaro che $\chi_{A_s}(x) = g(x, s)$ può cambiare al massimo n volte, come abbiamo già visto nella sezione 2.4.2. Altrimenti, $x \in \{0, 1\}$: allora $\chi_{A_s}(x)$ cambia da 0 a 1 esattamente una volta, se $x = 0$, e $\chi_{A_s}(x)$ non cambia mai, se $x = 1 = c$. □

Lemma 2.4.8. *Per ogni e, A soddisfa P_e.*

Dimostrazione. Cambiamo il valore $\chi_{A_s}(b_e)$ tante volte quanto è necessario diagonalizzare contro il valore finale $\chi_{V_e}(b_e)$. □

Lemma 2.4.9. *$A = A_d$.*

Dimostrazione. Per induzione su x, possiamo facilmente mostrare che $\chi_A(x) = \chi_{A_d}(x)$. Questo è certamente vero per $x = 0, 1$. Supponiamo che questo valga per ogni $x < a_e$. Non appena $L_s(a_e)$ si stabilizza, la procedura dialettica simula il modulo per P_e, anche se non in modo sincronizzato, e in modo più lento dal momento che i numeri devono essere proposti e scartati uno per uno in diversi passi. Come è chiaro dalla discussione in sezione 2.4.2, gli assiomi che aggiungiamo a H in modo da soddisfare P_e raggiungeranno l'obiettivo desiderato di porre $\chi_A(x) = \chi_{A_d}(x)$ per ogni $x \in I(e)$. □

Lemma 2.4.10. *Esiste un sistema dialettico d' tale che $A_d = A_{d'}$.*

Dimostrazione. Prendiamo

$$H' = H \cup \{\langle x, \{x\}\rangle : x \in \omega\} \cup \{\langle x, D\rangle : x \in \omega, \langle c, D\rangle \in H\}.$$

È facile vedere che H' è un operatore di chiusura, e ovviamente $c \in H'(X)$ se e solo se $c \in H(X)$, dal modo in cui abbiamo definito gli assiomi di H che coinvolgono c. Quindi, $d' = \langle H', f, c\rangle$ è il sistema dialettico desiderato. □

Infine mostriamo brevemente come dimostrare il punto (2) quando $n = \omega$.
Iniziamo dal prendere un elenco effettivo di tutti gli insiemi n-c.e., per i vari $n \geq 1$: per esempio, prendiamo $Z_{\langle e,n\rangle} = V_e^n$, dove $\{V_e^n\}_{e\in\omega, n\geq 1}$ è una lista computabile di tutti gli insiemi n-c.e..
Un testimone per il requisito $P_{\langle e,n\rangle}$ (con $e \geq 0$ e $n \geq 1$) è ora un intervallo chiuso $I(\langle e,n\rangle) = [a_{\langle e,n\rangle}, a_{\langle e,n\rangle} + n - 1]$: questi intervalli sono scelti in modo che $a_{\langle e,n\rangle} \geq 2$, e tali da formare una partizione di ω. Il resto della prova è esattamente come prima, con la sola differenza che i testimoni sono ora intervalli chiusi di lunghezza variabile. □

Nota 2.4.11. *Notiamo che la prova di (2) del teorema precedente non utilizza alcuna funzione di priorità. Ogni requisito mantiene il proprio testimone per sempre e non vi è alcuna interferenza tra le diverse strategie per i vari requisiti.*

Nota 2.4.12. *Il punto (2) del Teorema 2.4.5 non può essere esteso in modo da includere il caso $n = 1$, perché ogni insieme dialettico c.e. è decidibile ([88]) e quindi ogni insieme dialettico* 1*-c.e. è anche* 0*-c.e..*

2.4.3 Insiemi quasidialettici e gerarchia di Ershov

L'obiettivo di questa sezione è quello di dimostrare che per ogni notazione $a \in O$ di un ordinale computabile diverso da zero vi è un insieme quasidialettico proprio, che è propriamente Σ_a^{-1}. Più precisamente: se $|a_o| = 1$ esiste un insieme quasidialettico proprio A, rappresentato da un sistema quasidialettico approssimato con loop, tale che A è propriamente Σ_a^{-1}, quindi A è c.e. ma non decidibile; se $|a|_O \geq 2$ esiste un insieme quasi dialettico proprio loopless che è propriamente Σ_a^{-1}. Da questo segue che esistono insiemi quasidialettici loopless propri che non sono dialettici.

Teorema 2.4.13. *Per ogni notazione $a \in O$, con $|a| \geq 2$, esiste un insieme qausidialettico proprio loopless che è propriamente Σ_a^{-1}.*

Dimostrazione. La prova si basa sulla possibilità di costruire, per ogni ordinale a tale che $|a| \geq 2$, un adeguato sistema quasidialettico $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$, assieme ad una adeguata approssimazione calcolabile α a H, tramite i quali si rende possibile scegliere, se necessario ad un passo $s+1$, una coppia di numeri $y < x$ (con $f_y, f_x \neq c, c^-$), con i quali eseguire il seguente algoritmo (chiamato *algoritmo di eliminazione/recupero*). Supponiamo che ad un certo passo $s+1$ abbiamo $f_x \in A^\alpha_{q,s}$ (l'insieme delle tesi provvisorie al passo s) ma vogliamo rimuovere f_x dalla tesi provvisorie: a tal fine definiamo al passo $s+1$ l'assioma $\langle c, \{\rho_s(y), f_x\}\rangle \in H$ (diremo che *y elimina f_x al passo $s+1$*). Se a qualche passo $t+1 > s+1$, vogliamo reinserire f_x nella tesi provvisorie, allora al passo $t+1$, definiamo l'assioma $\langle c^-, \{\rho_s(y)\}\rangle \in H$ (diremo che *y recupera f_x al passo $s+1$*): questo assioma ha l'effetto di porre $\rho_s(y)$ fuori da $A^\alpha_{q,t+1}$, così che non si rende più possibile applicare l'assioma $\langle c, \{\rho_s(y), f_x\}\rangle \in H$; in tal modo, la procedura quasidialettica (cioè, il procedimento attraverso il quale sono costruiti gli insiemi di tesi provvisori) proporrà f_x ancora una volta reinserendolo tra le tesi provvisorio.
Se (q, α) è loopless, e quindi per il Lemma 2.2.28 $A^\alpha_q = \{ f_x : r(x) = \langle f_x \rangle \}$, è chiaro che, usando la procedura quasidialettica, con questo algoritmo si può spostare f_x dentro e fuori da A^α_q tutte le volte che vogliamo.
Data la notazione $a \in O$, $|a| \geq 2$ fissiamo una biezione calcolabile $p : \omega \times P_a \to \omega$. Quindi, per il Lemma 2.4.3 (2), possiamo fare riferimento a una indicizzazione $\{Z_{p(e,b)} : e \in \omega, b \in P_a\}$ per tutti gli insiemi in $\bigcup_{b <_O a} \Sigma_b^{-1}$, tale che da e, b è possibile trovare in modo effettivo una coppia di funzioni calcolabili $\langle g_{p(e,b)}, h_{p(e,b)}\rangle$, come nella Definizione 2.4.1, testimonianti il fatto che $Z_{p(e,b)} \in \Sigma_b^{-1}$.

Descrizione informale della costruzione

Costruiamo il sistema quasidialettico proprio $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$, insieme ad una approssimazione calcolabile loopless $\alpha = \{ H_s \}_{s \in \omega}$ a H, tale che $A^\alpha_q \neq Z_n$, per ogni $n = p(e, b)$, $e \in \omega$ e $b <_O a$. Per f scegliamo la funzione identità, $f^-(x) = 3x$, $c = 1$, e $c^- = 2$. Esattamente come nella prova del Teorema 2.4.5, per rendere la struttura più semplice da descrivere, l'operatore di enumerazione H che ci accingiamo a costruire non sarà un operatore di chiusura: tuttavia, si può ancora definire A^α_q per la quintupla $q = \langle H, f, f^-, c, c^- \rangle$: allora proveremo, nel Lemma 2.4.18, che $A^\alpha_q = A^{\alpha'}_{q'}$ dove $q' = \langle H', f, f^-, c, c^- \rangle$, per qualche operatore di chiusura H', e qualche approssimazione α' a esso. q e α ci permetteranno di scegliere, secondo necessità, delle coppie di numeri y, x come nel meccanismo di eliminazione/ripristino, che permetteranno di raggiungere l'obiettivo desiderato. La costruzione è per passi. Al passo s definiamo

1. un'approssimazione H_s all'operatore di enumerazione H;

2. valori $g(x, s)$, e $h(x, s)$ di funzioni computabili, che garantiscono che per ogni x, esiste $\lim_s g(x, s)$. La coppia $\langle g, h\rangle$ testimonierà che $A = \{x : \lim_s g(x, s) = 1\}$ è in Σ_a^{-1}, e $A \neq Z_n$, per ogni n. Durante la costruzione, definiamo

$$A_s = \{x : g(x, s) = 1\}.$$

In tal modo costruiamo un insieme A con la struttura desiderata $A \in \Sigma_a^{-1} \smallsetminus \bigcup_{b<_O a} \Sigma_b^{-1}$; contemporaneamente, definiamo H attraverso una approssimazione loopless $\alpha = \{\, H_s \,\}_{s\in\omega}$; alla fine mostreremo che $A = A_q^\alpha$. Per semplicità, nel resto della prova scriveremo $A_{q,s} = A_{q,s}^\alpha$, e $A_q = A_q^\alpha$.

Requisiti. I requisiti da soddisfare sono, per ogni $n = p(e, b)$, con $e \in \omega$ e $b <_O a$:

$$S : A \in \Sigma_a^{-1}$$
$$P_n : A \neq Z_n.$$

Strategia per soddisfare P_n. Come per il caso dei sistemi dialettici, la strategia per raggiungere $A \neq Z_n$ è ovvia: si sceglie un testimone x_n; inizialmente mettiamo $x_n \in A$ (notiamo che $f_{x_n} = x_n$); allora continuiamo a estrarre e inserire x_n, rispondendo ai movimenti di x_n dentro e fuori Z_n, in modo tale da diagonalizzare $\chi_A(x_n)$ contro $\chi_{Z_n}(x_n)$. Manteniamo traccia dei cambiamenti di $\chi_A(x_n)$ aggiornando g e h: inizialmente poniamo $g(x_n, 0) = 0$ e $h(x_n, 0) = a$; se al passo $s+1$ cambiamo $\chi_A(x_n)$, cambiamo corrispondentemente $g(x_n, s+1)$, e diminuiamo $h(x_n, s+1) <_O h(x_n, s)$, in modo che non finiamo in $h(x_n, t) = 1$ (ricordiamo che $|1|_O = 0$) prima che lo faccia $h_n(x_n, t)$.

Dobbiamo ora spiegare come costruire simultaneamente H e $\alpha = \{H_s\}_{s\in\omega}$, in modo da ottenere $A = A_q$. Un *testimone* per P_n, con $n = p(e, b)$, è ora l'intervallo di due elementi $I(n) = [y_n, x_n]$ dove $y_n = 3(n+1)+1$, $x_n = 3(n+1)+2$, quindi $x_n = y_n+1$ e $y_n, x_n \notin range(f^-)$. Dobbiamo garantire che al limite i valori $\chi_A(x_n)$ e $\chi_{A_q}(x_n)$ sono uguali.
Usiamo i_n per contare il numero di cicli; per semplicità, usiamo le notazioni $z^{(i)} = (f^-)^i(z)$ (con $z^{(0)} = z$), e per ogni numero i, k_i denota il più grande intero tale che $2k_i \leq i$:

1. sia $i_n = 0$; mettiamo y_n e x_n in A;

2. se $x_n \in Z_n$, allora estraiamo x_n da A, e aggiungiamo l'assioma $\langle c, \{y_n^{(k_{i_n})}, x_n\}\rangle \in H$; definiamo $i_n = i_n + 1$;

3. se $x_n \notin Z_n$, allora reinseriamo x_n in A, estraiamo $y_n^{(k_{i_n})}$ da A, mettiamo $y_n^{(k_{i_n}+1)}$ in A (notiamo che $k_{i_n}+1 = k_{i_n+1}$), e aggiungiamo l'assioma $\langle c^-, \{y_n^{(k_{i_n})}\}\rangle \in H$; definiamo $i_n = i_n + 1$.

Analisi dei risultati della strategia per P_n. Al fine di avere $A_q = A$, l'idea è di far giocare il meccanismo di eliminazione/ripristino a q e α utilizzando la coppia y_n, x_n, in modo tale da ottenere una sequenza di passi $s_0 < s_1 < \cdots < s_{i_n}$ in cui eseguire il meccanismo (dove i_n è il valore finale del contatore). Così per ogni $i \leq i_n$, $y_n^{(k_i)} = \rho_{s_i}(y_n)$, e

(a) se abbiamo bisogno di estrarre x_n da A al passo s_i, allora y_n elimina x_n al passo s_i;

(b) se abbiamo bisogno di reinserire x_n in A al passo s_i, allora y_n recupera x_n al passo s_i.

Con la scelta di f^-, y_n, x_n e la definizione di H, è facile vedere che il meccanismo di eliminazione/ripristino che giochiamo con y_n, x_n non interferisce tra differenti strategie richieste, e quindi raggiunge i suoi obiettivi. Inoltre, al limite abbiamo $r(y_n) = \langle y_n, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(k_{i_n})}\rangle$, e per ogni $z \in r(y_n) \cup \{x_n\}$, otteniamo lo stesso valore limite $\chi_A(z) = \chi_{A_q}(z)$, fintanto che gli assiomi di H certamente raggiungono gli obiettivi desiderati dopo che $L_s(y_n)$ ha raggiunto il limite. Infatti, non appena $L_s(y_n)$ si stabilizza, la procedura quasidialettica propone, in una sequenza di passi successivi, la stessa situazione relativamente a x_n e alla pila y_n, come quella ottenuta dal modulo per P_n al valore corrente del contatore. Da questo momento la procedura quasidielettica simula esattamente il modulo per P_n. In particolare si ha che $A \cap r(y_n) = A_q \cap r(y_n) = \{y_n^{(k_{i_n})}\}$.
Come nel caso analogo di un P-requisito nella prova del Teorema 2.4.5, la discussione informale sopra fatta relativamente ai movimenti di $\rho_s(y_n)$ e, in particolare, di x_n, dimostra che siamo finalmente in grado di diagonalizzare $\chi_A(x_n)$ contro $\chi_{Z_n}(x_n)$, fintanto che non si esauriscono la quota di variazioni ammissibili compatibili con l'avere $A \in \Sigma_a^{-1}$, cioè fintanto che $h(x_n, t)$ non raggiunge, come notazione, l'ordinale 0, prima di $h_n(x_n, t)$. Diversamente da quanto fatto nella prova del Teorema 2.4.5 in questo caso dobbiamo combinare la strategia per P_n, con una strategia adatta a S. Nel prossimo paragrafo descriviamo come fare.

Strategia per soddisfare S. Definito per passi due funzioni computabili $g(x, s), h(x, s)$, che testimoniano che $A \in \Sigma_a^{-1}$. Quando, lavorando per soddisfare P_n, con $n = p(e, b)$, poniamo x_n in A, diciamo al passo s_0, e definiamo $h(x_n, s_0) = b$: fino a questo passo, avevamo $h(x_n, s) = a$. Ai passi successivi, ogni volta che muoviamo x_n come sopra, diciamo al passo $s+1$, cambiamo il valore di $g(x_n, s+1)$, e diminuiamo $h(x_n, s+1)$ definendo

$$h(x_n, s+1) = h_n(x_n, s+1) :$$

fintanto che l'azione viene eseguita perché c'è stato un cambiamento $g_n(x_n, s)$ che si è verificato tra il passo t, a cui abbiamo ridefinito $h(x_n, s) = h_n(x_n, t)$, e $s+1$, allora $h(x_n, s+1)$ diminuisce rispetto alla relazione $<_O$, a seguito della riduzione di $h_n(x_n, s+1)$. Pertanto, un semplice argomento induttivo mostra che, per ogni s,

$$h(x_n, s) \geq h_n(x_n, s).$$

Ciò dimostra che, confrontata con Z_n l'approssimazione $\{ A_s \}_{s\in\omega}$ all'insieme definito A consente, relativamente a x_n, un possibile cambio in più rispetto a Z_n, in modo da poter raggiungere la diagonalizzazione desiderata. Per quanto riguarda y_n, e gli altri potenziali numeri $y_n^{(i)}$, che entrano nella strategia per P_n, non abbiamo alcun problema a soddisfare S, dato che ogni numero $y_n^{(i)}$ si muove al massimo due volte, vale a dire che viene enumerato in A, e quindi può essere eliminato ancora: pertanto, quando $y_n^{(i)}$ è enumerato in A, diciamo al passo s, sarà sufficiente porre $h(y_n^{(i)}, s) = 2$, notazione ordinale di 1. (Qui è dove viene utilizzato il presupposto che $|a|_O \geq 2$, poiché $h(y_n^{(i)}, s) = 2$ salta a 2 da una notazione più grande.)

Costruzione. La costruzione è per passi. Per ogni n, s, definiamo

$$Z_{n,s} = \{ z : g_n(z, s) = 1 \},$$

e approssimiamo il contatore i_n con $i_{n,s}$.

Definizione 2.4.14. *Diciamo che P_n* richiede attenzione *al passo s, se $s > 0$, e (nell'ordine) o $i_{n,s}$ è indefinito oppure $x_{n,s} \in Z_{n,s+1}$ se e solo se $x_{n,s} \in A_{s-1}$.*

È inteso che, al termine del passo $s+1$, parametri e valori (compresi i valori per $g(x, s+1)$ e $h(x, s+1)$) che non sono stati esplicitamente ridefiniti, mantengono lo stesso valore del passo s.

Passo 0. Sia $H_0 = \{\langle 0, \emptyset\rangle, \langle c, \{c\}\rangle, \langle c^-, \{c^-\}\rangle\}$. Siano $g(x, 0) = 0$, e $h(x, 0) = a$, per ogni x. Per ogni n, sia $i_{n,0}$ indefinito.

Passo $s+1$. Consideriamo tutti gli $n \leq s$ tali che P_n richiede attenzione. Quindi prendiamo in considerazione due casi (in cui $n = \langle e, b\rangle$):

1. se $i_{n,s}$ non è definito, poniamo $i_{n,s+1} = 0$, $g(y_n, s+1) = 1$, $h(y_n, s+1) = 2$, $g(x_n, s+1) = 1$, $h(x_n, s+1) = b$;

2. altrimenti poniamo $i_{n,s+1} = i_{n,s} + 1$, e (denotiamo $i = i_{e,s}$)

   (a) Se $x_n \in Z_{n,s+1}$ aggiungiamo l'assioma $\langle c, \{y_n^{(k_i)}, x_n\}\rangle \in H$. Definiamo $g(x_n, s+1) = 0$, e $h(x_n, s+1) = h_n(x_n, s+1)$;

   (b) Se $x_n \notin Z_{n,s+1}$ aggiungiamo l'assioma $\langle c^-, \{y_n^{(k_i)}\}\rangle \in H$. Definiamo $g(x_n, s+1) = 1$, e $h(x_n, s+1) = h_n(x_n, s+1)$; definiamo anche $g(y_n^{(k_i)}, s+1) = 0$, e $h(y_n^{(k_i)}, s+1) = 1$; infine definiamo $g(y_n^{(k_i+1}, s+1) = 1$ e $h(y_n^{(k_i+1)}, s+1) = 2$. (Notiamo che in questo caso $k_{i+1} = k_i + 1$.)

Poniamo H_{s+1} essere H_s più gli assiomi per H aggiunti al passo $s+1$. Infine, definiamo $g(0, s+1) = 1$, $h(0, s+1) = 1$, $g(c, s+1) = g(c^-, s+1) = 0$, $h(c, s+1) = h(c^-, s+1) = 1$. Per tutte le altre $z \leq s$ tale che z è nel codominio di $f^-(x) = 3x$, e $h(z, s) = a$, poniamo $g(z, s+1) = 1$ e $h(z, s+1) = 2$.

Verifica. La verifica si basa sui seguenti lemmi.

Lemma 2.4.15. $A \in \Sigma_a^{-1}$.

Dimostrazione. Abbiamo definito per passi una coppia di funzioni calcolabili $\langle g, h\rangle$ che testimoniano che $A \in \Sigma_a^{-1}$, come detto nella sezione 2.4.3. $\square$

Lemma 2.4.16. *Per ogni n, P_n è soddisfatto, cioè $A \neq Z_n$; esistono i limiti $i_n = \lim_s i_{n,s}$ e $r(y_n) = \lim_s r(y_n)$; per i valori limite $r(y_n)$ e $r(x_n)$ abbiamo, rispettivamente, $r(y_n) = \langle y_n, y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k_{i_n})}\rangle$, e $r(x_n) = \langle x_n\rangle$ se $x_n \notin Z_n$, altrimenti $r(x_n) = \langle\ \rangle$ se $x_n \in Z_n$.*

Dimostrazione. Sia dato n. Prima di tutto, si noti che né y_j, né x_j, scelti come testimoni per $I(j)$, appartengono al codominio della funzione $f^-(x) = 3x$. Per tale ragione non si sovrappongono insiemi della forma $\{y_j^{(i)} : i \in \omega\}$ e $\{x_j\}$, per differenti j. È allora evidente che le azioni relative alle diverse richieste non interferiscono una con l'altra. Quindi, il meccanismo di eliminazione/recupero giocato con y_n, x_n ha successo, e noi siamo in grado di continuare a cambiare il valore di $g(x_n, s)$ (cioè, di $\chi_{A_s}(x_n)$) tutte volte (ovviamente per un numero finito di volte) che né abbiamo bisogno al fine di diagonalizzare $\chi_A(x_n)$ contro $\chi_{Z_n}(x_n)$. Dunque otteniamo $A \neq Z_n$. È inoltre chiaro, che vi è una fase in cui non cambiamo più $i_{n,s}$. Le affermazioni che restano seguono facilmente. $\square$

Lemma 2.4.17. $A = A_q$.

Dimostrazione. Dimostriamo che il valore limite $\lim_s g(u, s)$ richiesto dalla costruzione per ogni u, si ottiene anche per la sequenza $\{\, A_{q,s} \,\}_{s \in \omega}$, cioè, $\lim_s g(u, s) = \lim_s \chi_{A_{q,s}}(u)$. Questo può essere mostrato per induzione su u. L'affermazione è banalmente vera per $u = 0, 1, 2$. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per tutti i $v < 3u$: allora è vero per $z = 3u$, poiché in questo caso $r(z) = \langle z \rangle$, oppure $r(z) = r(y_j)$, per qualche $y_j < z$. Mostriamo ora che l'affermazione è vera per $3u+1$ e $3u+2$: sia n tale che $y_n = 3u+1$ e $x_n = 3u+2$. Come è evidente dalla discussione fatta nella sezione 2.4.3, gli assiomi che aggiungiamo a H, al fine di soddisfare P_n, raggiungono, dopo che $L_s(y_n)$ si è stabilizzato, l'obiettivo desiderato di ottenere $\chi_A(v) = \chi_{A_q}(x)$ per ogni $v \in r(y_n) \cup \{x_n\}$. □

Lemma 2.4.18. *Esiste un sistema quasidialettico* (q', α')*, con* $q' = \langle H', f, f^-, c, c^- \rangle$*, dove* H' *è un operatore di chiusura, tale che* $A_q = A_{q'}^{\alpha'}$.

Dimostrazione. Dobbiamo essere più attenti qui che nella dimostrazione del Lemma 2.4.10, dal momento che gli insiemi quasidialettici possono dipendere dall'approssimazione calcolabile scelta all'operatore di enumerazione. Prendiamo

$$H' = H \cup \{\langle x, \{x\} \rangle : x \in \omega\} \cup \{\langle x, D \rangle : x \in \omega, \langle c, D \rangle \in H\}.$$

È facile vedere che H' è un operatore di chiusura, $c \in H'(X)$ se e solo se $c \in H(X)$ e $c^- \in H(X)$ se e solo se $c^- \in H(X)$ oppure $c \in H(X)$. Inoltre, prendiamo una approssimazione $\{H'_s\}_{s \in \omega}$ ottenuta nel seguente modo: enumeriamo in modo computabile in H' tutti gli assiomi enumerati in H, agli stessi passi in cui sono enumerati in H; dopo che un assioma $\langle c, D \rangle \in H$ è stato enumerato in H (e quindi in H') allora, in fasi successive, passo dopo passo, enumeriamo gli altri assiomi della forma $\langle x, D \rangle \in H'$, necessari per completare H'; è irrilevante quando enumeriamo assiomi della forma $\langle x, \{x\} \rangle \in H'$. In questo modo non enumeriamo gli assiomi della forma $\langle c^-, D \rangle \in H'$ prima di enumerare $\langle c, D \rangle \in H'$ in modo tale che non vi è alcun pericolo di costruire una pila su qualche x_n diversa da $\langle\ \rangle$ o $\langle x_n \rangle$. È facile vedere che così otteniamo una approssimazione calcolabile loopless α' a H', tale che $A_{q'}^{\alpha'} = A_q$, poiché tutti gli assiomi rilevanti che coinvolgono c, c^- sono enumerati nello stesso ordine eseguito da α. □

Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Nota 2.4.19. *Come per la dimostrazione del Teorema 2.4.5 (vedi Nota 2.4.11), si segnala che la prova del teorema precedente è priva di priorità.*

Nota 2.4.20. *Per il Corollario 2.3.10, non possiamo includere il caso* $|a|_O = 1$ *nella proposizione del Teorema2.4.13, fintanto che ogni insieme c.e. A rappresentato da un sistema quasidialettico approssimato loopless è decidibile.*

Corollario 2.4.21. *Per ogni* $a \in O$ *tale che* $|a|_O \geq 1$*, vi è un insieme quasidialettico*

$$A \in \Sigma_a^{-1} \smallsetminus \bigcup_{b <_O a} \Sigma_b^{-1}.$$

Dimostrazione. Se $|a|_O > 1$ segue direttamente dal Teorema 2.4.13. Assumiamo $|a|_O = 1$: sappiamo dal Teorema 2.2.27 che ogni insieme coinfinito c.e. non semplice può essere rappresentato da un sistema quasidialettico con loop: quindi non ci sono insiemi c.e. quasidialettici non decidibili. □

Una conseguenza del Teorema 2.4.13 è il:

Teorema 2.4.22. *Esistono insiemi quasidialettici propri loopless che non sono dialettici.*

Dimostrazione. È ben noto, e comunque facile da vedere che se $a, b \in O$ e $|a|_O = |b|_O = \omega$, allora $\Sigma_a^{-1} = \Sigma_b^{-1}$: per questo motivo, se $|a|_O = \omega$, scriviamo solitamente $\Sigma_a^{-1} = \Sigma_\omega^{-1}$. D'altra parte, gli insiemi ω-c.e. sono inclusi nei Σ_ω^{-1} insiemi, vedi ad esempio [122]. La proposizione è immediata dal Teorema 2.4.5 e dal Teorema 2.4.13: per esempio, è sufficiente prendere un insieme quasidialettico proprio loopless $A \in \Sigma_a^{-1} \setminus \Sigma_\omega^{-1}$, dove $|a|_O = \omega + 1$. □

Il Teorema 2.4.22 può essere ottenuto anche come conseguenza del seguente:

Corollario 2.4.23. *Se $\mathcal{X} = \{V_e : e \in \omega\}$ è una indicizzazione effettiva di qualche classe di Δ_2^0 insiemi, cioè il predicato $x \in V_e$ è Δ_2^0, allora esiste un insieme quasidialettico proprio loopless A tale che $A \notin \mathcal{X}$.*

Dimostrazione. Simile alla prova del Teorema 2.4.13. In realtà la prova è molto più semplice, in quanto non dobbiamo tenere traccia del numero di variazioni fatte dalla funzione g, dando A come un limite, dal momento che non dobbiamo preoccuparci di ottenere A come un Σ_a^{-1} insieme, per qualche $a \in O$. □

Il Teorema 2.4.22 segue dal corollario precedente, dal fatto che gli insiemi ω-c.e. possono essere indicizzati come una classe Δ_2^0 come nella proposizione del corollario, vedi [122].

Il Teorema 2.4.22, mostrando che esistono insiemi quasidialettici propri loopless che non sono dialettici, pone le considerazioni fatte alla fine della sezione 3 sotto una nuova luce. Dai risultati mostrati in questa sezione segue infatti che i sistemi dialettici, se visti dalla prospettiva degli insiemi che rappresentano, non sono sufficientemente potenti da formalizzare teorie matematiche in cui è usato un procedimento di revisione. Sembra dunque che la proposta presentata in questo capitolo sia più adeguata, rispetto ai sistemi dialettici, a schematizzare "un modo di procedere sostanzialmente ammesso dalla cominutà matematica" (cf. [88]).

2.5 Conclusioni

2.5.1 Computazionalismo e finitismo

Crediamo che una discussione sui sistemi dialettici in una tesi incentrata sulla figura di Magari non sia completa se non presenta, anche brevemente, alcune implicazione filosofiche che secondo Magari seguono dalla teoria dei sistemi dialettici. È infatti ferma convinzione di Magari che alcuni argomenti filosofici tratti dal primo teorema di Gödel, come ad esempio la tesi di Lucas-Penrose, sono approssimativi se non addirittura sbagliati, e che, i sistemi dialettici permettono di inquadrare tali argomenti nella giusta prospettiva. Introduciamo ora alcune idee di Magari su finitismo, computazionalismo[9] e intelligenza artificiale.

Il finitismo e la mente umana

Hilbert esponeva la tesi finitista con le seguenti parole:

> we must be clear to ourselves that 'infinite' has no intuitive meaning [*anschauliche Bedeutung*] and that without more detailed investigation it has absolutely no sense. For everywhere there are only finite things. There is no infinite speed, and no force or effect that propagates itself infinitely fast. Moreover the effect itself is of a discrete nature and exists only in quanta. There is absolutely nothing continuous that can be divided infinitely often. Even light has atomic structure, just like the quanta of action. ([57], p. 1159.)

Magari in [92] e [104] riassume dicendo che ogni cosa che capiti di considerare è finita e che non esistono fenomeni noti per i quali si possa affermare che non sono simulabili con mezzi discreti. Si può sostenere addirittura che la distinzione fra finito ed infinito non sia chiaramente formulabile e che "tutto quanto facciamo, matematica inclusa, è finito" ([100], p. 45). Magari sostiene che la stessa creatività non implica processi infiniti, non ha in realtà a che fare con l'infinito, ma solo con certi modi non facilmente riconducibili a procedimenti noti, di procedere nel finito. Gli argomenti contro la tesi finitista risultano a suo avviso inefficaci. Inefficace è ad esempio la tesi secondo cui le esperienze non sono traducibili in descrizioni meccanico-materialistiche, e che l'uomo e gli animali in genere siano inadatti ad una descrizione finita. Inefficace è la tesi secondo cui l'atto creativo in sé non è finitamente descrivibile. Anche a causa dei limiti percettivi di un organismo umano, la stessa creazione di una nuova forma artistica può ridursi alla scelta fra un numero finito di opzioni. Sebbene l'argomento non sia sviluppato, sullo sfondo vi è una premessa tacitamente accettata,

[9]Ricordiamo che secondo l'impostazione computazionalista ogni processo mentale può essere concettualizzato come flusso di informazioni gestite da un calcolatore.

ossia la finitezza della mente umana, o, per dirla con Turing, che la mente umana sia capace solo di un numero finito di stati. Nel carteggio con Kreisel, alla domanda di quest'ultimo circa i sistemi dialettici: "do they have pedagogical value?", Magari risponde (3 Settembre 1973) che il suo aspira ad essere un contributo "useful (not decisive) against the 'argument from Gödel' as in Lucas ecc.", cioè contro la tesi sostenuta da Lucas [84], in epoca più recente rielaborata da Penrose [128], secondo cui il primo teorema di Gödel implica che la mente umana non è una macchina di Turing. Contestando argomenti circa l'ipotizzata derivabilità di una confutazione della tesi computazionalistica dai risultati di incompletezza, Magari argomentava:

> Qualche filosofo crede di poter inferire dai teoremi di Gödel una superiorità umana sulle macchine, il che potrebbe anche indurre a ritenere l'uomo infinito. Credo che queste inferenze siano erronee, credo che dove spesso si dice infinito sarebbe meglio dire molto grande. ([100], p. 45)

La tesi di una superiorità dell'attività matematica dell'uomo (intesa come una sorta di "teoria informale") sulle macchine, può essere sostenuta, sottolinea Magari, solo se per "teoria informale" si intende una teoria che proceda per così dire per tentativi ed errori. Ma in tal modo la tesi ne esce in qualche modo depotenziata e dovrà essere precisata, essendo la procedura per prova ed errore una procedura essa stessa "quasi meccanica". Nella cornice di argomenti *à la* Lucas e Penrose, cosa fa un essere umano per superare una macchina? Per ogni sistema formale F supposto consistente che gli venga proposto, trova con la procedura di Gödel un enunciato indecidibile in F. Egli assume dunque in qualche modo un nuovo principio, pronto eventualmente a scartarlo qualora in seguito, incrementando la teoria con ulteriori principi, emergessero delle contraddizioni. In buona sostanza si comporta come un sistema dialettico. Il parallelo che ne scaturisce non è dunque tra l'uomo e la macchina di Turing, bensì tra l'uomo e quella sorta di "macchina" *trial and error* costituita dai sistemi dialettici o dai limiti in generale:

> fra i difetti che l'argomento presenta c'è una insufficiente analisi del modo di procedere dell'uomo (o delle "teorie informali") menzionato nell'argomento stesso. L' "uomo" di cui l'argomento parla deve essere infatti (se vuole mostrare l'asserita "superiorità") disposto ad ammettere sistematicamente nuovi assiomi e quindi anche, per cosi dire, a cancellarli se essi dessero luogo a contraddizioni. ([89], p. 347)

Una volta chiarito questo parallelo non potremmo più concludere gli argomenti alla Lucas e Penrose. Come abbiamo visto nel primo capitolo, i sistemi dialettici sono soggetti ad alcune limitazioni che evocano quelle gödeliane. Ad esempio esiste un procedimento effettivo che, dato un sistema dialettico che include le tesi dell'aritmetica di Peano, restituisce una formula la quale è vera se e solo se non è fra le tesi

definitive del sistema dialettico. Non disponendo tuttavia di una procedura effettiva per stabilire se una certa formula è una tesi definitiva, afferma Magari, difficilmente potremo dedurre "qualcosa di più della (o in contrasto con) la macchina con qualche ragionevole speranza di essere nel giusto" ([88], p. 141).
Kreisel, in una lettera a Magari del 20 Giugno 1973, affermava che l'interesse del suo interlocutore scaturisse essenzialmente dalla convinzione, da lui considerata "completely doctrinaire", che i processi di apprendimento si svolgano *realmente* attraverso tentativi ed errori. Va tuttavia segnalato che negli anni successivi, principalmente grazie ai lavori di Gold [48] e Putnam [131], base per i successivi tentativi di formalizzazione di procedure di computazione che autorizzano a "cambiare opinione" ritrattando un numero finito di volte, le macchine che procedono per tentativi ed errori hanno attirato l'attenzione di studiosi in *formal learning theory* come Angluin e Smith [6], Osherson, Stob e Weinstein [124], Kelly [66]. Tra gli interlocutori di Magari, Kugel [73] in particolare prende in seria considerazione l'ipotesi che il cervello umano sia una macchina che procede per tentativi ed errori[10]. Ma già negli scritti dell' ultimo Turing [151, 152] era stata in effetti delineata una teoria della mente come multimacchina. È infine interessante porre in correlazione gli argomenti di Magari con l'ipotesi adombrata da Turing che una macchina possa modificare le proprie istruzioni:

> One can imagine that after the machine had been operating for some time, the instructions would have altered out of all recognition, and nevertheless be such that one would have to admit that the machine was still doing very worthwhile calculations. ([151], p. 13)

Commettere e correggere errori è del resto, secondo Turing, una manifestazione tipica dell'intelligenza e del suo potere [11]:

> This danger of the mathematician making mistakes is an unavoidable corollary of his power of sometimes hitting upon an entirely new method. This seems to be confirmed by the well known fact that the most reliable people will not usually hit upon really new methods. ([152], p. 256)

Processi di apprendimento basati sul metodo per tentativi ed errori sono oggi molto popolari anche in machine learning. Ad esempio le intuizioni di Turing rispetto alla possibilità di istruire una macchina, alla stregua di un bambino, tramite l'ausilio di premi e punizioni, è alla base del *reinforcement learning* (in seguito RL)[12], un paradigma di machine learning, che, come attestato da molti lavori (vedi

[10] In una lettera a Magari del 29 Gennaio 1974, Kugel commenta: "You are considering trial and error formalization of *deduction* whreas I am trying out some trial error (and more complex) formalization of *induction*."

[11] Per approfondimenti rimandiamo a [27].

[12] In breve, RL è un ambito di ricerca in machine learning che fornisce un framework normativo nel quale studiare il comportamento di un agente nel momento in cui questo interagisce con un

https://github.com/aikorea/awesome-rl), sta assumendo sempre maggiore importanza nella comunità dell'intelligenza artificiale. Ad esempio in [116] gli autori considerano i metodi di RL come strumenti essenziali al fine di costruire un'intelligenza artificiale capace di imparare a comunicare con le persone usando il linguaggio naturale.

Sebbene queste tematiche relative all'utilizzo di procedimenti per tentativi ed errori in machine learning non sono presenti negli scritti di Magari, le problematiche dell'intelligenza artificiale rientrano tra i suoi interessi — forse grazie alla grande passione di Magari per la letteratura fantascientifica, da lui considerata come la "più seria del nostro tempo" ([101], p. 37) — e sebbene non ci siano elaborazioni sistematiche su tale argomento è interessante concludere questo capitolo con alcune sue idee a riguardo.

> Se mai riuscissimo a produrre intelligenze paragonabili o superiori a quella umana avremmo in parte risolto il problema della solitudine della nostra specie [...]. Niente vieta nemmeno che il contatto fra uomini e macchine si faccia più intimo: a me, per esempio, non dispiacerebbe che il mio insoddisfacente cervello venisse esteso e potenziato da opportune protesi. Certamente ci sono anche gravi pericoli: potremmo anche, col tempo, arrivare alla costruzione di un dio perverso o anche di un dio solo apparentemente benevolo [...]. Per ora siamo di fronte, per dirla come Aurelio Peccei, al "malpasso": nell'intrico dei fattori che possono portarci alla catastrofe o a un nuovo stadio di sviluppo l'intelligenza artificiale ci può aiutare molto, specie se ci farà pensare ed amare di più. ([101], p. 37)

Notiamo che, da un lato, le problematiche relative alla costruzione di una superintelligenza capace di sterminare la vita sulla terra sono oggi prese molto seriamente e di conseguenza abbondantemente studiate — ad esempio diversi centri di ricerca che hanno come scopo quello di prevenire eventi catastrofici hanno al loro interno gruppi che lavorano specificatamente su questa problematica, solo per citarne alcuni ricordiamo il CSER (Centre for Study of Existential Risk, http://cser.org/), il Future of Life Institute (http://futureoflife.org/), il MIRI (Machine Intelligence Research Institute, https://intelligence.org) e infine il Future of Humanity Institute (http://www.fhi.ox.ac.uk/) — dall'altro, il potenziamento della mente umana con "opportune protesi" è oggi un argomento ampiamente studiato e sviluppato in ambito tecnologico.

"environment" esterno. I metodi di RL hanno come fine quello di insegnare ad un agente — durante un processo dinamico nel quale vi è interazione tra questo e un environment ben specificato — a scegliere un'azione in modo da massimizzare le ricompense future. Con una procedura per tentativi ed errori l'agente impara una policy ottimale (cioè una funzione che prende in input una rappresentazione dell'environment e da in output un'azione da eseguire) allo scopo di massimizzare le ricompense future. Per approfondimenti rimandiamo a [147].

2.5.2 Direzioni future

Metamatematica come scienza naturale: questa è la ferma convinzione di Magari quando propone i sistemi dialettici come modello del procedere matematico. Al fine di formalizzare certe idee di Lakatos inerenti il processo di revisione in matematica, e con l'intento di verificare in che misura questo sia implicitamente catturato dalla proposta di Magari, in questo capitolo abbiamo introdotto e studiato i sistemi quasidialettici. Questi arricchiscono i sistemi dialettici aggiungendo un meccanismo di revisione, tramite il quale si rende possibile precisare formalmente il concetto di teoria quasi-empirica introdotto da Lakatos. Come abbiamo visto nel primo capitolo le riflessioni di Magari sulla matematica colgono in modo del tutto originale la trasformazione che si andava delineando nella filosofia della matematica a partire dagli anni '70. Il confronto tra sistemi dialettici e sistemi quaidialettici permette dunque di verificare in che misura i sistemi di Magari possono offrire un resoconto rigoroso di tale trasformazione, in particolar modo di alcune idee del filosofo ungherese.
Abbiamo visto che esistono insiemi c.e. indecidibili rappresentati da sistemi quasidialettici con loop, diversamente, come è mostrato in [88], ogni insieme dialettico c.e. è decidibile. Dunque, se consideriamo i loop, la teoria dei sistemi qusidialettici è più espressiva di quella dei dialettici. Inoltre, anche se restringiamo la nostra attenzione alla classe dei sistemi quasidialettici looples le cose non cambiano. Abbiamo infatti mostrato che, sebbene i sistemi dialettici e i sistemi quasi dialettici condividono lo stesso contenuto informativo — nel senso che questi rappresentano due classi di insiemi (rispettivamente, insiemi dialettici e insiemi quasidialettici) che hanno gli stessi gradi di Turing e gli stessi gradi di enumerazione, e che dunque, da tale punto di vista la proposta di Magari sembra abbastanza robusta da formalizzare teorie matematiche che, nel loro procedere per tentativi ed errori, utilizzano il metodo della revisione — la classe degli insiemi dialettici è contenuta strettamente in quella degli insiemi quasidialettici. Da tale risultato segue che i sistemi dialettici, se visti dalla prospettiva degli insiemi che rappresentano, non sono sufficientemente potenti da formalizzare teorie matematiche in cui è usato un procedimento di revisione. Il confronto da noi effettuato in questo capitolo permette di concludere che i sistemi quasidialettici rappresentano una formalizzazione, di teorie che procedono per tentativi ed errori, più aderente alla pratica della revisione in matematica rispetto ai sistemi originali di Magari.
Per quanto riguarda la teoria dei sistemi quasidialettici restano aperte diverse linee di ricerca. In particolare, dal momento che Magari introdusse i sistemi dialettici al fine di fornire un modello logico per rappresentare il comportamento dinamico delle teorie matematiche, sorge spontaneo il problema di chiarificare la relazione sussistente tra teorie matematiche e sistemi (quasi)dialettici. Prendendo spunto dai lavori [88, 10] abbiamo visto, nella Nota 2.2.6, come sia possibile aggiungere proprietà ad H al fine di mimare il comportamento degli operatori logici. Nella stessa nota abbiamo mostrato come in tal caso sia possibile associare ad ogni teoria formale T — sotto

l'ipotesi che sia condivisa la logica sottostante T e quella sottostante H — un sistema dialettico $d = \langle H, f, c\rangle$ tale che A_d è un completamento di T. Poiché quanto detto nella Nota 2.2.6 vale tanto per i sistemi dialettici quanto per i sistemi quasidialettici, si rende interessante andare a studiare i completamente di teorie essenzialmente indecidibili in termini si insiemi dialettici e insiemi quasidialettici. Questa linea di ricerca è stata seguita in [5].
Un'altra linea di ricerca contempla la possibilità di variare la H durante la computazione. Come abbiamo visto, nel momento in cui i sistemi (quasi)dialettici derivano una contraddizione (o un controesempio) il meccanismo dialettico elimina (o sostituisce) un certo assioma, quello colpevole di aver derivato la contraddizione (o il controesempio). Un procedimento altrettanto interessante sembra essere quello in cui, una volta derivata una contraddizione (o un controesempio), ad essere sostituito non è l'assioma ma bensì l'operatore H. Questo tipo di approccio va in direzione delle logiche adattive (per maggiori informazioni rimandiamo a http://logica.ugent.be/adlog/papers.html).
Infine, una diversa direzione di ricerca è quella in cui la funzione di proposizione f sceglie gli assiomi da testare con l'ausilio di una funzione di probabilità p. Ad esempio ipotizziamo di essere al passo s della computazione, allora potremmo definire $f(x_{s+1})$ come il minimo x tale che:

$$p(c \in H(A_s \cup \{x\})) \leq \epsilon$$

dove ϵ è un numero in $(0, 1]$ che esprime la confidenza con cui scegliamo i nuovi assiomi da testare.

Capitolo 3

Principio di Cournot e coerenza stretta: uno studio sulle piccole probabilità

> Quando si ha a che fare con queste piccole probabilità i valori in gioco sono, in compenso, spesso grandi, onde l'indifferenza è ingiustificata.
>
> Roberto Magari

3.1 Introduzione

Il presente capitolo è dedicato alle piccole probabilità, più precisamente al principio di coerenza stretta. Questo, come sarà chiarito in breve, consente di contrastare il principio di Cournot, secondo il quale eventi di piccola probabilità non si realizzano. Nel primo capitolo abbiamo rilevato come tale principio non fosse in alcun modo compatibile con la metodologia scientifica del Magari, per il quale tutti gli argomenti, anche quelli più bizzarri, se possibili, dovranno essere oggetto di indagine. Dunque la probabilità della loro veridicità sarà da considerarsi diversa da zero. Ricordiamo ancora una volta le parole di Salvadori che delineano in modo efficace questa propensione di Magari:

> [Magari prendeva] in considerazione le possibilità più diverse di rispondere ad una domanda. In seria considerazione. Nessuna obbiezione, nemmeno la più paradossale o strampalata, veniva scartata a priori. ([126], p. 48)

Il testo *Morale e metamorale: un approccio probabilistico ai problemi morali* ([100]) rende chiaro come, tanto più un argomento è importante tanto più tale propensione è marcata. In [100] Magari, nel tentativo di sviluppare una fondazione laica della morale, introduce una teoria della decisione con la quale tenta di superare quel limite, presente nella teoria classica della decisione, rappresentato dall'incapacità di trattare gli eventi infinitamente importanti ma altamente improbabili. In seguito denomineremo tali eventi con l'acronimo *HILP* (high-impact, low-probability). Al fine di trattare gli eventi HILP Magari utilizza campi non archimedei con i quali si rende matematicamente possibile stimare probabilità infinitesime e utilità infinite. Come vedremo, l'utilizzo dei campi non archimedei permette l'introduzione dell'assioma di regolarità e di conseguenza consente la rimozione del principio di Cournot. Dai lavori di Shimony e Kemeny ([142, 67]) è ben noto come il principio di coerenza stretta offra un modo alternativo, all'utilizzo dei campi non archimedei, per introdurre il principio di regolarità. Il teorema di Shimony-Kemeny mostra infatti che: una funzione di probabilità è regolare se e solo se è strettamente coerente. Questo teorema vale però solo per algebre finite di eventi. Al fine di superare questo limite presenteremo in questo capitolo due generalizzazioni del teorema di Shimony-Kemeny. Più precisamente dimostriamo tale teorema per insiemi finiti arbitrari di eventi (cioè per insiemi privi di struttura) e per insiemi infiniti di eventi.

3.1.1 Notazione

In ciò che segue denotiamo con $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali, con $\mathbf{R}^+$ (rispettivamente $\mathbf{R}^-$) l'insieme dei numeri reali positivi (rispettivamente negativi), con $\mathbf{R}^*$ un'estensione non archimedea del campo reale e infine, diversamente con quanto fatto nel precedente capitolo, con $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri interi positivi. Per ragioni di semplicità il prodotto tra due numeri x e y sarà indicato da xy. Dati $x, y \in \mathbf{R}^*$, denotiamo con $[x, y]$ l'insieme $\{ z \in \mathbf{R}^* \mid x \leq z \leq y \}$ e con $(x, y]$ l'insieme $\{ z \in \mathbf{R}^* \mid x < z \leq y \}$. Come usuale, dato un insieme A, denotiamo con A^n l'insieme $A \times \ldots \times A$, n volte. Dato un insieme A, denotiamo con $\mathbf{P}(A)$ l'insieme potenza di A, cioè $\mathbf{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, chiameremo *vettore n-dimensionale* ogni elemento dell'insieme $\mathbf{R}^n$. Dato un vettore x di $\mathbf{R}^n$ per ogni $i \leq n$ denotiamo con $x(i)$ la i-esima coordinata di x. Dati due vettori x e y di $\mathbf{R}^n$ denotiamo con:

- $x + y$ la somma di vettori, cioè il vettore che ha per i-esima componente l'elemento $x(i) + y(i)$;
- $x - y$ la differenza tra vettori, cioè $(x - y)(i) = x(i) - y(i)$;
- xy il prodotto di Hadamard tra vettori, cioè $(xy)(i) = x(i)y(i)$;
- $x \cdot y$ il prodotto interno euclideo, cioè $\sum_{i=1}^{n} x(i)y(i)$.

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ denotiamo il vettore costante di x, cioè il vettore che ad ogni i-esima coordinata ha il numero x, con $\bar{x}$. Dato un insieme A denotiamo con $Car(A)$ la cardinalità di A, cioè il numero di elementi di A. Date due funzioni $g : A \to B$ e $h : B \to C$ denotiamo con $h \circ g : A \to C$ la funzione di composizione di g e h. Infine per ogni $x \in \mathbf{R}^*$, $|x|$ denota il valore assoluto di x, cioè $|x| = \max\{x, -x\}$.

3.2 Teoria della decisione di Magari: una proposta per trattare gli eventi HILP

In questa sezione presentiamo informalmente la teoria della decisione di Magari. Questo ritenendo che le questioni morali di grande interesse non si potessero trattare probabilisticamente nel contesto usuale, dove le probabilità sono identificate con numeri reali, ma più appropriatamente nella cornice dell'analisi non-standard, con il ricorso a campi non-archimedei (o del campo razionale con opportuni ampliamenti non-archimedei), sviluppa una teoria della decisione in grado di trattare gli eventi HILP. Come abbiamo brevemente accennato nell'introduzione, e come vedremo in dettaglio in questa sezione, l'utilizzo dei campi non archimedei permette a Magari di superare il principio di Cournot per mezzo della regolarità. Nella sezione successiva mostreremo un metodo alternativo, rispetto a quello usato da Magari, tramite il quale si rende possibile introdurre tale principio.

3.2.1 Uno sguardo alla teoria della decisione classica

La teoria normativa della decisione razionale, utilizzando valutazioni probabilistiche al fine di precisare i fattori di rischio legati a determinate azioni, *suggerisce* — definendo rigorosamente un concetto di razionalità — quale sia l'azione da ritenersi come la più razionale, e dunque da scegliere, in una data circostanza. Un aspetto fondamentale della teoria della decisione è la formalizzazione delle condizioni necessarie e sufficienti alla caratterizzazione del concetto di razionalità. A tal fine si distinguono tre momenti principali che si differenziano in base alle condizioni epistemiche dell'individuo rispetto agli esiti che seguono una data azione. Un individuo può essere certo rispetto a tali esiti, in questo caso parliamo di *teoria della decisione in condizioni di certezza*, oppure può essere a conoscenza delle distribuzioni di probabilità associate agli esiti di una data azione, in questo caso parliamo di *teoria della decisione in condizioni di rischio.* Infine un individuo può essere incerto sulla probabilità da associare agli esiti di una data azione, in questo caso parliamo di *teoria della decisione in condizioni d'incertezza.* Più chiaramente. Se dovessimo scegliere un'azione sulla base della verità o della falsità della proposizione "alla data 25-12-2015 la prima squadra in classifica del campionato italiano di calcio della serie A è l'Inter" nel momento in cui abbiamo informazioni per sapere chi è la prima squadra in classifica

a quella data ci troveremmo di fronte ad un problema decisionale in condizioni di certezza. Diversamente ipotizziamo di giocare a dadi. Se dovessimo scegliere un'azione sulla base della verità o della falsità della proposizione "al prossimo lancio del dato uscirà il numero 6", sebbene non esista nessun metodo per conoscere l'esito esatto del lancio, possiamo osservare, sotto certe condizioni (situazione di lancio non truccato), che la probabilità di uscita della faccia 6 è equiprobabile alla probabilità di uscita di qualsiasi altra faccia del dado, e quindi, che la probabilià da associare all'evento "uscita del 6" è uguale a 1/6. In questo caso ci troveremmo di fronte ad un problema di decisione in condizioni di rischio. Infine supponiamo di essere ad una corsa di cavalli. Se dovessimo scegliere un'azione sulla base della verità o della falsità della proposizione "la prossima corsa sarà vinta dal cavallo x", non esistendo nessun metodo per conoscere l'esito esatto della corsa ci troveremmo di fronte ad un problema decisionale in condizioni di incertezza.
Un modello standard e per certi aspetti prioritario in teoria della decisione razionale è quello della massimizzazione dell'utilità attesa (per maggiori dettagli rimandiamo a [72]). Tale principio, utilizzando come parametri fondamentali una *funzione di utilità* (atta a rappresentare le preferenze di un individuo) e una *funzione di probabilità* (atta a rappresentare le credenze di un individuo), misura l'utilità attesa di una certa azione a "pesando" l'utilità di ogni possibile suo esito E_i^a con la probabilità associata al verificarsi di E_i^a. Questa misura permette di definire la scelta razionale come quella che massimizza l'utilità. Utilizzando un esempio dato da Magari in [100], riassumiamo quanto ora detto con le seguenti parole:

> Siano, a, $\bar{a}$, due azioni; la prima dia luogo a tre situazioni possibili, x, y, z e la seconda a tre altre: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Siano p, q, r le probabilità rispettive di x, y, z se si esegue a e siano $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ le probabilità rispettive di $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ se si esegue $\bar{a}$. Si atribuiscano certi valori $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ a $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ rispettivamente e si confronta poi l'espressione $pu + qv + rw$ con la $\bar{p}\bar{u} + \bar{p}\bar{v} + \bar{r}\bar{w}$. Si sceglie infine la a se è maggiore la prima espressione e la $\bar{a}$ se è maggiore la seconda[1]. (p.16)

Schematizzando possiamo descrive la teoria della decisione classica tramite i seguenti punti:

- i gradi di credenza di un individuo sono rappresentati da una funzione di probabilità;
- le preferenze di un individuo sono rappresentate da una funzione reale chiamata funzione di utilità;

[1]In ciò che segue faremo riferimento a questo modello di teoria della decisione come il modello *classico*. Magari chiama questo tipo di procedimento *pascalizzabile* e *pascaliano* ogni azione che utilizzi tale metodo.

- la decisione razionale è quella che massimizza l'utilità attesa.[2]

Un problema che salta immediatamente agli occhi relativamente alla teoria classica della decisione è il fatto che questa, nel momento in cui accetta il principio di Cournot, dichiara irrilevante ai termini della valutazione del rischio tutti quegli eventi la cui probabilità è stimata arbitrariamente vicina a zero. Con la notazione data in nota 2, vediamo infatti che se associamo all'evento possibile $e \in C_a$ probabilià zero per quanto grande sia il numero associato all'utilità di e, e dunque per quanto grande sia l'utilità associata ad e, questo non andrà ad influenzare la sommatoria $\sum_{c \in C_a} p(c)u(c)$, la quale esprime l'utilità attesa dell'atto a ($U_{att}(a)$). Dunque, quando siamo interessati all'analisi del rischio in una situazione in cui sono presenti eventi la cui probabilità è stimata arbitrariamente vicino a zero, la decisione razionale basata sulla massimalizzazione dell'utilità attesa potrebbe essere difettiva. Come vedremo a breve il problema qua presentato è particolarmente gravoso nelle situazioni di decisione in cui il risk manager si trova ad affrontare eventi HILP.

3.2.2 Certezza pratica e principio di Cournot

Il principio di Cournot esprime l'idea che eventi con piccola probabilità non si realizzano. In altri termini identifica gli eventi a cui è associato un valore di probabilità piccolo con gli eventi impossibili. Nel lavoro *Exposition de la thèorie des chances et des probabilitès* Cournot introdusse tale principio al fine di applicare il calcolo della probabilità alla fisica

> The physically impossible event is therefore the one that has infinitely small probability, and only this remark gives substance—objective and phenomenal value—to the theory of mathematical probability. (Citato in [140], p. 4)

Dunque, grazie al principio di Cournot il calcolo della probabilità acquista di significato empirico. Tale principio permette infatti di ancorare la teoria della probabilità al mondo al di fuori della matematica. Ciò si rende particolarmente rilevante nella vita quotidiana, dove il principio di Cournot gioca un ruolo di primo piano, rivelandosi utile ed essenziale. Di fatto questo elimina l'immobilismo che potrebbe presentarsi nelle decisioni quotidiane se ci preoccupassimo della realizzazione di tutti gli eventi possibili. Basti pensare al fatto che ogni volta che usciamo di casa potremmo essere investiti da un'automobile. Con le parole di Borel:

[2] Formalizzando l'esempio di Magari la formula dell'utilità attesa relativamente ad un atto a è la seguente:

$$U_{att}(a) = \sum_{c \in C_a} p(c)u(c)$$

dove p è una funzione di probabilità, u è una funzione di utilità e infine C_a è l'insieme delle conseguenze di a.

> For every Parisian who circulates for one day, the probability of being killed in the course of the day in a traffic accident is about one-millionth. If, in order to avoid this slight risk, a man renounced all external activity and cloistered himself in his house, or imposed such confinement on his wife or is son, he would be considered mad. (Citato in [61], p. 9)

Questo modo di agire, basato sul concetto di "certezza pratica", collassa nella categoria "impossibile" tutti gli eventi il cui valore di probabilità è stimato arbitrariamente vicino a zero, e similmente, gli eventi certi con gli eventi arbitrariamente vicino a uno.
Nella vita di tutti i giorni le persone si comportano in modo da usare implicitamente quanto dettato dalla certezza pratica. Questo è evidente semplicemente guardando al nostro modo di agire quotidiano. Ad esempio ogni volta che prendiamo un appuntamento consideriamo impossibile una grande quantità di eventi — i quali potrebbero impedire quell'appuntamento, come ad esempio un incidente automobilistico — che in realtà sono eventi possibili la cui probabilità di realizzazione è stimata arbitrariamente vicino a zero. Sebbene il ragionamento basato sulla certezza pratica sia utile nella vita giornaliera, come spiegheremo meglio nella prossima sezione, ci sono situazione in cui diventa necessario, al fine di evitare conseguenze catastrofiche, associare ad eventi *possibili*, di cui riteniamo sia impossibile il verificarsi, una probabilità diversa da zero. La critica mossa da Magri in [100] al principio di Cournot prende le mosse proprio dall'osservazione ora fatta. Magari nota infatti che ci sono circostanze in cui accettare quanto dettato dalla certezza pratica può portare all'insorgere di problemi molto gravi.

> La rinuncia al comodo ma insostenibile principio di Cournot [...] può rendere la vita difficile: di quali e quante possibilità secondarie dobbiamo tener conto nelle decisioni? È ovvio che lo spreco di energie che si assocerebbe ad una disamina scrupolosa e attenta, eseguita su decisioni minori, costituisce di per sé un disvalore che giustifica, entro certi limiti, un modo di decidere a lume di naso nella vita quotidiana. [...] Ciò che invece è, ritengo, da evitare, è l'indifferenza, in nome della difficoltà di giudizio della piccolezza di certe probabilità. [...] Quando si ha a che fare con queste piccole probabilità i valori in gioco sono, in compenso, spesso grandi, onde l'indifferenza è ingiustificata. ([100], pp. 17-18)

Per quanto sia legittimo che nella vita di tutti i giorni le persone si comportino in modo da usare implicitamente quanto dettato dalla certezza pratica, nel momento in cui usiamo le valutazioni di probabilità per calcolare il rischio che segue da certe decisioni, specialmente se tale rischio coinvolge altri individui, necessitiamo di una teoria della probabilità che ci permetta di distinguere gli eventi a piccola probabilità dagli eventi impossibili. Quello che è richiesto al fine di affrontare il rischio che segue dalla scelta di certe azioni è infatti un metodo di analisi razionale che, utilizzando le informazioni e gli strumenti a disposizione, permetta di valutarne il rischio e aiuti a prendere le adeguate precauzioni al fine di evitarne gli effetti negativi. In teoria della decisione classica, il modo di agire basato sulla certezza pratica, dando luogo ad un passaggio illegittimo da una decisione in condizioni d'incertezza ad una decisione in condizione di rischio, almeno relativamente agli eventi la cui probabilità è stimata arbitrariamente vicino a zero, considera irrilevanti, al fine della valutazione del rischio, alcuni eventi la cui realizzazione, come nel caso degli eventi HILP, può condurre a situazioni particolarmente pericolose.

3.2.3 Eventi HILP: descrizione e catalogazione

Gli eventi HILP sono eventi di vasto impatto sociale la cui realizzazione è considerata altamente improbabile. Eventi come una crisi finanziaria, un'alluvione, un terremoto o un attentato terroristico possono ledere quell'interconnessione economica-finanziaria sulla quale si basa la moderna società globale. Effetti di un evento catastrofico, sia questo un terremoto o una crisi finanziaria, difficilmente resterà locale e avrà effetti di vasta portata che andranno a colpire città e nazioni al di fuori dei confini di origine. La recente crisi economica, così come la Primavera araba, ne sono esempi. Negli ultimi anni c'è stato un incremento sostanziale nella frequenza della realizzazione di eventi come quelli ricordati. Tematiche quali terrorismo, cambiamenti climatici e crisi finanziare sono oggi all'ordine del giorno. Per tale ragione si è assistito di recente ad una proliferazione di studi relativi all'analisi e alla trattazione degli eventi HILP (vedi ad esempio [148, 20, 123, 49, 77])[3]. Tra i lavori ora citati molto interessante è l'articolo [77] in cui si trova una catalogazione di tali eventi. Questi sono divisi in tre diverse categorie. La prima, denominata *i cigni neri*, è composta dagli eventi che sono al di là di ogni possibile aspettativa basata sulla conoscenza della storia, della scienza, della finanza e della tecnologia e quindi impossibile o estremamente difficile da prevedere. La seconda categoria, denominata *conosciuti e preparati per*, è composta da eventi rari che rappresentano una minaccia significativa (reale o percepita). Infine, la terza categoria, denominata *conosciuti ma non preparati per*, è composta da eventi rari considerati potenzialmente catastrofici per i quali non è stata fatta nessuna azione, o è stato fatto ben poco, per prevenire o mitigare i loro effetti. Mentre i cigni neri, data la loro imprevedibilità, possono essere affrontati solo dopo la loro realizzazione, per gli altri tipi di eventi è possibile calcolare il rischio che segue dalla loro realizzazione e quindi è possibile mettere in atto degli accorgimenti al fine di prevenire i loro effetti. Come messo in luce in [77] un problema legato all'analisi del rischio degli eventi "conosciuti ma non preparati per" è quello relativo

[3]Ovviamente la proliferazione di tali studi è andato di pari passo con la l'aumento di centri di ricerca che hanno come scopo quello di prevenire eventi catastrofici. Alcuni di questi sono stati ricordati nella Sezione 2.5.1.

alla sottovalutazione della probabilità della loro realizzazione. Sebbene questi eventi siano considerati ad alto impatto negativo, dal momento che la loro realizzazione viene considerata altamente improbabile, non vengono prese le adeguate precauzioni al fine di evitare i loro effetti. In questi casi il risk manager agisce accettando quanto dettato dalla certezza pratica e così facendo dichiara irrilevante ai termini della valutazione del rischio la possibile realizzazione di un evento appartenete alla categoria "conosciuti ma non preparati per".

3.2.4 Teoria della decisione di Magari

Nel momento in cui le valutazioni probabilistiche sono usate al fine di calcolare il rischio che segue dalla scelta di certe azioni, specialmente se tale rischio coinvolge la vita di molte persone, l'eliminazione del principio di Cournot sembra essere dettata in primo luogo da ragioni morali.

> Assessing a risk involves consideration of both the stakes involved and the likelihood of the hazard occurring. If a risk threatens the lives of a great many people it is not only rational but morally imperative to examine the risk in some detail and to see what we can do to reduce it. ([123], p. 1)

Come abbiamo visto nel primo capitolo il richiamo all'aspetto morale è alla base della teoria della decisione di Magari, il quale considerava il suo come un lavoro di metamorale[4]. Data la loro portata sociale gli eventi HILP assumono così primaria importanza e la volontà di non sottovalutarli diventa per Magari motivo di indagine. Come abbiamo più volte ricordato, la soluzione suggerita da Magari al fine di definire una teoria capace di trattare gli eventi HILP è quella di utilizzare funzioni di probabilità e funzioni di utilità non standard. Mentre le seconde permettono di associare valore infinito, positivo o negativo, alla realizzazione di certi eventi, le prime consentono di superare l'atteggiamento basato sul principio di Cournot associando valore infinitesimo alle piccole probabilità. La proposta di Magari supera quell'inadeguatezza propria della teoria della decisione classica a catturare situazioni in cui si hanno azioni di utilità infinita la cui probabilità è stimata arbitrariamente vicino a zero. Con le parole di Magari:

> [...] sembra molto probabile che una teoria esplicita, la quale dovesse rendere conto delle nostre valutazioni di probabilità e dei nostri comportamenti, una teoria cioè che rappresentasse esplicitamente noi stessi in quanto conoscenti ed agenti, dovrebbe far uso di campi non archimedei. ([98], p. 73)

[4]Magari definisce la "ricerca metamorale" come quella che si occupa di "stabilire le possibili teorie morali, a stabilire le loro condizioni di significanza e le loro connessioni con le varie situazioni conoscitive con cui devono coesistere". ([100], p. 19)

Prendendo spunto dal celebre argomento della scommessa di Pascal, Magari sviluppa una teoria formale della morale capace di giustificare il principio per cui, per quanto piccola sia la probabilità (se vogliamo anche infinitesima) dell'esistenza di un male assoluto, è necessario orientarsi verso azioni che abbiano come fine la diminuzione di tale probabilità. Magari, pur essendo a conoscenza del fondamentale lavoro [137], sviluppa un linguaggio del tutto personale e, pur mantenendo fermo lo schema della massimizzazione dell'utilità attesa introduce autonomamente l'idea di usare campi non archimedei in teoria della decisione. Come abbiamo detto questa novità consente a Magari di rendere conto di due aspetti. Da un lato è possibile esprimere l'esistenza di valori infiniti positivi, come ad esempio la vita umana, o negativi, come ad esempio il male assoluto. Dall'altro si rende possibile eliminare il principio di Cournot associando probabilità infinitesima ad eventualità tipo l'esistenza di un male assoluto.
Vediamo più in dettaglio la teoria della decisione sviluppata da Magari. Si immagini lo scenario di una partita di scacchi. Sia $S = \{s_1, ..., s_n\}$ un insieme di stati possibili. Supponendo che una mossa o azione di un giocatore eseguita nell'istante t lo conduca, a suo giudizio, nello stato s_i all'istante $t + 1$ con probabilità $p_i \in {}^*[0, 1]$. Identifichiamo questa azione con la distribuzione $(p_1, ..., p_n)$[5]. Supponiamo in particolare che questo giocatore attribuisca un valore di utilità $v_i = v(s_i) \in \mathbf{R}^*$ a ciascuna situazione s_i. Ad ogni istante egli ha la facoltà di decidere una certa mossa $f(M)$ (o insieme di mosse giudicate tra loro indifferenti) all'interno di un insieme di mosse $M \subseteq A$ possibili in quell'istante, seguendo una certa "morale", ossia una funzione $f : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A)$ con certe proprietà[6]. Una morale f sarà detta *pascaliana* se soddisfa i seguenti punti: dato $M \subseteq A$ siano $a = (p_1, ..., p_n)$, $b = (q_1, ..., q_n) \in M$ due azioni tali che

(i) se $a, b \in f(M)$ allora $\Sigma_{i=1}^n p_i v_i = \Sigma_{i=1}^n q_i v_i$:

(ii) se $b \in f(M)$ e $a \notin f(M)$ allora $\Sigma_{i=1}^n p_i v_i < \Sigma_{i=1}^n q_i v_i$.

Dunque una morale è pascaliana se soddisfa il principio di massimizzazione dell'utilità attesa. Scopo del lavoro di Magari è quello di caratterizzare le morali pascaliane. Data una morale f possiamo definire una relazione di preferenza su A nel seguente modo. Diciamo che $(q_1, ..., q_n)$ è *preferibile* a $(p_1, ..., p_n)$, e scriviamo $(p_1, ..., p_n) < (q_1, ..., q_n)$, se e solo se esiste un insieme di azioni X tale che $(q_1, ..., q_n), (p_1, ..., p_n) \in X$, $(q_1, ..., q_n) \in f(X)$ ma $(p_1, ..., p_n) \notin f(X)$. La relazione $<$ definita in tal modo è detta *la relazione di preferenza associata* a f. Quindi

[5]Dato l'insieme S Magari definisce l'insieme delle azioni A come

$$\{\, (p_1, \ldots, p_n) : i \in \{\, 1, \ldots, n \,\}\,, p_i \in {}^*[0, 1], \text{ e } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \,\}\,.$$

[6]Le proprietà richieste da Magari sono le seguenti: se $M \neq \emptyset$ allora $f(M) \neq \emptyset$ e $f(M) \subseteq M$.

un'azione è preferibile ad un'altra se e solo se viene scelta da una f in un caso in cui l'altra azione potrebbe essere eseguita ma non è scelta. È allora dimostrabile che la morale f è pascaliana se e solo se esiste una funzione di utilità v per cui vale la seguente condizione:

$$(c) \quad (p_1, ..., p_n) < (q_1, .., q_n) \text{ se e solo se } \sum_{i=1}^{n} p_i v_i < \sum_{i=1}^{n} q_i v_i.$$

Ma quali condizioni deve soddisfare la relazione $<$ al fine di soddisfare (c)? In [100] Magari dimostra che: una morale f è pascaliana se e solo se la sua relazione di preferenza associata $<$ è un ordine quasi lineare. Dove una relazione $<$ è un *quasi ordine* nel momento in cui soddisfa la proprietà antiriflessiva, la proprietà transitiva[7] ed inoltre — definita la relazione $(p_1, ..., p_n) \sim (q_1, .., q_n)$ se e solo se per ogni $(r_1, .., r_n) \in A$ vale che $(r_1, .., r_n) < (p_1, ..., p_n)$ se e solo se $(r_1, .., r_n) < (q_1, .., q_n)$ e $(p_1, ..., p_n) < (r_1, .., r_n)$ se e solo se $(q_1, .., q_n) < (r_1, .., r_n)$ — vale uno e uno solo dei seguenti casi: $(p_1, ..., p_n) \sim (q_1, .., q_n)$ oppure $(p_1, ..., p_n) < (q_1, .., q_n)$ oppure $(q_1, ..., q_n) < (p_1, .., p_n)$. Infine — definita la relazione $(p_1, .., p_n) \leq (q_1, ..., q_n)$ se e solo se $(p_1, .., p_n) < (q_1, ..., q_n)$ oppure $(p_1, .., p_n) = (q_1, ..., q_n)$ — una relazione $<$ è *lineare* se e solo se per ogni $(p_1, .., p_n), (q_1, ..., q_n), (r_1, .., r_n), (s_1, .., s_n) \in A$, $x \in [0, 1]$ valgono le seguenti proprietà:

(i) se $(p_1, .., p_n) \leq (q_1, ..., q_n)$ e $(r_1, .., r_n) \leq (s_1, .., s_n)$, allora $x(p_1, .., p_n) + (1 - x)(r_1, .., r_n) \leq x(q_1, ..., q_n) + (1 - x)(s_1, .., s_n)$;

(ii) se $(p_1, .., p_n) < (q_1, ..., q_n)$ e $(r_1, .., r_n) \leq (s_1, .., s_n)$, allora $x(p_1, .., p_n) + (1 - x)(r_1, .., r_n) < x(q_1, ..., q_n) + (1 - x)(s_1, .., s_n)$.

Magari dimostra quindi che ogni morale soddisfacente alcuni requisiti minimi è pacaliana.

Ora, è facilmente verificabile che definendo ad esempio $(p_1, p_2, p_3) < (q_1, q_2, q_3)$ se e solo se $p_3 < q_3$, oppure $p_3 = q_3$ e $p_2 < q_2$, allora per ogni reale $r \in [0, 1]$ si ha $(0, 1, 0) < (1 - r, 0, r)$. Se la morale associata a questa relazione fosse pascaliana allora esisterebbe un funzione di utilità v tale che $v_2 < (1 - r)v_1 + rv_3$, da cui $v_3 > \frac{v_2 - v_1}{r} + v_1$, per qualunque r. L'espressione al secondo membro è superiormente illimitata, pertanto v_3 dovrà essere presa, passando ad un campo non archimedeo, come infinita. Magari sottolinea che le "moralità" non-standard coincidono con la presenza di valori assoluti non negoziabili. Sia per esempio i un individuo in procinto di prendere una certa decisione che conprende la possibilità di compiere l'azione a oppure l'azione b. Sia $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ l'insieme degli stati possibili, dove s_1 = "situazione indifferende a i ", s_2 = "situazione in cui i salva una vita umana" e s_3 = "situazione in cui i ha un forte mal di denti". Ponendo $p_j(x)$ la probabilità che si

[7] Ricordiamo che dato un insieme A una relazione R definita su A è *antiriflessiva* se per ogni $a \in A$ non vale aRa, è *transitiva* se per ogni $a, b, c \in A$ tale che aRb e bRc allora aRc.

verifichi la situazione s_j se l'individuo i compie l'azione x, si considerino le seguenti distribuzioni di probabilità: $p_1(a) = 1$, $p_2(a) = 0$, $p_3(a) = 0$ e $p_1(b) = 0$, $p_2(b) = r$, $p_3(b) = 1 - r$ dove r è un numero strettamente vicino a 0. Dal momento che $p_2(b)$ è strettamente vicino a 0 possiamo supporre che $p_2(b)u_2(s_2) \simeq 0$. Data la funzione di utilità a codominio reale u possiamo supporre che $u(s_1) > u(s_3)$. Dunque secondo il metodo di decisione pascaliano (o della massimizzazione dell'utilità attesa) si ha $p_2(b)u(s_2) + p_3(b)u(s_3) < p_1(a)u(s_1)$. In questa situazione l'individuo razionale i sceglierebbe l'azione a, ma indipendentemente dal valore di $p_2(b)$ una persona in questa situazione è in realtà razionale, secondo Magari, se sceglie l'azione b, in quanto la scelta di tale azione può comportare, anche se con probabilità bassissima, il salvataggio di una vita umana. Ipotizziamo dunque che il codominio della funzione di utilità u sia un campo non archimedeo. Dal momento che nella situazione s_2 vi è in gioco una vita umana, dobbiamo associare a $u(s_2)$ un numero infinito più grande di tutti i numeri reali. Utilizzando il metodo di decisione pascaliano si ha allora $p_1(a)u(s_1) < p_2(b)u(s_2) + p_3(b)u(s_3)$ e dunque in questa situazione un individuo razionale i sceglie l'azione b.
Concludendo: la teoria della decisione sviluppata da Magari può essere schematizzata brevemente tramite i seguenti punti:

- i gradi di credenza di un individuo sono rappresentati tramite una funzione di probabilità non-standard;
- le preferenze di un individuo sono rappresentate tramite una funzione di utilità non-standard;
- la decisione razionale è quella che massimizza l'utilità attesa.

Sebbene la proposta di Magari si presenta come un'estensione della teoria classica della decisione razionale, la quale sviluppa strumenti adeguati al trattamento degli eventi HILP, data la prematura scomparsa dell'autore, questa teoria è rimasta solo agli albori e molto c'è ancora da fare al fine di sviluppare una teoria della decisione sufficientemente espressiva per catturarne gli aspetti essenziali legati a tali eventi[8]. Indipendentemente dall'utilizzo delle probabilità non standard, l'eliminazione del principio di Cournot sembra essere una condizione necessaria al fine di raggiungere tale obbiettivo. Nella prossima sezione mostreremo un metodo alternativo rispetto a quello usato da Magari con il quale si rende possibile eliminare il principio di Cournot.

[8]Un contributo importante allo sviluppo di questa linea di ricerca è stato perseguito, indipendentemente dal lavoro di Magari sia per i metodi usati che per le motivazioni, da Hammond in [52, 53].

3.3 Coerenza stretta e principio di regolarità

Come abbiamo più volte ricordato il superamento del principio di Cournot è uno dei motivi che spinsero Magari ad introdurre campi non archimedei in teoria della decisione. In che modo questa introduzione soddisfa tale proposito, viene spiegato dal Magari quando, parlando della teoria della decisione da lui sviluppata, scrive

> Se si vuole che questa teoria risulti applicabile conviene che le probabiltà e i valori siano presi in un opportuno campo non archimedeo, che il valore 0 sia riservato agli eventi impossibile e il valore 1 agli eventi certi. ([108], p. 1)

Magari utilizza dunque le funzioni di probabilità non standard[9] al fine di introdurre il principio di regolarità, secondo il quale solo gli eventi impossibili hanno misura di probabilità zero, e dunque, per le note regole del calcolo della probabilità, solo gli eventi certi hanno misura di probabilità uno. La regolarità permette di incapsulare la norma per cui le nostre credenze devono riflettere le nostre evidenze. Più forti sono le nostre credenze più forti dovranno essere le nostre evidenze. Dunque la credenza massima, cioè la credenza uno, dovrà avere evidenza incontrovertibile. Ma dal momento che ogni evento possibile è controvertibile allora non dovremmo associare a questo credenza uno. La regolarità consente dunque di garantire tale principio. Questo aspetto si lega strettamente ad un argomento spesso usato per difendere il principio di regolarità, la cui caratteristica saliente è quella di associare probabilità positiva, diversa da uno e da zero, a tutti gli eventi possibili. Tale caratteristica permette di caratterizzare una sorta di "open mindedness" che si rende utile in delicate situazioni di scelta, quali ad esempio quelle che trattano eventi HILP. Non associando probabilità zero ad un evento possibile rimarchiamo infatti l'eventualità che tale evento possa accadere e quindi sia da tener presente in una qualsiasi situazione di scelta che lo coinvolga. L'utilizzo del principio di regolarità, eliminando alla radice la possibilità di identificazione tra eventi la cui probabilità è stimata arbitrariamente vicina a zero e gli eventi impossibili, forza il risk manager a considerare rilevanti tutti i possibili scenari che seguono da una determinata azione, ponendolo di fatto di fronte alla necessità di affrontare tutti i possibili rischi che seguono da essa. In breve, le misure regolari permettono di tenere ben presente il fatto che in situazioni delicate, quali quelle in cui sono presenti eventi HILP, dobbiamo considerare tutte le possibili eventualità.

Dal lavoro di Shimony e Kemeny ([142, 67]) è ben noto che un modo alternativo a quello proposto da Magari per introdurre il principio di regolarità è quello di usare il principio di coerenza stretta. Il teorema di Shimony-Kemeny mostra infatti che una funzione di probabilità è regolare se e solo se è strettamente coerente. Questo

[9] Una funzione di probabilità è non standard quando il suo codominio è l'intervallo unitario di $\mathbf{R}^*$. Una definizione rigorosa di probabilità non standard sarà data nella sezione 3.3.2.

teorema vale però solo per algebre finite di eventi. Volendo applicare questo principio in teoria della decisione potremmo essere in difficoltà nel momento in cui l'insieme degli eventi considerati è privo di struttura o infinito. Al fine di superare questo limite presenteremo ora due generalizzazioni del teorema di Shimony-Kemeny.

3.3.1 Sul concetto di coerenza in probabilità soggettiva

Fin dalla sua origine il concetto di probabilità è stato trattato come un concetto quantitativo. Per tale ragione la probabilità di realizzazione di un evento viene misurata per mezzo di un numero, specificatamente un numero reale compreso tra zero ed uno. Ma cosa misura la probabilità? A questa domanda sono state date differenti risposte. La trattazione di questo soggetto, per quanto interessante, porterebbe lontano dallo scopo di questa tesi e per tale motivo ci limiteremo a dare una veloce caratterizzazione delle principali posizioni fondazionali (per maggiori approfondimenti rimandiamo a [31]). Tra queste assume particolare interesse, ai fini di questo capitolo, l'interpretazione soggettivista all'interno della quale il concetto di coerenza occupa un ruolo prioritario.

Principali interpretazioni del concetto di probabilità

Le tre principali interpretazioni del concetto di probabilità sono quella *classica*, quella *frequentista* e quella *soggettivista*. Secondo l'interpretazione classica la probabilità di un evento è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili. Fondamentale a questa definizione è l'accettazione del *principio di indifferenza* secondo il quale: gli elementi di un insieme di eventi sono da considerarsi equiprobabili nel momento in cui non si hanno ragioni per credere uno di questi più probabile di un altro (per es., dato un dato non truccato la probabilità di uscita di una faccia è uguale alla probabilità di uscita di un'altra faccia, e tale probabilità è 1/6).

L'interpretazione frequentista concepisce la probabilità come la frequenza relativa di un evento in una serie di eventi simili e ripetuti. Secondo tale interpretazione la probabilità di un evento è dunque il limite a cui tende la frequenza relativa al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate.

La terza interpretazione abbandona l'idea che la probabilità sia una caratteristica propria degli eventi e concepisce questa come una sensazione psicologica di un agente posto di fronte ad una situazione d'incertezza. Più precisamente l'interpretazione soggettiva concepisce la probabilità come il grado di fiducia che un agente attribuisce al verificarsi di un dato evento ben determinato. Si potrebbe pensare che: se la probabilità è soggettiva allora non risponderà a nessuna regola generale. Il lavoro fondazionale di de Finetti mostra, definendo un concetto di coerenza, la falsità di tale affermazione.

Il problema di scelta di de Finetti

Nell'interpretazione soggettiva della probabilità il concetto di coerenza assume un ruolo di primo piano, tanto che Bruno de Finetti pone alla base della sua teoria della probabilità il principio di coerenza. Come abbiamo brevemente visto nella sezione precedente la teoria soggettivista concepisce l'incertezza come uno stato psicologico di un agente posto di fronte ad un problema di scelta. In questa interpretazione la teoria della probabilità può essere collocata all'interno di quel filone di ricerca, il cui più alto contributo è considerato il lavoro *Foundations of Statistics* ([S54]), basato su una concezione teoretico decisionale (scelta razionale in situazione d'incertezza)[10]. L'obiettivo dei pionieristici lavori di soggettivisti quali Ramsey ([R26]) e de Finetti ([D31]) era com'è noto quello di giustificare, con riferimento al comportamento di scelta di un agente ideale, l'interpretazione della probabilità come misura del suo grado d'incertezza. Da un punto di vista fondazionale l'argomento cardine per questa giustificazione è il celebre schema della scommessa — schema portato al suo massimo compimento da de Finetti in [29]. Per tale motivo lo schema della scommessa prende anche il nome di *problema di scelta di de Finetti*. Informalmente il problema di scelta di de Finetti è il seguente.

Ipotizziamo di essere interessati a scoprire il grado di fiducia che un agente B associa al verificarsi di un evento ben specificato E. L'approccio teoretico decisionale suggerisce di verificare il comportamento di B quando questo è posto di fronte ad un problema di scelta in cui è coinvolto l'evento E. Il problema di scelta preso in considerazione da de Finetti in [29] è quello della scommessa. Ipotizziamo dunque che B sia un bookmaker e S uno scommettitore. Sia $\mathcal{E} = \{E, E_1, \ldots, E_n\}$ un insieme di eventi su cui B tiene un banco di scommesse. A tal fine l'agente B dovrà pubblicare una quota di scommessa relativa ad ogni evento in $\mathcal{E}$. Possiamo pensare ad una quota di scommessa come ad una obbligazione o a un biglietto della lotteria, che, una volta comprato, per ogni evento in $\mathcal{E}$, paga un euro se tale evento si verifica e zero altrimenti. Un volta pubblicate le quote di scommessa l'agente S, o a qualsiasi altro agente interessato a scommettere sugli eventi di $\mathcal{E}$, potrà comprare o vendere,[11] quante obbligazioni vorrà. Nell'interpretazione soggettiva della probabilià la quota di scommessa per l'evento E rappresenta la credenza che l'agente B ha nel verificarsi di E. Il problema di scelta di de Finetti permette dunque di misurare il grado di fiducia che B associa al verificarsi di E.

[10] L'approccio teoretico decisionale fonda le sue radici nella psicologia comportamentale. Sebbene non siamo in grado di osservare stati psicologici, quali ad esempio l'utilità e la probabilità, possiamo sempre osservare i comportamenti ad essi legati.

[11] Lo schema delle scommessa comporta una serie di astrazioni del problema di scelta. Tra queste vi è la possibilità di rendere la scommessa reversibile facendo diventare il bookmaker lo scommettitore e lo scommettitore il bookmaker.

Principio di coerenza

Il problema di scelta di de Finetti è fondamentale, da un punto di vista fondazionale, alla teoria soggettiva della probabilità. Ma dove interviene la probabilità nel problema di scelta di de Finetti? In che modo questo giustifica l'interpretazione della probabilità come misura del grado di credenza di un agente? E infine, che ruolo ha il concetto di coerenza nel problema di scelta di de Finetti? Come vedremo queste tre domande sono strettamente connesse e la loro risposta metterà in luce tutta la forza fondazionale dell'idea di de Finetti. Al fine di rispondere alle domande ora poste presentiamo più formalmente quanto introdotto nella precedente sezione.
Come sopra siano S (scommettitore) e B (bookmaker) due agenti e sia $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ un insieme di eventi. Sia $\beta : \mathcal{E} \to [0, 1]$ un *assegnamento* (intuitivamente β rappresenta il grado di fiducia che B ha nel verificarsi degli eventi in $\mathcal{E}$, cioè, per $i = 1, \ldots, n$, $\beta(E_i)$ rappresenta la quota di scommessa che il bookmaker associa all'evento E_i). L'insieme delle quote di scommessa pubblicate da B prende il nome di *book* e viene formalizzato come l'insieme delle coppie $\{(E_i, \beta(E_i)) : i = 1, \ldots, n\}$. Sia $v : \mathcal{E} \to \{ 0, 1 \}$ una funzione di *valutazione* (intuitivamente, per ogni evento in $\mathcal{E}$, v dice se questo si è verificato o meno, più precisamente, per ogni $E \in \mathcal{E}$, $v(E) = 1$ afferma che l'evento E si è verificato, al contrario la valutazione $v(E) = 0$ afferma che l'evento E non si è verificato). Una volta che B pubblica il book, l'agente S punta le somme $\lambda_i \in \mathbf{R}$ per ogni $E_i \in \mathcal{E}$ e paga, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i \beta(E_i)$ euro a B con la promessa di ricevere $\lambda_i v(E_i)$ euro una volta conosciuto il valore di $v(E_i)$ (intuitivamente le quote $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rappresentano le somme di denaro messe in gioco dallo scommettitore). Sotto queste ipotesi il guadagno atteso di B è dato dalla seguente equazione:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta(E_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\beta(E_i) - v(E_i)).$$

Un assegnamento β su $\mathcal{E}$ è *coerente* se non esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tale che per ogni valutazione v

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\beta(E_i) - v(E_i)) < 0.$$

Un risultato fondamentale di de Finetti, dimostrato per la prima volta in [29], asserisce che un assegnamento β è coerente se e solo se esiste una funzione di probabilità p finitamente additiva che lo estende, cioè se esiste una funzione di probabilità finitamente additiva p, definita sull'algebra booleana generata da $\mathcal{E}$, tale che per ogni $E_i \in \mathcal{E}$, $p(E_i) = \beta(E_i)$. In altre parole asserisce che un bookmaker[12] non si espone a perdita sicura, cioè le sue quote di scommessa sono coerenti, se e solo se queste soddisfano le regole della probabilità. Il concetto di coerenza, fondamentale al fine di

[12] Similmente, vista la reversibilità della scommessa messa il luce nella nota 11, lo scommettitore. In questo contesto la reversibilità della scommessa si esprime prendendo le quote $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ come numeri reali negativi.

ottenere tale risultato, permette dunque di interpretare il grado di fiducia o credenza che B ha nel verificarsi di E con la probabilità che B associa al verificarsi di E, e, in ultima analisi, giustifica l'utilizzo della probabilità come misura dell'incertezza di un agente ideale posto in una situazione di scelta. Il problema di scelta di de Finetti fornisce dunque un contesto in cui analizzare il comportamento di scelta di un individuo (il bookmaker). Tale contesto, trattando matematicamente l'idea intuitiva di gradi di credenza razionali, caratterizza formalmente il concetto informale di scelta razionale in situazione d'incertezza. Identificando infatti il comportamento di scelta del bookmaker con le propietà del book da lui pubblicato, e sotto l'ipotesi che il bookmaker preferisce le vincite rispetto alle perdite, possiamo affermare che i gradi di credenza del bookmaker sono razionali nel momento in cui questo pubblica un book coerente.

Principio di coerenza stretta

Come abbiamo visto alla fine della sezione precedente nel problema di scelta di de Finetti è centrale l'idea che sia irrazionale scommettere in caso di perdita sicura e dunque, data la definizione di coerenza, sia irrazionale pubblicare un libro incoerente. Possiamo peró chiederci se il concetto di coerenza come definito da de Finetti catturi pienamente l'idea intuitiva di gradi di credenza razionali. Possiamo infatti notare come la pubblicazione, da parte di un bookmaker, di un book che impedisca ogni vincita e contemporaneamente permetta una perdita, sia, se pur coerente nel senso di de Finetti, intuitivamente irrazionale. Vediamo meglio questo punto per mezzo di un esempio. Sia E un evento possibile, e dunque, dato che E non è né certo né impossibile, esistono delle valutazioni che lo mappano in 1 e delle valutazioni che lo mappano in 0. Ipotizziamo che il bookmaker B pubblichi il book $\Gamma = \{(E, \beta(E) = 0)\}$. Sia $\lambda > 0$ la quota giocata dallo scommettitore S. Allora per ogni valutazione v tale che $v(E) = 0$

$$\lambda(\beta(E) - v(E)) = \lambda(0 - 0) = 0$$

e per ogni valutazione v tale che $v(E) = 1$

$$\lambda(\beta(E) - v(E)) = \lambda(0 - 1) < 0.$$

Per quanto tale assegnamento sia coerente nel senso di de Finetti, sotto l'ipotesi che il bookmaker preferisca le vincite rispetto alle perdite, possiamo considerare tale assegnamento come irrazionale. Se uno degli scopi della coerenza è quello di formalizzare il concetto intuitivo di scelta razionale in situazione d'incertezza allora il concetto di coerenza di de Finetti è per tale aspetto difettoso. Al fine di superare questo problema Abner Shimony in [142] definisce un nuovo concetto di coerenza, successivamente chiamato di coerenza stretta, il quale afferma che un assegnamento β è coerente se non si dà il caso che β impedisca ogni vincita e permetta una perdita per il bookmaker. Più formalmente, un assegnamento β su un insieme di eventi

$\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ è *strettamente coerente* se non esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tale che per ogni valutazione v

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\beta(E_i) - v(E_i)) \leq 0$$

e per qualche valutazione w

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\beta(E_i) - w(E_i)) < 0.$$

È facile controllare che il concetto di coerenza stretta evita il problema sollevato nell'esempio sopra fatto ed è dunque un concetto più adeguato allo scopo di formalizzare il concetto intuitivo di scelta razionale in situazione d'incertezza. In linea a quanto fatto da de Finetti per il concetto di coerenza, possiamo chiederci che tipo di proprietà logico-matematiche deve soddisfare un assegnamento strettamente coerente di credenza al fine di essere una rappresentazione adeguata dell'incertezza di un agente posto in una situazione di scelta. Il teorema di Shimony-Kemeny ([142, 67]) risponde a questa domanda nel caso in cui l'insieme degli eventi esaminati formi un'algebra booleana finita. Questo afferma che gli assegnamenti strettamente coerenti catturano le misure regolari. La coerenza stretta restringe dunque l'insieme delle opinioni coerenti nel senso di de Finetti. Segue infatti dalle definizioni che la coerenza stretta implica la coerenza sebbene il viceversa non valga.

3.3.2 Teorema di Shimony-Kemeny generalizzato: primi concetti e definizioni

In questa sezione presentiamo concetti inerenti la teoria dell'algebre booleane, la teoria dell'analisi convessa, la teoria della probabilità e l'analisi non-standard. I risultati qui presentati sono ben noti in letteratura e per tale ragione, in presenza di teoremi o lemmi, sono omesse le dimostrazioni. Per quanto riguarda i concetti sulle algebre booleane facciamo riferimento a [43], per quanto riguarda i concetti di analisi convessa facciamo riferimento a [1] e [13], mentre facciamo riferimento a [142, 31, 25] per quanto riguarda i concetti di teoria della probabilità, infine per quanto riguarda l'analisi non-standard facciamo riferimento a [16].

Algebre booleane

Definizione 3.3.1. *Una* algebra booleana $\mathcal{B}$ *è una struttura* $\langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *tale che* B *è un insieme non vuoto,* $\vee, \wedge$ *sono due operazioni binarie definite su* B*,* $'$ *è un operazione unaria definita su* B*,* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{1}$ *sono due costanti (cioè elementi privilegiati di* B*) e per ogni* $a, b, c \in B$ *valgono le seguenti proprietà:*

1. $a \vee b = b \vee a$ *e* $a \wedge b = b \wedge a$*;*

2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ *e* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$*;*

3. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *e* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$*;*

4. $a \vee \boldsymbol{0} = a$ *e* $a \wedge \boldsymbol{1} = a$*;*

5. $a \vee a' = \boldsymbol{1}$ *e* $a \wedge a' = \boldsymbol{0}$*.*

Se B è un insieme finito diciamo che $\mathcal{B}$ è una algebra booleana finita.

Esempio 3.3.2. *Un importate esempio di algebra booleana è l'algebra $\boldsymbol{2} = \langle \{ 0, 1 \}, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ tale che $\boldsymbol{0} = 0$, $\boldsymbol{1} = 1$ e per ogni $a, b \in \{ 0, 1 \}$ le operazioni algebriche sono definite nel modo seguente:*

($\vee$) $a \vee b = \max \{ a, b \}$*;*

($\wedge$) $a \wedge b = \min \{ a, b \}$*;*

($'$) $a' = 1 - a$*.*

Similmente per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ l'algebra $\boldsymbol{2}^n = \langle \{ 0, 1 \}^n, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ è booleana, dove $\boldsymbol{0} = \bar{0}$ (il vettore costante zero), $\boldsymbol{1} = \bar{1}$ (il vettore costante uno) e per ogni $a, b \in \{ 0, 1 \}$, $i \leq n$ le operazioni algebriche sono definite come segue:

($\vee$) $(a \vee b)(i) = \max \{ a(i), b(i) \}$*;*

($\wedge$) $(a \wedge b)(i) = \min \{ a(i), b(i) \}$*;*

($'$) $a(i)' = 1 - a(i)$*.*

Definizione 3.3.3. *Siano $\mathcal{B}_1 = \langle B_1, \vee_1, \wedge_1, '^1, \boldsymbol{0}_1, \boldsymbol{1}_1 \rangle$ e $\mathcal{B}_2 = \langle B_2, \vee_2, \wedge_2, '^2, \boldsymbol{0}_2, \boldsymbol{1}_2 \rangle$ due algebre booleane. Un* omomorfismo *h da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ è una funzione tale che per ogni $a, b \in B_1$ valgono le seguenti proprietà:*

1. $h : B_1 \to B_2$*;*

2. $h(a \wedge_1 b) = h(a) \wedge_2 h(b)$*;*

3. $h(a \vee_1 b) = h(a) \vee_2 h(b)$*;*

4. $h(a'^1) = h(a)'^2$*;*

5. $h(\boldsymbol{0}_1) = \boldsymbol{0}_2$ *e* $h(\boldsymbol{1}_1) = \boldsymbol{1}_2$*.*

Diciamo che un omomorfismo h è un epimorfismo *se h è suriettivo, mentre diremo che un omomorfismo h è un* monomorfismo *se h è iniettivo e infine diremo che un omomorfismo h è un* isomorfismo *se h è sia un epimorfismo che un monomorfismo, cioè se h è suriettiva e iniettiva. Un'algebra booleana $\mathcal{B}_1$* è isomorfa *a un'algebra booleana $\mathcal{B}_2$ se esiste un isomorfismo h da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.*

Notazione: Data un'algebra booleana $\mathcal{B}$ chiamiamo *valutazione* ogni omomorfismo da $\mathcal{B}$ all'algebra booleana $\mathbf{2}$. Denotiamo con $\mathbb{V}_{\mathcal{B}}$ l'insieme di tutte le valutazioni su $\mathcal{B}$. Per ogni $b_1, \ldots, b_k \in B$ e per ogni $v \in \mathbb{V}_{\mathcal{B}}$ denotiamo con $v \restriction \{ b_1, \ldots, b_k \}$ la restrizione di v a $\{ b_1, \ldots, b_k \}$. Similmente $\mathbb{V}_{\mathcal{B}} \restriction \{ b_1, \ldots, b_k \}$ denota l'insieme $\{v \restriction \{ b_1, \ldots, b_k \} \mid v \in \mathbb{V}_{\mathcal{B}}\}$.

Definizione 3.3.4. *Siano $\mathcal{B}_1 = \langle B, \vee_1, \wedge_1, '^1, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ e $\mathcal{B}_2 = \langle B, \vee_2, \wedge_2, '^2, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ due algebre booleane. Diciamo che $\mathcal{B}_2$ è una* sottoalgebra *di $\mathcal{B}_1$ se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$B_2 \subseteq B_1$;*
2. *per ogni $a, b \in B_2$, $a \wedge_2 b = a \wedge_1 b$, $a \vee_2 b = a \vee_1 b$ e infine $a'^2 = a'^1$, cioè $\vee_2, \wedge_2, '^2$ sono la restrizione delle operazioni $\vee_1, \wedge_1, '^1$ all'insieme B_2.*

Teorema 3.3.5. *Sia $\mathcal{B} = \langle B, \vee_B, \wedge_B, '^B, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ un'algebra booleana, e sia $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$, per $I \subseteq \mathbf{N}$, una famiglia di sottoalgebre di $\mathcal{B}$. La struttura $\langle \bigcap (B_i)_{i \in I}, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ dove $\vee, \wedge, '$ sono la restrizione delle operazioni $\vee_B, \wedge_B, '^B$ all'insieme $\bigcap (B_i)_{i \in I}$, è una sottoalgebra booleana di $\mathcal{B}$.*

Definizione 3.3.6. *Sia $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ una algebra booleana, e sia A un sottoinsieme di B. La* sottoalgebra generata *da A è definita nel seguente modo:*

$$\mathcal{A} = \bigcap \{ \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \text{ è una sottolgebra di } \mathcal{B} \text{ e } A \subseteq B' \} .$$

Diremo che l'insieme A è un insieme di generatori *di $\mathcal{A}$ e che l'algebra $\mathcal{A}$* è generata *dall'insieme A. Se A è un insieme finito allora $\mathcal{A}$* è finitamente generata.

Notazione: Sia $\langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ un'algebra booleana. Per ogni $b_1, \ldots, b_n \in B$ denotiamo con $\bigwedge_{i=1}^n b_i$ l'elemento $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n$. Similmente denotiamo con $\bigvee_{i=1}^n b_i$ l'elemento $b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n$.

Definizione 3.3.7. *Sia $\langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ un'algebra booleana generata dagli elementi $b_1, \ldots, b_n$. Gli elementi $b_1, \ldots, b_n$ sono detti* liberi *se per ogni $i \leq n$*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bar{b_i} \neq \mathbf{0}$$

dove $\bar{b_i} = b_i$ o $\bar{b_i} = b_i'$. Una algebra booleana generata da n generatori liberi è chiamata algebra libera di n generatori *ed è denotata da* $\mathrm{Free}(n)$.

Definizione 3.3.8. *Sia $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ un'algebra booleana. Possiamo definire la relazione binaria $\leq_{\mathcal{B}}$ su B (o semplicemente $\leq$ quando non c'è rischio di confusione) nel seguente modo: per ogni $a, b \in B$*

$$a \leq_{\mathcal{B}} b \quad \text{se e solo se} \quad a = a \wedge b \quad \text{se e solo se } b = a \vee b.$$

Definizione 3.3.9. *Sia* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ *una algebra booleana. Un* atomo *in* $\mathcal{B}$ *è un elemento* $a \in B \setminus \{ \boldsymbol{0} \}$ *tale che per ogni* $b \in B$ *se* $\boldsymbol{0} \leq b \leq a$ *allora* $b = 0$ *oppure* $b = a$. *Con* $A_t^{\mathcal{B}}$ *denotiamo l'insieme degli atomi di* $\mathcal{B}$. *Diciamo che un'algebra booleana* $\mathcal{B}$ *è* atomica *se per ogni* $b \in B \setminus \{ \boldsymbol{0} \}$ *esiste un atomo* a *di* B *tale che* $a \leq b$.

Teorema 3.3.10. *Data un'algebra booleana finita* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ *valgono i seguenti punti:*

(1) $\mathcal{B}$ *è atomica;*

(2) per ogni $b \in B$, $b = \bigvee \{ a \in A_t^{\mathcal{B}} \mid a \leq b \}$*;*

(3) l'algebra $\mathcal{B}$ *è isomorfa all'algebra* $\mathcal{P}(A_t^{\mathcal{B}})$*;*

(4) il numero di elementi dell'algebra $\mathcal{B}$ *è* 2^n, *dove* n *è la cardinalità di* $A_t^{\mathcal{B}}$.

Notazione: Data un'algebra booleana finita $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ in seguito con $at(b)$ denotiamo l'insieme $\{ a \in A_t^{\mathcal{B}} \mid a \leq b \}$ per ogni $b \in B$.

Teorema 3.3.11. *Data una algebra booleana* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ *generata dagli elementi* $b_1, \ldots, b_n$ *valgono i seguenti punti:*

(1) ogni atomo di $\mathcal{B}$ *ha la forma*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bar{b_i}$$

dove per ogni $i \leq n$, $\bar{b_i} = b_i$ *oppure* $\bar{b_i} = b_i'$*;*

(2) ogni elemento della forma

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bar{b_i}$$

dove per $i \leq n$, $\bar{b_i} = b_i$ *oppure* $\bar{b_i} = b_i'$ *è un atomo di* $\mathcal{B}$ *oppure è* $\boldsymbol{0}$.

Teorema 3.3.12. *Sia* $\mathcal{B}$ *un algebra booleana infinita libera. Allora* $\mathcal{B}$ *non è atomica.*

Analisi convessa

Definizione 3.3.13. *Siano* $x, y \in \boldsymbol{R}^n$. *Un* segmento con punti finali x, y *è l'insieme*

$$[x, y] = \{ z \in \boldsymbol{R}^n \mid z = \lambda x + (1 - \lambda) y \text{ e } \lambda \in [0, 1] \}.$$

Definizione 3.3.14. *Un sottoinsieme* C *di* $\boldsymbol{R}^n$ *è* convesso *se per tutti gli* $x, y \in C$, $[x, y] \subseteq C$.

Definizione 3.3.15. *Per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ il vettore di*

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i \in \boldsymbol{R}^n$$

è una combinazione convessa *dei vettori $y_1, \ldots, y_m \in \boldsymbol{R}^n$, dove per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\lambda_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.*

Teorema 3.3.16. *Un insieme $C \in \boldsymbol{R}^n$ è convesso se e solo se ogni combinazione convessa di vettori di C appartiene a C.*

Teorema 3.3.17. *Sia I un sottoinsieme finito di $\boldsymbol{N}$. Sia $(C_i)_{i \in I}$ un'arbitraria famiglia di sottoinsiemi convessi di $\boldsymbol{R}^n$. Allora l'insieme*

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i$$

è convesso.

Definizione 3.3.18. *Sia C un sottoinsieme non vuoto $\boldsymbol{R}^n$. Il* guscio convesso *di C (denotato da $conv(C)$) è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti C.*

Teorema 3.3.19. *Sia C un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$ allora:*

$$conv(C) = \{\, y \in \boldsymbol{R}^n \mid y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i \text{ tale che } \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \text{ e } y_1, \ldots, y_m \in C \,\}.$$

Definizione 3.3.20. *Un sottoinsieme C di $\boldsymbol{R}^n$ è* affine *se esistono un sottospazio V di $\boldsymbol{R}^n$ e un vettore x di $\boldsymbol{R}^n$ tale che*

$$C = \{\, x + y \mid y \in V \,\}.$$

Definizione 3.3.21. *Sia C un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$. Il* guscio affine *di C (denotato da $aff(C)$) è l'intersezione di tutti gli insieme affini contenenti C.*

Definizione 3.3.22. *Sia C un sottoinsieme non vuoto $\boldsymbol{R}^n$. Diciamo che gli elementi di F sono* affinemente indipendenti *se per ogni $x \in C$, $x \notin aff(C \setminus \{\, x \,\})$.*

Definizione 3.3.23. *Sia C un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$. C è un* simplesso *se esistono $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{R}^n$ affinemente indipendenti tali che*

$$C = \{\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \,\}.$$

Ricordiamo che dato un elemento $x \in \mathbf{R}^n$ per ogni $i \leq n$ denotiamo con $x(i)$ l'i-esimo elemento di x e dati $x, y \in \mathbf{R}^n$ denotiamo con $x \cdot y$ il prodotto interno euclideo $\sum_{i=1}^{n} x(i)y(i)$.

Definizione 3.3.24. *Sia C un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$. Diciamo che un vettore non zero $p \in \boldsymbol{R}^n$* supporta C a x *se e solo se $p \cdot y \leq p \cdot x$ per tutti gli $y \in C$. Se p supporta C a x, allora l'iperpiano $\{ y \in \boldsymbol{R}^n \mid p \cdot y = p \cdot x \}$ è chiamato un* iperpiano di supporto per C a x. *Il supporto è chiamato* proprio *se $p \cdot y > p \cdot x$ per qualche $y \in C$.*

Notazione: per ragioni di semplicità scriviamo $p \cdot C \leq p \cdot x$ per indicare $p \cdot y \leq p \cdot x$ per ogni $y \in C$.

Definizione 3.3.25. *Sia C un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$. Diciamo che un punto $x \in C$ appartiene all'interno relativo di C (denotato da $relint(C)$) se esiste un numero reale $e > 0$ tale che $\{ y \in aff(C) \mid \|y - x\| < e \} \subseteq C$ dove $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea. Se C è chiuso, allora $C \setminus relint(C)$ è chiamato il* confine relativo *di C e è denotato da $\partial_r(C)$.*

Definizione 3.3.26. *Sia C un inseme convesso non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$. Un* punto estremale *in C è un elemento $x \in C$ tale che*

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v$$

se e solo se $x = u = v$ (dove $\lambda \in (0, 1)$). Dato un insieme convesso C denotiamo da $Ext(C)$ l'insieme dei punti estremali di C.

Teorema 3.3.27 (Krein-Mil'man)**.** *Sia C un insieme convesso chiuso non vuoto in $\boldsymbol{R}^n$. Allora $C = Conv(Ext(C))$.*

Lemma 3.3.28. *Sia C un sottoinsieme convesso chiuso non vuoto di $\boldsymbol{R}^n$ con punti estremali $x_1, \ldots, x_n$, allora*

$$relint(C) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i > 0 \ e \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \}.$$

Dimostrazione. Vedi [42] Lemma 5.4. □

Teorema 3.3.29. *Sia $C \subseteq \boldsymbol{R}^k$ un insieme convesso e sia $x \in C$. Allora esiste un $p \in \boldsymbol{R}^k$ che supporta propriamente C a x se e solo se $x \notin relint(C)$.*

Teorema 3.3.30. *Sia C un sottoinsieme convesso di $\boldsymbol{R}^k$ e sia $x \in \partial_r(C)$. Allora esiste un $q \in \boldsymbol{R}^k$ tale che*

$$q \cdot x \leq q \cdot C \quad e \quad q \cdot x < q \cdot y \quad per\ ogni \quad y \in relint(C).$$

Teoria della probabilità

In questa sezione presentiamo in modo rigoroso molti concetti introdotti nella sezione 3.3.1. Iniziamo dal definire il concetto di evento. In ciò che segue identifichiamo un *evento* con una proposizione booleana cioè con una proposizione che può essere vera o falsa. Denotiamo con $\top$ l'evento sempre vero (evento certo) e con $\perp$ l'evento sempre falso (evento impossibile). Dato un insieme di eventi $\mathcal{E}$ possiamo definire tra gli elementi di $\mathcal{E}$ le operazione booleane $\wedge$ per la congiunzione, $\vee$ per la disgiunzione e infine $\neg$ per la negazione. Dati due eventi E_1, E_2 diremo che gli eventi E_1 e E_2 sono *incompatibili* se $E_1 \wedge E_2 = \perp$. Notiamo che proposizioni differenti possono identificare lo stesso evento. Dal momento che possiamo assumere che a tali proposizioni sia sempre associata la medesima probabilità in ciò che segue assumiamo che proposizioni differenti identifichino eventi differenti[13]. Sia $\mathcal{E}$ un inseme di eventi, sebbene $\mathcal{E}$ potrebbe non essere un algebra booleana possiamo sempre considerare l'algebra booleana generata da $\mathcal{E}$. In seguito denotiamo tale algebra da $\langle\mathcal{E}\rangle$.

Definizione 3.3.31. *Sia $\mathcal{E} = \{ E_1, \dots, E_n \}$ un insieme finito di eventi. Un evento è detto essere* atomico *se è un atomo dell'algebra booleana $\langle\mathcal{E}\rangle$. Denotiamo da $A_t^{\mathcal{E}}$ l'insieme di tutti gli eventi atomici generati dall'insieme $\mathcal{E}$.*

Notiamo che $Car(A_t^{\mathcal{E}}) \leq 2^n$. Nel caso in cui gli eventi di $\mathcal{E}$ sono incompatibili allora $Car(A_t^{\mathcal{E}}) = 2^n$.

Sia $\mathcal{E} = \{ E_1, \dots, E_n \}$ un insieme finito di eventi e sia $\langle\mathcal{E}\rangle$ l'algebra booleana generata dall'insieme $\mathcal{E}$. Dal Teorema 3.3.11 segue che $A_t^{\mathcal{E}} = A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle}$, e così, data l'osservazione fatta sotto la Definizione 3.3.31, $A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle}$ è un insieme finito. Dai punti (4) e (3) del Teorema 3.3.10 segue che $\langle\mathcal{E}\rangle$ è un'algebra booleana finita e che esiste un isomorfismo h da $\langle\mathcal{E}\rangle$ a $\mathcal{P}(A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle})$. Dato $A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle} = \{ a_1, \dots, a_n \}$, è semplice controllare che la funzione $g : \mathbf{P}(A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle}) \to \{ 0, 1 \}^n$ definita nel seguente modo: per tutti $A \in \mathbf{P}(A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle})$

$$g(A) = (\chi_A(a_1), \dots, \chi_A(a_n))$$

dove χ_A è la funzione caratteristica di A, cioè per tutti $a \in A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle}$

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & \text{if } a \in A, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

è un isomorfismo da $\mathcal{P}(A_t^{\langle\mathcal{E}\rangle})$ a $\mathbf{2}^n$. Così la funzione $g \circ h : \langle\mathcal{E}\rangle \to \{ 0, 1 \}^n$ è un isomorfismo tra le algebre booleane $\langle\mathcal{E}\rangle$ e $\mathbf{2}^n$. Per tale ragione in questo capitolo identifichiamo ogni evento di $\langle\mathcal{E}\rangle$ con un vettore $\{ 0, 1 \}^n$, dove n è il numero degli atomi di $\langle\mathcal{E}\rangle$.

Definizione 3.3.32. *Sia $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ un'algebra booleana, e siano $a_1, a_2 \in B$. Diciamo che gli elementi a e b sono* disgiunti *se $a_1 \wedge a_2 = \mathbf{0}$.*

[13] Se assumiamo che la logica degli eventi è la logica classica allora possiamo introdurre una relazione di equivalenza tra eventi. In questo caso associamo la stessa misura di probabilità a tutti gli elementi di una medesima classe di equivalenza.

Definizione 3.3.33. *Sia* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ *un algebra booleana.* p *è una* misura di probabilità finitamente additiva *su* $\mathcal{B}$ *se valgono le seguenti proprietà:*

(1) $p : \mathcal{B} \to [0, 1]$*;*

(2) $p(\boldsymbol{1}) = 1$*;*

(3) per ogni $a_1, a_2 \in \mathcal{B}$ *se* a_1, a_2 *sono disgiunti allora* $p(a_1 \vee a_2) = p(a_1) + p(a_2)$.

se sostituiamo la proprietà (2) con la seguente proprietà:

(2') per ogni $a \in \mathcal{B}$ $p(a) = 1$ *se e solo se* $a = \boldsymbol{1}$*;*

allora diremo che la misura p *è* regolare*. Con* $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ *denotiamo l'insieme di tutte le misure di probabilità finitamente additive su* $\mathcal{B}$*.*

Sia p una misura di probabilità regolare finitamente additiva definita sull'algebra booleana $\mathcal{B}$. È facile dimostrare che per ogni $a \in \mathcal{B}$ $p(a) = 0$ se e solo se $a = \mathbf{0}$.

Definizione 3.3.34. *Sia* $\mathcal{E}$ *un insieme finito di eventi. Un* assegnamento $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$*, per* $e_i \in \mathcal{E}$*, è una funzione da* $\mathcal{E}$ *a* $[0, 1]$.

Definizione 3.3.35. *Sia* $\mathcal{E} = \{ e_1, \ldots, e_n \}$ *un insieme finito di eventi. Un assegnamento* $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$ *è detto essere* coerente *se non esistono* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ *tali che per ogni* $v \in \mathbb{V}_{\langle \mathcal{E} \rangle} \upharpoonright \{ e_1, \ldots, e_n \}$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e(\beta(e) - v(e)) < 0.$$

Nella sottosezione 3.3.1 abbiamo visto l'importanza che il concetto di coerenza assume nell'interpretazione soggettiva della teoria della probabilità. Sempre nella medesima sottosezione abbiamo visto che la sua importanza è legata al seguente teorema di de Finetti.

Teorema 3.3.36. *(Dutch Book [29]) Sia* $\mathcal{E}$ *un insieme finito di eventi. Un assegnamento* $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$*, per* $e_i \in \mathcal{E}$*, è coerente se e solo se esiste una misura di probabilità finitamente additiva su* $\langle \mathcal{E} \rangle$ *che lo estende.*

Concludiamo questa sezione presentando il concetto di coerenza stretta e il teorema di Shimony-Kemeny.

Definizione 3.3.37. *Sia* $\mathcal{E} = \{ e_1, \ldots, e_n \}$ *un insieme finito di eventi. Un assegnamento* $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$ *è detto essere* strettamente coerente *se non esistono* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$ *tali che per ogni* $v \in \mathbb{V}_{\langle \mathcal{E} \rangle} \upharpoonright \{ e_1, \ldots, e_n \}$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e(\beta(e) - v(e)) \leq 0$$

e per qualche $w \in \mathbb{V}_{\langle\mathcal{E}\rangle} \restriction \{ e_1, \dots, e_n \}$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \lambda_e(\beta(e) - w(e)) < 0.$$

Teorema 3.3.38. *(Shimony-Kemeny [142, 67]) Sia $\mathcal{E}$ un insieme finito di eventi. Un assegnamento $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$, per $e_i \in \langle\mathcal{E}\rangle$, è coerente se e solo se è una misura di probabilità regolare finitamente additiva.*

Analisi non-standard

Iniziamo dal dare la definizione di filtro e di ultrafiltro.

Definizione 3.3.39. *Sia X un insieme non vuoto. Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X è un* filtro *di X se e solo se per ogni $A, B \subseteq \boldsymbol{P}(X)$ valgono le seguenti condizioni:*

1. *$X \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$;*
2. *se $A \subseteq B$ e $A \in \mathcal{F}$ allora $B \in \mathcal{F}$;*
3. *se $A, B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

Definizione 3.3.40. *Sia X un insieme non vuoto. Una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di X è un* ultrafiltro *su X se e solo se $\mathcal{U}$ è un filtro su X e per ogni filtro $\mathcal{F}$ su X, se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.*

Definizione 3.3.41. *Una famiglia di insiemi $\mathcal{F} \neq \emptyset$ soddisfa la* proprietà dell'intersezione finita *se e solo se per ogni $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, $A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$.*

Utilizzando il Lemma di Zorn è possibile provare il seguente:

Teorema 3.3.42. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X che soddisfa la proprietà dell'intersezione finita. Allora esiste un filtro $\mathcal{F}'$ su X tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.*

Teorema 3.3.43. *Sia X un insieme non vuoto. Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X allora esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Mostriamo ora l'usuale costruzione di un ultraprodotto. Ricordiamo che un *tipo* o *linguaggio* di algebre è un insieme $\mathcal{F}$ di simboli di funzioni tale che ad ogni $f \in \mathcal{F}$ è assegnato un intero non negativo (la sua *arietà*). Dato un linguaggio $\mathcal{F}$ una algebra $\mathcal{A}$ di tipo $\mathcal{F}$ è una coppia $\langle A, F\rangle$ dove A è un insieme non vuoto e F è una famiglia di operazioni finitarie su A indicizzate dal linguaggio $\mathcal{F}$ tale che in corrispondenza di ogni simbolo di funzione n-ario in $\mathcal{F}$ esiste un'operazione n-aria f^A su A. Ricordiamo inoltre che data una famiglie di algebre $\{ \mathcal{A}_i \mid i \in I \}$ di uno stesso tipo $\mathcal{F}$, il *prodotto* *diretto* $\mathcal{A} = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ è l'algebra di dominio $\Pi_{i\in I}A_i$ tale che per ogni $f \in \mathcal{F}_n$ e per ogni $a_1,\ldots,a_n \in \Pi_{i\in I}A_i$

$$f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i),\ldots,a_n(i))$$

dove, per ogni $i \in I$ e per ogni $j \in \{1,\ldots,n\}$, $a_j(i)$ denota la i-esima proiezione di a_j.

Definizione 3.3.44. *Sia* $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ *una famiglia di algebre di un dato tipo e sia* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro su* I. *Per ogni* $(a,b) \in \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$, *definiamo* $\theta_{\mathcal{U}}$ *su* $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ *nel seguente modo:*

$$(a,b) \in \theta_{\mathcal{U}} \textit{ se e solo se } \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Definiamo l'ultraprodotto $\mathcal{A}^* = \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{U}$ *come* $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\theta_{\mathcal{U}}$. *Quando, per ogni* $i,j \in I$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$ *denoteremo l'ultraprodotto* ultrapotenza *e* $\mathcal{A}^*$ *con* $\mathcal{A}^I/\mathcal{U}$.

Utilizzando la costruzione dell'ultraprodotto ora mostrata è possibile introdurre un campo iperreale costruito a partire dal campo reale $\mathbf{R}$. Sia infatti $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{R}$. Per ogni $\langle r_i\rangle, \langle s_i\rangle \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ definiamo le operazioni di somma e prodotto nel seguente modo:

- $\langle r_i\rangle + \langle s_i\rangle = \langle r_i + s_i\rangle$;
- $\langle r_i\rangle \cdot \langle s_i\rangle = \langle r_i \cdot s_i\rangle$.

Ricordiamo che *ultrafiltro libero* è un ultrafiltro contenente tutti i sottoinsiemi cofiniti di $\mathbf{N}$. Sia ora $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libero e, per ogni $\langle r_i\rangle, \langle s_i\rangle \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, sia $\approx$ la relazione definita nel seguente modo

$$\langle r_i\rangle \approx \langle s_i\rangle \text{ se e solo se } \{i \in \mathbf{N} \mid r_i = r_s\} \in \mathcal{U}.$$

È facile mostrare che $\approx$ è una relazione di equivalenza. Sia quindi $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\approx$. Chiameremo *numero iperreale* ogni elemento di $\langle r_i\rangle_{\mathcal{U}}$ di $\mathbf{R}^*$. Possiamo ora definire le operazioni di somma e prodotto e di relazione tra gli elementi di $\mathbf{R}^*$ nel seguente modo (dove per semplicità denoteremo le operazioni di somma e prodotto nel modo usuale):

- $\langle r\rangle_{\mathcal{U}} + \langle s\rangle_{\mathcal{U}} = \langle r + s\rangle_{\mathcal{U}}$;
- $\langle r\rangle_{\mathcal{U}} \cdot \langle s\rangle_{\mathcal{U}} = \langle r \cdot s\rangle_{\mathcal{U}}$;
- $\langle r\rangle_{\mathcal{U}} \leq \langle s\rangle_{\mathcal{U}}$ se e solo se $\{i \in \mathbf{N} \mid r_i \leq s_i\} \in \mathcal{U}$.

La struttura $\langle \mathbf{R}^*, +, \cdot, \leq, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$ è un campo iperreale e gli elementi di $\mathbf{R}^* \smallsetminus \mathbf{R}$ sono chiamati *numeri non-standard*. Concludiamo questa sezione definendo il concetto di probabilità non standard[14].

[14] Ricordiamo che funzioni di probabilità non standard sono state definite in [30, 143, 100, 53, 120, 157, 12].

Definizione 3.3.45. *Dato un campo iperreale* $\langle \boldsymbol{R}^*, +, \cdot, \leq, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}\rangle$, *diremo che una funzione* p *definita sull'algebra booleana* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\rangle$ *è una misura di probabilità non standard se soddisfa le seguenti proprietà:*

(1) $p : \mathcal{B} \to [0,1]^*$, *dove* $[0,1]^*$ *è l'intervallo unitario di* $\boldsymbol{R}^*$*;*

(2) $p(\boldsymbol{1}) = 1$*;*

(3) per ogni $a_1, a_2 \in \mathcal{B}$ *se* a_1, a_2 *sono disgiunti allora* $p(a_1 \vee a_2) = p(a_1) + p(a_2)$.

In seguito quando parleremo di misura di probabilità standard ci riferiremo ad una misura di probabilità il cui codominio è l'intervallo unitario di $\mathbf{R}$.

3.3.3 Teorema di Shimony-Kemeny generalizzato: risultati preliminari

Per quanto visto nella sezione 3.3.2 identifichiamo ogni evento di $\langle \mathcal{E}\rangle$ con un vettore di $\{0,1\}^n$, dove n è la cardinalità di $A_t^{\langle \mathcal{E}\rangle}$. Per tale motivo in questa sezione chiameremo eventi gli elementi di $\{0,1\}^n$.

Notazione: dato un insieme di eventi $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \{0,1\}^n$ per ogni elemento $v_i \in \mathbb{V}_{\mathbf{2}^n} \upharpoonright \{e_1, \dots, e_k\}$ denotiamo il vettore $(v_i(e_1), \dots, v_i(e_k))$ con v_i^k. L'insieme $\mathbb{V}_{\mathbf{2}^n}^k$ denota l'insieme di elementi v_i^k. Dato un assegnamento $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$, in ciò che segue identifichiamo β con il vettore $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^k$. Infine denotiamo con $C(e_1, \dots, e_k)$ l'insieme di tutti gli assegnamenti coerenti su $e_1, \dots, e_k$.

Lemma 3.3.46. *Dati gli eventi* $e_1, \dots, e_k \in \{0,1\}^n$ *valgono i seguenti punti.*

1. *Ogni elemento di* $C(e_1, \dots, e_k)$ *è una combinazione convessa di elementi in* $\mathbb{V}_{\mathbf{2}^n}^k$, *cioè* $C(e_1, \dots, e_k)$ *è un sottoinsieme chiuso e convesso di* $\boldsymbol{R}^k$ *e ha un numero finito di estremali.*

2. $C(e_1, \dots, e_k) = Conv(Ext(C(e_1, \dots, e_k)))$.

Dimostrazione. Per (1) vedi [127] Teorema 2 (nota che $\mathbb{V}_{\mathbf{2}^n}^k$ è un insieme finito). Il punto (2) segue da (1) e dal Teorema 3.3.27. □

Teorema 3.3.47. *Sia* $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ *un assegnamento coerente su* $e_1, \dots, e_k \in \{0,1\}^n$. *I seguenti sono equivalenti:*

1. β *è strettamente coerente.*

2. $\beta \in relint(C(e_1, \dots, e_k))$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo che β sia un assegnamento strettamente coerente e per contraddizione supponiamo che $\beta \notin relint(C(e_1,\dots,e_k))$. Fintanto che $\beta \in C(e_1,\dots,e_k)$ e $\beta \notin relint(C(e_1,\dots,e_k))$ segue che $\beta \in \partial_r C(e_1,\dots,e_k)$. Per il Teorema 3.3.30 esiste uno $z \in \mathbf{R}^k$ tale che, $z\cdot\beta \le z\cdot C(e_1,\dots,e_k)$ e $z\cdot\beta < z\cdot\sigma$ per ogni $\sigma \in relint(C(e_1,\dots,e_k))$. Dal punto (1) del Lemma 3.3.46 ogni elemento di $C(e_1,\dots,e_k)$ è una combinazione convessa di elementi di $\mathbb{V}^k_{\mathbf{2}^n}$. Poichè $\mathbb{V}^k_{\mathbf{2}^n}$ è un insieme finito i suoi estremali sono in numero finito, dunque dato un elemento $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^k \in relint(C(e_1,\dots,e_k))$ (dove $v_i^k \in \mathbb{V}^k_{\mathbf{2}^n}$, $\lambda_i > 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) segue, dal Lemma 3.3.28, che $z\cdot\beta \le z\cdot v_i^k$ e $z\cdot\beta < z\cdot\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^k$ e perciò esiste qualche $v_i^k \in \mathbb{V}^k_{\mathbf{2}^n}$ tale che $z\cdot\beta < z\cdot v_i^k$. Prendendo $v_{i_0}^k$ tale che $z\cdot\beta < z\cdot v_{i_0}^k$ e ponendo $z = (z_1,\dots,z_k)$ otteniamo $\sum_{j=1}^k z_j(\alpha_j - v_i(e_j)) \le 0$ e $\sum_{j=1}^k z_j(\alpha_j - v_{i_0}(e_j)) < 0$, quindi β non è strettamente coerente contro l'ipotesi.
(2) $\Rightarrow$ (1) Supponiamo che β non sia strettamente coerente. Allora esiste $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_k) \in \mathbf{R}^k$ tale che per ogni valutazione $v_i \in \mathbb{V}_{\mathbf{2}^n} \restriction \{e_1,\dots,e_k\}$ e per qualche valutazione $v_{i_0} \in \mathbb{V}_{\mathbf{2}^n} \restriction \{e_1,\dots,e_k\}$ valgono i seguenti punti

(i) $\sum_{j=1}^k \sigma_j(\alpha_j - v_i(e_j)) = \sigma\cdot\beta - \sigma\cdot v_i^k \le 0$

(ii) $\sum_{j=1}^k \sigma_j(\alpha_j - v_{i_0}(e_j)) = \sigma\cdot\beta - \sigma\cdot v_{i_o}^k < 0.$

Dal punto (1) del Lemma 3.3.46 ogni elemento di $C(e_1,\dots,e_k)$ ha la forma $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j^k$ per qualche $v_j^k \in \mathbb{V}^k_{\mathbf{2}^n}$, $\lambda_j \ge 0$ e $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Così dai punti *(i)* e *(ii)* segue che $\sigma\cdot\beta - \sigma\cdot C(e_1,\dots,e_k) \le 0$ e $\sigma\cdot\beta - \sigma\cdot y < 0$ per qualche $y \in C(e_1,\dots,e_k)$. Quindi, σ supporta propriamente $C(e_1,\dots,e_k)$ a β e dal Teorema 3.3.29 segue che $\beta \notin relint(C(e_1,\dots,e_k))$. □

Il Teorema 3.3.47 permette dunque di dare una caratterizzazione geometrica degli assegnamenti strettamente coerenti. Questi risultano essere l'interno relativo dell'insieme di tutti gli assegnamenti coerenti di un dato insieme di eventi $\mathcal{E}$.

Sia S il simplesso in $\mathbf{R}^n$ i cui punti estremali $a_1,\dots,a_n$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^n$, cioè i vettori le cui proiezioni sono definite, per $j = 1,\dots,n$, dalla funzione

$$\pi_j(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora S consiste di tutti i vettori $\sigma = (\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ tale che $0 \le \sigma(i)$ per $i = 1,\dots,n$ e $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \bar{1}$. Per ogni $\sigma \in S$ definiamo la funzione $p_\sigma : \{0,1\}^n \to [0,1]$ nel seguente modo: dato un $\sigma \in S$ per ogni $e \in \{0,1\}^n$

$$p_\sigma(e) = \sigma\cdot e.$$

Ricordiamo che $\sigma\cdot e$ è il prodotto interno euclideo, cioè $\sigma\cdot e = \sum_{i=1}^n \sigma(i)e(i)$.

Lemma 3.3.48. *Per ogni $\sigma \in S$ valgono i seguenti punti:*

(1) p_σ è una misura di probabilità finitamente additiva su $\mathbf{2}^n$.

(2) Per ogni misura di probabilità finitamente additiva p su $\mathbf{2}^n$ esiste un $\sigma \in S$ tale che $p_\sigma = p$.

Dimostrazione. (1) Notiamo che per ogni $\sigma \in S$ e $e \in \{0,1\}^n$

$$p_\sigma(e) = \sigma \cdot e = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i)e(i) = \sum_{e(i)=1} \sigma(i).$$

Poichè per ogni $\sigma \in S$ vale $0 \leq \sigma(i)$, per $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = 1$, segue $p_\sigma(\bar{1}) = \sum_{\bar{1}(i)=1} \sigma(i) = 1$. Siano e_1, e_2 due vettori di $\{0,1\}^n$ tale che $e_1 \wedge e_2 = \bar{0}$. Allora $p_\sigma(e_1 \vee e_2) = \sum_{\max\{e_1(i), e_2(i)\}=1} \sigma(i)$. Dall'altro lato

$$p_\sigma(e_1) + p_\sigma(e_2) = \sum_{e_1(i)=1} \sigma(i) + \sum_{e_2(i)=1} \sigma(i).$$

Dal momento che $e_1 \wedge e_2 = \bar{0}$ segue che, se $e_1(i) = 1$ allora $e_2(i) = 0$ e se $e_2(i) = 1$ allora $e_1(i) = 0$ e così

$$\sum_{e_1(i)=1} \sigma(i) + \sum_{e_2(i)=1} \sigma(i) = \sum_{e_1(i)=1 \text{ oppure } e_2(i)=1} \sigma(i) = \sum_{\max\{e_1(i), e_2(i)\}=1} \sigma(i).$$

Dunque p_σ è una misura di probabilità finitamente additiva su $\mathbf{2}^n$.

(2) Sia p una misura di probabilità finitamente additiva su $\mathbf{2}^n$. Notiamo che per ogni $e \in \{0,1\}^n$ $e = \sum_{i=1}^{n} a_i e(i)$ dove per $i \leq n$, a_i è un vettore canonico di $\mathbf{R}^n$. Dal fatto che p è una misura di probabilità finitamente additiva e dal fatto che per ogni $i, y \leq n$ tale che $i \neq j$, $a_i \wedge a_j = \bar{0}$ segue

$$p(e) = p(\sum_{i=1}^{n} a_i e(i)) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)e(i).$$

Sia $\sigma(i) = p(a_i)$. Allora $0 \leq \sigma_i$ e fintanto che $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \bar{1}$ segue, per addittività di p, che

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i) = p(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = p(\bar{1}) = 1.$$

Infine

$$p(e) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)e(i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i)e(i) = \sigma \cdot e = p_\sigma(e)$$

e così $p = p_s$. $\square$

Corollario 3.3.49. *Per ogni $\sigma \in S$, la funzione $h : S \to \mathbb{P}_{\mathbf{2}^n}$ definita nel seguente modo*

$$h(\sigma) = p_\sigma$$

è una biezione.

Dimostrazione. Segue dal Lemma 3.3.48. □

Per ogni $\sigma \in S$ definiamo la funzione

$$\Delta(\sigma) = (\sigma \cdot e_1, \dots, \sigma \cdot e_k) = (p_\sigma(e_1), \dots, p_\sigma(e_k)).$$

Proposizione 3.3.50. *Dati gli eventi $e_1, \dots, e_k$ di $\mathbf{2}^n$ valgono i seguenti punti:*

(1) per ogni $\sigma \in S$, $\Delta(\sigma) \in C(e_1, \dots, e_k)$.

(2) per ogni $\beta \in C(e_1, \dots, e_k)$, β è della forma $\Delta(\sigma)$ per qualche $\sigma \in S$.

Dimostrazione. (1) Dal Lemma 3.3.48 punto (1) si ha che per ogni $\sigma \in S$ $p_\sigma \in \mathbb{P}_{\mathbf{2}^n}$. Dal Teorema 3.3.36 segue che un assegnamento è coerente se e solo se è esteso da un elemento di $\mathbb{P}_{\mathbf{2}^n}$. Dunque $\Delta(\sigma) = (p_\sigma(e_1), \dots, p_\sigma(e_k))$, se pensato come un assegnamento su $e_1, \dots, e_k$, è coerente, cioè $\Delta(\sigma) \in C(e_1, \dots, e_k)$.
(2) Supponiamo che $\beta \in C(e_1, \dots, e_k)$ allora dal Teorema 3.3.36 esiste un $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{2}^n}$ che estende β. Dal Lemma 3.3.48 punto (2) esiste una $\sigma \in S$ tale che $p = p_\sigma$ e così $\beta = (p_\sigma(e_1), \dots, p_\sigma(e_k)) = \Delta(\sigma)$. □

Proposizione 3.3.51. *Per ogni $\sigma \in S$, $\Delta(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^k$.*

Dimostrazione. Per $j = 1 \dots, k$, $(\sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^k)(j) = \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i(e_j)$. Dall'altro lato, $\Delta(\sigma)(j) = \sigma \cdot e_j = \sum_{i=1}^n \sigma(i) e_j(i) = \sum_{i=1}^n \sigma(i)\pi_i(e_j)$ dove per $i \leq n$, π_i è la funzione di proiezione sulla i^{st} coordinata. Nota che il vettore $\pi_i^k = (\pi_i(e_1), \dots, \pi_i(e_k))$ appartiene a $\mathbb{V}_{\mathbf{2}^n}^k$. Dunque poniamo $\pi_i^k = v_i^k$. □

3.3.4 Teorema di Shimony-Kemeny generalizzato: il caso finito

Il teorema di Shimony-Kemeny è una versione del Dutch Book per assegnamenti strettamente coerenti. La dimostrazione qua presentata ha il vantaggio, oltre quello di valere per arbitrari insiemi finiti di eventi, di dare una caratterizzazione geometrica delle misure di probabilità regolari finitamente additive. Nella prossima sezione mostriamo come questo teorema permetta un'ulteriore generalizzazione a insiemi infiniti di eventi, previa definizione di un concetto di coerenza stretta per tali insiemi.

Teorema 3.3.52. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \{0, 1\}^n$ un insieme di eventi e sia $\beta : e_i \mapsto \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$ un assegnamento. I seguenti punti sono equivalenti:*

(1) β è strettamente coerente;

(2) esiste una misura di probabilità regolare finitamente additiva $p : \langle \mathcal{E} \rangle \to [0,1]$ che estende β.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) Dal Teorema 3.3.47 segue che $\beta \in relint(C(e_1, \ldots, e_k))$. Per il Lemma 3.3.28 esiste $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in (0,1]^n$ tale che $\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1$ e $\beta = \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^k$. Dal fatto che $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in (0,1]^n$ segue che p_σ è regolare e dalla Proposizione 3.3.51 $\Delta(\sigma) = (p_\sigma(e_1), \ldots, p_\sigma(e_k)) = \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^k = \beta$. Così β è estesa da una misura di probabilità regolare finitamente additiva.
(2) $\Rightarrow$ (1) Sia β un assegnamento su $\{e_1, \ldots, e_k\}$ e ipotizziamo che esista una misura di probabilità regolare finitamente additiva che estende β. Dal Teorema 3.3.36 segue che $\beta \in C(e_1, \ldots, e_k)$. Per il Lemma 3.3.46 (1) segue allora che β è una combinazione convessa di elementi di $\mathbb{V}_{2^n}^k$, cioè $\beta = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i^k$ per $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dal momento che β è estesa da una misura di probabilità regolare finitamente additiva p si ha che $\beta(e_i) = 0$ se e solo se $e_i = \bar{0}$ per $i = 1, \ldots, k$. Si ha dunque che $\beta = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i^k$ per $\lambda_i > 0$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ e per Lemma 3.3.28 $\beta \in relint(C(e_1, \ldots, e_k))$ e allora per Teorema 3.3.47 β è strettamente coerente. $\square$

Nella prossima sezione mostriamo come il Teorema 3.3.52 possa essere ulteriormente generalizzato. Come vedremo in dettaglio la dimostrazione di questa ulteriore generalizzazione passa attraverso l'utilizzo dei numeri iperreali.

3.3.5 Teorema di Shimony-Kemeny generalizzato: il caso infinito

In questa sezione, utilizzando il Teorema 3.3.52, generalizziamo il teorema di Shimony-Kemeny a insiemi infiniti di eventi (Teorema 3.3.56). Il primo passo per ottenere tale risultato è quello di definire un concetto più generale di coerenza stretta. Come messo in luce da Shimony in [142], e come vedremo ora in dettaglio, la definizione di tale concetto va incontro a delle difficoltà.

Teorema di Shimony-Kemeny per insiemi infiniti di eventi

Il Teorema 3.3.52 mostra come la coerenza stretta cattura le misure regolari definite su insiemi finiti di eventi. Dall'articolo [65] sappiamo sotto quali circostanze sia possibile definire una misura regolare su una algebra booleana, in particolare sappiamo che esistono algebre booleane infinite sulle quali è definita una misura regolare. Si pone dunque il problema di capire se sia possibile determinare un concetto di coerenza stretta per un insieme infinito di eventi che permetta di catturare le misure regolari definite su questo. Tale problema viene sollevato per la prima volta da Shimony in [142]. A suo avviso la possibilità di dare una definizione generale di coerenza stretta, cioè una definizione che valga tanto per algebre finite quanto per algebre infinite di eventi, va incontro ad alcuni problemi. Shimony mostra infatti due esempi che

> throw doubt on the possibility of formulating a satisfactory concept of coherence applicable to both finite and infinite sets of quantitative beliefs. ([142], p. 18)

Per ragioni di chiarezza ricordiamo che per coerenza Shimony intende ciò che qua denotiamo con il termine coerenza stretta. Ricordiamo anche che Shimony sviluppa il concetto di coerenza stretta per credenze condizionate (*conditional belief*). Poichè in questo lavoro siamo interessati alle credenze non condizionate in ciò che segue parafrasiamo gli argomenti di Shimony nell'approccio qua adottato. Utilizziamo inoltre una terminologia più in uso rispetto a quella usata in [142].
Shimony argomenta che un concetto generale di coerenza stretta deve soddisfare le seguenti restrizioni:

(a) Sia Γ un book. Se Γ è strettamente coerente in senso generale (SCG) allora per ogni insieme finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$, Γ' è strettamente coerente;

(b) Sia $\mathcal{E}$ un'algebra booleana di eventi e sia β un assegnamento su $\mathcal{E}$. Per ogni $e \in \mathcal{E}$, dove $e \neq \bot$, esiste un *numero reale* r_e tale che il book $\{(\beta(e), r_e)\}_{e\in\mathcal{E}}$ è SCG.

Le richieste (a) e (b) sono molto ragionevoli e concordiamo con Shimony quando sostiene che

> it is difficult to see how an intuitively satisfactory and fruitful concept of coherence could be formulate which did not satisfy both (a) and (b). ([142], p. 19)

In [142] Shimony presenta due esempi che mostrano la difficoltà di trovare un concetto generale di coerenza stretta che soddisfi contemporaneamente le richieste (a) e (b).
In accordo con il primo esempio sia $\mathcal{E}$ un'algebra booleana di eventi non-denumerabile tale che: (i) un evento di $\mathcal{E}$ si verificherà con certezza e (ii) per ogni $e_i, e_j \in \mathcal{E}$ se $i \neq j$ allora $e_i \wedge e_j = \bot$, dove $\bot$ è il minimo elemento dell'algebra. Denotiamo con D l'insieme di tutte le disgiunzioni finite di membri di $\mathcal{E}$. Notiamo che $\mathcal{E} \subseteq D$. Supponiamo che le condizioni (a) e (b) siano soddisfatte. Per ogni $d \in D$, in accordo con (b), esiste un numero reale positivo r_d tale che il book $\{(\beta(d), r_d)\}_{d\in D}$ è SCG e così, data la condizione (a), il singoletto $\{(\beta(d), r_d)\}$ è strettamente coerente. Dal fatto che $d \neq \bot$ segue, dal Teorema 3.3.52, $\beta(d) > 0$. Fintanto che $\mathcal{E}$ è non-denumerabile esiste un $\epsilon > 0$ e un sottoinsieme infinito $\mathcal{E}'$ di $\mathcal{E}$ tale che per ogni $e \in \mathcal{E}'$ $\beta(e) > \epsilon$ e $\beta(e) \in \{\beta(d) : (\beta(d), r_d)\}_{d\in D}$. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sottoinsieme di $\mathcal{E}'$ tale che $n > 1/\epsilon$. Il book $\Gamma = \{(\beta(e_i), r_{e_i})_{i=1}^{n}, (\beta(\bigvee_{i=1}^{n} e_i), r_{e_{\bigvee_{i=1}^{n}}})\}$ è un sottoinsieme di

D e così dalla condizione (a) è strettamente coerente e allora, per il Teorema 3.3.52, segue che

$$r_{e_{\bigvee_{i=1}^{n}}} = \sum_{i=1}^{n} r_{e_i} > n\epsilon > 1.$$

Così, dal Teorema 3.3.52, segue che il book $\{(\beta(\bigvee_{i=1}^{n} e_i), r_{e_{\bigvee_{i=1}^{n}}})\}$ non è strettamente coerente; contraddizione per condizione (a).
Inoltre, tramite un secondo esempio, Shimony mostra che il problema della definizione di un concetto di coerenza stretta che soddisfi contemporaneamente le richieste (a) e (b) è presente anche per insiemi di eventi numerabili. Sia $\mathcal{E}$ un'algebra booleana numerabile di eventi tale che le condizioni (i) e (ii) del precedente esempio siano soddisfatte. Usando un argomento simile a quello visto prima, è possibile inferire che il book $\{(\beta(e), r_e)_{e\in\mathcal{E}}\}$ è coerente solo se la somma $\sum_{e\in\mathcal{E}} \beta(e)$ converge a 1. Come puntualizzato da Shimony: uguale credenza in tutti gli eventi di $\mathcal{E}$ conduce a incoerenza stretta, e dunque, tale credenza è da considerarsi irrazionale. Ma considerare una persona irrazionale perchè ha uguale credenza in un numero numerabile di eventi sembra controintuitivo. Dati questi due esempi Shimony conclude che:

> a generalized concept of coherence satisfying (a) and (b) seems to be impossible. ([142], p. 19)

Analizzando gli esempi ora presentati sembra che il problema dell'impossibilità di definire una concetto generale di coerenza stretta sia legato all'assunzione (ii). Notiamo infatti come questa impedisca la possibilità di definire una misura regolare sulle algebre booleane $\mathcal{E}$ dei precedenti esempi. Al fine di chiarificare quanto ora detto, diamo la seguente:

Definizione 3.3.53 (Kelley [65]). *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra booleana e sia $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ una n-upla di suoi elementi. Sia inoltre $N(\langle b_1, \ldots, b_n\rangle)$ il numero massimo k per il quale esistono $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ tali che $1 \leq i_1, < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ e $b_{i_1} \wedge b_{i_2} \wedge \ldots \wedge b_{i_k} \neq$ **0**. Il* numero di intersezione *di di un sottoinsieme B dell'insieme sostegno di $\mathcal{B}$, formalmente $Int(B)$, è definito come $inf\{(1/n)N(\langle b_1, \ldots, b_n\rangle)\}$ dove l'infimo è preso su tutte le sequenze finite di elementi in B.*

Data la condizione (ii), per ogni sottoinsieme $\mathcal{E}'$ di $\mathcal{E}$, $Int(\mathcal{E}') = 0$. Ma allora, per il prossimo teorema, non esiste nessuna misura regolare definita su $\mathcal{E}$.

Teorema 3.3.54 (Kelley [65]). *Data un'algebra booleana $\mathcal{B}$, esiste una misura regolare su $\mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{B}\setminus\{\mathbf{0}\}$ è l'unione di un numero contabile di classi $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ tali che, per ogni i, $Int(B_i) > 0$.*

Dimostrazione. Vedi [65]. □

Sebbene a causa della condizione (ii) non sia possibile definire un concetto generale di coerenza stretta che valga per tutti gli insiemi infiniti di eventi, è tuttavia possibile, come mostreremo nella prossima sezione, definire un concetto di coerenza stretta per insiemi infiniti di eventi che soddisfi le condizioni (a) e (b). Per quanto la definizione che presenteremo non supera i problemi sollevati dagli esempi dati da Shimony, questa risulta essere una generalizzazione molto naturale del concetto di coerenza stretta tramite la quale si rende possibile generalizzare il Teorema di Shimony-Kemeny ad insiemi infiniti di eventi.

Coerenza stretta per book infiniti

Dal momento che in questa sezione lavoriamo con insiemi infiniti di eventi e per tale ragione non possiamo definire l'insieme degli atomi come fatto nella sezione 3.3.3, non adotteremo la convenzione di identificare gli eventi con vettori di $\{0,1\}^n$ per qualche intero positivo n. Iniziamo dal definire un concetto di coerenza stretta per insiemi infiniti di eventi.

Definizione 3.3.55. *Sia $\mathcal{E}$ un insieme infinito di eventi. Un assegnamento $\beta : \mathcal{E} \to [0,1]$ è detto essere* strettamente coerente *se β è strettamente coerente per ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{E}$.*

La definizione ora data è una generalizzazione molto naturale del concetto di coerenza stretta, la quale permette di soddisfare la condizione (a) e, come vedremo nel prossimo teorema, la condizione (b), presentate nella sottosezione 3.3.5. Sebbene la Definizione 3.3.55 si riduce a book finiti si lascia aperto il problema dell'interpretazione di scommesse infinite. Nonostante ciò il risultato che segue è interessante in quanto risponde parzialmente al problema lasciato aperto da Shimony in [142] e presentato nella sezione 3.3.5, problema il cui interesse è ribadito ad esempio da Rudolf Carnap e Richard C. Jeffrey in [18].

Teorema 3.3.56. *Sia $\mathcal{E}$ un insieme infinito di eventi e sia β un assegnamento su $\mathcal{E}$. I seguenti punti sono equivalenti:*

1. *β è strettamente coerente,*
2. *esiste una misura di probabilità regolare $p : \langle\mathcal{E}\rangle \to [0,1]^*$ che estende β. In particolare, per ogni $e \in \mathcal{E}$, $p(e) = \beta(e) \in [0,1]$.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Sia β strettamente coerente. Per ogni sottoinsieme finito X di $\mathcal{E}$, sia β_X la restrizione di β a X e sia p_X una misura di probabilità regolare su $\langle X\rangle$ che estende β_X come assicurato dal Teorema 3.3.52.
Sia $Fin(\mathcal{E}) = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ la classe di tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathcal{E}$. Per ogni $X \in Fin(\mathcal{E})$ sia

$$\Delta_X = \{Z \in Fin(\mathcal{E}) \mid X \subseteq Z\}.$$

Infine sia $\Delta = \{\Delta_X \mid X \in Fin(\mathcal{E})\}$. Dato che Δ ha la proprietà dell'intersezione finita (vedi [118] Teorema 4.2) segue, dai Teoremi 3.3.42 e 3.3.43, che esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}_\Delta$ che lo estende. Sia dunque $[0,1]^* = ([0,1]^{Fin(\mathcal{E})})/\mathcal{U}_\Delta$ e

$$M = \prod_{X \in Fin(\mathcal{E})} \langle X \rangle / \mathcal{U}_\Delta.$$

Sia $p^* : M \to [0,1]^*$ la funzione definita nel seguente modo: per ogni $X_i \in Fin(\mathcal{E})$ e $e_{j_i} \in \langle X_i \rangle$,

$$p^*(\langle e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots \rangle_{\mathcal{U}_\Delta}) = \langle p_{X_1}(e_{j_1}), p_{X_2}(e_{j_2}), \ldots \rangle_{\mathcal{U}_\Delta}.$$

Claim 1. $p^* : M \to [0,1]^*$ *è una funzione normalizzata, finitamente additiva e regolare.*

Dimostrazione. (Claim1 1). Mostriamo la regolarità dato che la prova delle altre proprietà è simile. Sia $E \in M \setminus \{\bot\}$, allora $\{X \in Fin(\mathcal{E}) \mid E_X > \bot\} \in \mathcal{U}_\Delta$ e quindi, poichè ogni p_X è regolare, $\{X \in Fin(\mathcal{E}) \mid p_X(E_X) > 0\}$ da cui segue che

$$p(E)^* = \langle p_{X_1}(E_{X_1}), p_{X_2}(E_{X_2}), \ldots \rangle_{\mathcal{U}_\Delta} > \langle 0, 0, \ldots \rangle_{\mathcal{U}_\Delta} = 0 \in [0,1]^*.$$

□

Identifichiamo gli elementi di $\mathcal{E}$ in M nel seguente modo: per ogni $e \in \mathcal{E}$ sia

$$\Delta_{\{e\}} = \{X \in Fin(\mathcal{E}) \mid e \in X\} = \{X \in Fin(\mathcal{E}) \mid \{e\} \subseteq X\}$$

e sia $\hat{e}$ un elemento di M tale che, per ogni $X \in \Delta_{\{e\}}$, $\hat{e}_X = e$. Ovviamente, fintanto $\Delta_{\{e\}} \in \mathcal{U}_\Delta$, segue che $\hat{e}$ è determinato unicamente in M e quindi è ben definito.

Claim 2. *Sia $\langle \mathcal{E} \rangle$ l'algebra booleana generata dagli elementi di $\mathcal{E}$. Allora la funzione $\lambda : \varphi \in \mathcal{E} \to \hat{\varphi} \in M$ è estendibile da un'immersione di $\langle \mathcal{E} \rangle$ in M.*

Dimostrazione. (Claim 2). Al fine di provare il claim 2 dobbiamo mostrare che la funzione λ è iniettiva poichè in tal caso $\langle \mathcal{E} \rangle$ sarà isomorfa alla sotto algebra di M generata da $\lambda[\langle \mathcal{E} \rangle]$, dove con $\lambda[\langle \mathcal{E} \rangle]$ indichiamo l'immagine di $\langle \mathcal{E} \rangle$ secondo λ.

Siano dunque $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ tale che $e_1 \neq e_2$. Dobbiamo mostrare che $\{X \in Fin(\mathcal{E}) \mid e_{1X} \neq e_{2X}\} \in \mathcal{U}_\Delta$ ma questo è ovvio dalla definizione di $\hat{e_1}$ e $\hat{e_2}$. Infatti, $\Delta_{\{e_1\}}, \Delta_{\{e_2\}} \in \mathcal{U}_\Delta$, $\Delta_{\{e_1\}} \neq \Delta_{\{e_2\}}$ e $\Delta_{\{e_1\}} \cap \Delta_{\{e_2\}} \in \mathcal{U}_\Delta$ fintanto gli ultrafiltri sono chiusi sotto intersezione (nota che $\Delta_{\{e_1\}} \cap \Delta_{\{e_2\}} \neq \emptyset$ perchè banalmente $\{\{e_1\}, \{e_2\}\} \in \Delta_{\{e_1\}} \cap \Delta_{\{e_2\}}$). Inoltre, per ogni $Y \in \Delta_{\{e_1\}} \cap \Delta_{\{e_2\}}$, $\hat{e_1}_Y = e_1 \neq e_2 = \hat{e_2}_Y$. □

Torniamo ora alla dimostrazione del Teorema 3.3.56. Identificata $\langle \mathcal{E} \rangle$ con la sua immagine isomorfa secondo λ in M, sia $p : \langle \mathcal{E} \rangle \to [0,1]^*$ la restrizione di p^* a $\lambda[\langle \mathcal{E} \rangle]$. Rimane dunque da mostrare che p estende β. Sia dunque $e \in \mathcal{E}$. Allora, $p(e) = p^*(\hat{e}) = \langle p_{X_1}(\hat{e}_{X_1}), p_{X_2}(\hat{e}_{X_2}), \ldots \rangle_{\mathcal{U}_\Delta}$. In particolare, per ogni $X \in \Delta_{\{e\}}$,

$p_X(\hat{e}_X) = p_X(e) = \beta(e)$ e dunque $p(e) = \beta(e)$ (dove l'uguaglianza è nel senso di $\mathcal{U}_\Delta$). In particolare per ogni $e \in \mathcal{E}$ $p(e) \in [0, 1]$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Segue immediatamente dalla Definizione 3.3.55 e dal Teorema 3.3.52. $\square$

Il Teorema 3.3.56 da quindi una generalizzazione del teorema di Shimony-Kemeny per insiemi di eventi infiniti. Notiamo come, sebbene il teorema faccia riferimento a probabilità non standard, la misura strettamente coerente definita su $\mathcal{E}$ soddisfa, oltre che la condizione (a), anche la condizione (b) introdotta nella sottosezione 3.3.5.

3.4 Conclusioni

Muovendo dal presupposto che esistono valori, come ad esempio la vita umana, che valgono "più di ogni altro capitale" ([100], p. 17), Magari sviluppa una teoria della decisione in cui trattare gli eventi HILP. La proposta di Magari permette infatti, grazie all'introduzione dei campi non archimedei, di rendere conto di situazioni in cui a un valore inestimabile viene associata una piccola (o nulla) probabilità di realizzazione. Se da un lato l'utilità non archimedea permette di associare utilità infinita ad un evento cui è collegato un valore inestimabile, dall'altro, la probabiltà non standard, introducendo l'assioma di regolarità, impedisce di associare a tale evento probabilità zero. Per Magari il principio di regolarità permette di eliminare l'indifferenza spesso giustificata in virtù della "difficoltà di giudizio dovuta alla piccolezza di certe probabilità" ([100], p. 17).

> È improbabile che il mio voto influisca sull'esito delle elezioni, quindi non voto; è improbabile che le mie parole e i miei gesti abbiano un influsso rilevabile sulla storia, quindi mi astengo dal far politica, e via dicendo. Questi erronei atteggiamenti possono portare perfino all'angoscia e alla disperazione o almeno ad un bizzarro senso di impotenza che toglie motivazione a molti contemporanei. ([100], p. 17)

Come abbiamo più volte ricordato, le motivazioni che spinsero Magari a introdurre il principio di regolarità in teoria della decisione si basano su ragioni morali. Ci sono infatti situazioni, segnatamente quelle in cui sono presenti eventi HILP, in cui un atteggiamento teso a sostenere un principio di "open mindedness" sembra non solo legittimo ma moralmente auspicabile. Nel momento in cui consideriamo la probabilità come guida del pensare e dell'agire, assumere la regolarità, almeno da un punto di visto normativo, permette di non fare l'errore di considerare impossibile un evento possibile, e dunque, forza a considerare tutte le eventuali conseguenze di un dato evento, anche nel momento in cui la probabilità di realizzazione di questo è stimata arbitrariamente vicina a zero.

In ambito decisionale la regolarità permette inoltre di conciliare la teoria dell'utilità attesa con il principio di dominanza. Dal momento che ogni evento possibile ha misura positiva, non potranno verificarsi casi come quello seguente. Dato un evento e a zero probabilità, sia A un agente cui viene chiesto di scegliere tra le seguenti opzioni:

(I) se si verifica e, ottieni un milione di euro, altrimenti non ottieni niente;

(II) non ottieni niente con certezza.

Sotto l'ipotesi che A agisca seguendo la regola della massimizzazione dell'utilità attesa, dal momento che tale valore è zero per entrambe le situazioni, questo si trova in una condizione di stallo non sapendo quale opzione scegliere. Diversamente usando il principio di dominanza l'agente A sceglierà l'opzione (I) in quanto l'utilità di questa è molto maggiore rispetto a quella di (II). Nel momento in cui utilizziamo il principio di regolarità la difficoltà qua presentata scompare: in entrambi i casi l'agente A sceglie l'opzione (I). Poiché l'utilità di ottenere un milione di euro è molto maggiore rispetto a quella di non ottenere niente, si vede facilmente come associando probabilità positiva ad e l'utilità attesa dell'opzione (I) sarà maggiore rispetto a quella dell'opzione (II).

Sebbene la teoria della probabilità non standard ha il vantaggio di introdurre in modo molto naturale il principio di regolarità, di contro, questa, diversamente dalla teoria standard, ha lo svantaggio di essere poco studiata e sviluppata. In questo capitolo abbiamo visto come un modo alternativo per garantire la regolarità passa attraverso la proprietà di coerenza stretta. Generalizzando il teorema di Shimony-Kemeny ad insiemi finiti arbitrati di eventi, abbiamo infatti mostrato come, nel caso di insiemi finiti di eventi, il concetto di coerenza stretta caratterizzi l'assioma di regolarità. Abbiamo inoltre mostrato come, previa generalizzazione del concetto di coerenza stretta, tale risultato valga anche per insiemi infiniti di eventi. Abbiamo infine notato che il concetto da noi introdotto soddisfa — nel caso in cui l'insieme di eventi considerato non rispetti la condizione (ii) introdotta da Shimony negli esempi da noi presentati nella sottosezione 3.3.5 — quelle proprietà, poste da Shimony in [142], che ogni definizione generale di coerenza stretta dovrebbe soddisfare.

Bibliografia

[1] C.D. Aliprantis e K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer, 2006.

[2] J. Amidei e D. Pianigiani, *Natura empirica della metamatematica: la filosofia della matematica di Roberto Magari*, Matematica, Cultura e società – Rivista dell'Unione matematica Italiana, Serie I, Vol. I, Aprile 2016, pp. 1-15.

[3] J. Amidei, D. Pianigiani, L. San Mauro, G. Simi e A. Sorbi, *Trial and error mathematics I: Dialectical and quasidialectical systems*, The review of symbolic logic, Volume 9, Number 2, Giugno 2016, pp. 299-324.

[4] J. Amidei, D. Pianigiani, L. San Mauro e A. Sorbi, *Trial and error mathematics II: Dialectical sets and quasidialectical sets, their degrees, and their distribution within the class of limit sets*, to appear in The review of symbolic logic.

[5] J. Amidei, U. Andrews, D. Pianigiani, L. San Mauro e A. Sorbi, *Quasidialectical systems and completions of theories*, in preparazione, 2016.

[6] D. Angluin e C.H. Smith, in *Inductive inference: Theory and methods*, *ACM Comput. Surv.*, vol.15, n. 3, 1983, pp. 237-269.

[7] S. N. Artemov e L. Beklemishev, *Provability logic*, in Handbook of Philosophical Logic (a cura di) D. Gabbay and F. Guenthner, Springer, vol. 13, 2005, pp. 189-360.

[8] C. J. Ash e J.Knight, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, volume 144 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier, Amsterdam, 2000.

[9] S. R. Arpaia, *On Magari's concept of general calculus: notes on the history of Tarski's methodology of deductive sciences*, History and Philosophy of Logic, vol. 27, n.1, 2006, pp. 9-41.

[10] C. Bernardi, *Aspetti ricorsivi degli insiemi dialettici*, in *Bollettino della Unione Matematica Italiana. Series IV*, vol.9, 1974, pp. 51–61.

[11] V. Benci e M. Di Nasso, *Alpha-theory: an elementary axiomatics for nonstandard analysis*, Expo. Math. 21, 2003, pp. 355-386.

[12] V. Benci, L. Horsten e S. Wenmackers, *Non-Archimedean Probability*, Milan Journal of Mathematics 81 (1), 2013, 121-151.

[13] K.C. Border, *Separating Hyperplane Theorems*, http://people.hss.caltech.edu/~kcb/Notes/SeparatingHyperplane.pdf.

[14] F. Brentano, *Philosophical Investigations on Time, Space and the Continuum*, Routledge, 2010.

[15] R. Bruni, *Riflessioni sull'incompletezza. I teoremi di Gödel tra logica e filosofia*, Tesi di dottorato, Università di Firenze, 2004.

[16] S. Burris e H.P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Springer, Heidelberg, 1980.

[17] Rudolf Carnap, *Logical Foundations of Probability*, University of Chicago Press, 1962.

[18] R. Carnap e R. C. Jeffrey, Studies in Inductive Logic and Probability, University of California Press, Volume I, 1971.

[19] C. Cellucci, *The growth of mathematical knowledge: An open world view*, in E. Grosholz, H. Breger (a cura di), The Growth of Mathematical Knowledge, 2000, pp. 153–176

[20] Centre for Climate Change Economics and Policy, *High impact, low probability? An empirical analysis of risk in the economics of climate change*, http://www.cccep.ac.uk/wp-content/uploads/2015/10/WorkingPaper9.pdf

[21] C. C. Chang e J. Keisler, *Model Theory*, North Holland, 1973.

[22] J. S. Chipman, *The foudations of utility*, Econometrica, Vol 28, 2, 1960, pp. 193-224.

[23] J. S. Chipman, *On the lexicographic representation of preference orderings*, in J.S. Chipman et al. (eds.) Preference, Utility, and Demand, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971, pp. 276-288.

[24] J. S. Chipman, *Non-Archimedean Behavior under risk: an elementary analysis– with application to the theory of assets*, in J.S. Chipman et al. (a cura di) Preference, Utility, and Demand, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971, pp. 289-318.

[25] G. Coletti e R. Scozzafava, *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[26] S. B. Cooper, *Computability Theory*, Boca Raton, London, New-York,Washington, DC: Chapman & Hall/CRC Mathematics, 2003.

[27] B. J. Copeland e O. Shagrir, *Turing versus Gödel on computability and the mind*, In C. J. Pozy B. J. Copeland and O. Shagrir, editors, *Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond*, pages 1-33, Cambridge, MA, MIT Press, 2013.

[28] H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, New York, McGrow Hills, 1963.

[29] B. de Finetti, *Sul significato soggettivo della probabilità*, Fundamenta Mathematicae, Warszawa, 1931, T. XVII, pp. 298-329.

[30] B. de Finetti, *Les Probabilités Nulles*, Bulettin de Sciences Mathématiques, Paris, 1936, pp. 275-288.

[31] B. de Finetti, *Teoria della probabilità*, Giulio Einaudi editore, 1970.

[32] P. Du Bois-Reymond, *Die allegemeine functionentheorie 1. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function*, Tübingen: H. Laupp, 1882. *Théorie générale des fonctions*; traduit de l'allemand en français par G. Millaud et A. Girot, Imprimerie niçoise, Nice, 1887.

[33] Yu. L. Ershov, *A hierarchy of sets, I*, Algebra i Logika, 7(1):47–74, January–February, English Translation, Consultants Bureau, New York, 1968, pp. 25–43.

[34] Yu. L. Ershov, *A hierarchy of sets, II*, Algebra i Logika, 7(4):15–47, July–August, English Translation, Consultants Bureau, New York, 1968, pp. 212–232.

[35] Yu. L. Ershov, *A hierarchy of sets, III*, Algebra i Logika, 9(1):34–51, January–February, English Translation, Consultants Bureau, New York, 1970, pp. 20–31.

[36] W.B. Ewald, *From Kant to Hilbert*, vol. 2, Oxford University Press, 2005.

[37] S. Feferman, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, Fund. Math., vol. 49, 1960.

[38] S. Feferman, *The Logic of Mathematical Discovery vs. the Logical Structure of Mathematics*, in Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, 1978, pp. 309-327.

[39] S. Feferman, *Mathematical intuition vs. mathematical monsters*, Syntese, vol. 125, n. 3, 2000, pp. 317-332.

[40] P.C. Fishburn, *On the foundations of game theory: The case of non-Archimedean utilities*, International Journal of Game Theory 1 (2), 1971, pp. 65-71.

[41] P.C. Fishburn e I.H. Lavalle, *Nonstandard nontransitive utility on mixture sets*, Mathematical Social Sciences 21 (3), 1991, pp. 233-244.

[42] T. Flaminio, H. Hosny, F. Montagna ....

[43] S. Givant e P. Halmos, Introduction to Boolean Algebras, *Springer Science+Business Media* 2009.

[44] G. Gnani, *Insiemi dialettici generalizzati*, Matematiche, XXIX, n. 2, 1974, pp. 1-11.

[45] I. J. Good, *Probability and the weight of evidence* London: Charles Griffin: New York: Hafners, 1950.

[46] K. Gödel, *Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes*, Dialectica, vol. 12, 1958, pp. 280-28.

[47] K. Gödel, *On an extension of finitary mathematics which has not yet been used* (revised version of ([46])), *Collected Works*, Volume II, 1972.

[48] E. M. Gold, *Limiting Recursion*, J. Symbolic Logic, vol. 30, 1965, pp. 28-48.

[49] Government Office for Science, S. Wenmackers, Blackett Review of High Impact Low Probability Risks, https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/278526/12-519-blackett-review-high-impact-low-probability-risks.pdf

[50] Alan Hájek, *Is Strict Coherence Coherent?*, *dialectica* Vol. 66, N. 3, 2012, pp. 411–424.

[51] Alan Hájek, *Staying Regular?*, http://hplms.berkeley.edu/HajekStayingRegular.pdf.

[52] P. J. Hammond, *Elementary non-Archimedean representations of probability for decision theory and games*, in P. Humphreys (Ed.), Patrick Suppes: Scientific Philosopher; Volume 1, Dordrecht, Netherlands, Kluwer, 1994, pp 25-49.

[53] P. J. Hammond, *Non-Archimedean Subjective Probabilities in Decision Theory and Games*, Mathematical Social Sciences,Volume 38, Issue 2, September, 1999, pp. 139–156.

[54] M. Hausner, *Multidimensional utilities*, in Thrall, R.M., Coombs, C.H. (Eds.), Decision Processes. John Wiley & Sons, New York, NY, 1954, pp. 167-180.

[55] F. Herzberg, *Elementary non-Archimedean utility theory*, Mathematical Social Sciences Volume 58, Issue 1, 2009, pp. 8-14.

[56] F.S. Herzberg, *Stochastic Calculus with Infinitesimals*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[57] D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, Könisberg (1930), trad. ingl. *Logic and Knowledge of Nature*, in *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (a c. di W. B. Ewald), Oxford University Press, 1996.

[58] C. G. Jockusch, Jr, Π^0_1 *classes and Boolean combinations of recursively enumerable sets*, The Journal of Symbolic Logic, 39(1):95–96, 1974.

[59] Y. Kannai, *Non-standard concave utility functions*, Journal of Mathematical Economics 21 (1), 1992, pp 51-58.

[60] P. Halmos, Algebraic Logic, Chelsea, New York, 1962.

[61] D.J. Hand, *The Improbability Principle: Why Coincidences, Miracles, and Rare Events Happen Every Day*, Scientific Amer Books, 2014.

[62] H. Hosni e S. Marmi, *La matematica, il ragionamento dell'incerto e la discrezionalità*, in Le gare pubbliche: il futuro di un modello, (a cura di) Gian Domenico Comporti, pp. 27-40, Editoria scientifica Napoli, 2011.

[63] T. Hofweber, Cardinality arguments against regular probability measures, *Thought: A Journal of Philosophy* Volume 3, Issue 2, 2014, pp. 166–175.

[64] R. Jeroslow, *Experimental Logics and* Δ^0_2*-Theories*, Journal of Philosophical Logic, vol.4, n.3, 1975, pp. 253-267.

[65] J. L. Kelley, Measures in Boolean algebras, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 9, No. 4, 1959, pp 1165-1177.

[66] K. Kelly, *The Logic of Reliable Inquiry*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[67] J. G. Kemeny, Fair bets and inductive probabilities, *The Journal of Symbolic logic*, Vol. 20, No.3, 1955, pp. 263-273.

[68] P. Kitcher, *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, New York, 1983.

[69] S. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Nort-Holland, 1952.

[70] G. Kreisel, *Informal rigour and completeness proofs*, in *Problems in the Philosophy of Mathematics* (a c. di I. Lakatos, New York, Humanities Press, 1967, pp. 138-186.

[71] G. Kreisel, *Which Number Theoretic Problems can be Solved in Recursive Progressions on Π^1_1-Paths Through O*, in The Journal of Symbolic Logic, Vol. 37, 1972, n. 2.

[72] D. M. Kreps, *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press, Inc. 1988.

[73] P. Kugel, *Thinking may be more than computing*, *Cognition*, vol. 32, 1986, pp.137-198.

[74] P. Kugel, *When is a computer not a computer?*, *Cognition*, vol. 23, pp. 89-94.

[75] I. Lakatos, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*, *British J. Philos. Sci.*, vol. 27, n. 3, 1976, pp. 201–223.

[76] I. Lakatos. *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[77] B. Lee, F. Preston e G. Green, Preparing for High-impact, Low-probability Events: Lessons from Eyjafjallajökull, A Chatham House Report, Gennaio 2012.

[78] D. Lehmann, *Expected qualitative utility maximization*, Games and Economic Behaviour 35 (1–2), 2001, pp. 54-79.

[79] K. Gödel, *La prova matematica dell'esistenza di Dio*, (a cura di) G. Lolli e P. Odifreddi, Bollati Boringhieri, 2006.

[80] S. Leonesi e C. Toffalori, *L'arte di uccidere i draghi*, Università Bocconi, Milano 2013.

[81] David Lewis, *Philosophical Papers*, Volume II, Oxford University Press, 1986.

[82] P. Linström, *Penrose's new argument*, in Journal of Philosophical Logic, vol. 30, n.3, 2001, pp.241-250.

[83] G. Lolli, *Filosofia della Matematica: l'eredità del Novecento*, 2002, Il Mulino.

[84] J. R. Lucas, *Minds, Machines and Gödel*, Philosophy, vol. 36, 1961, pp. 112-127.

[85] R. Magari, *Su una classe di simboli atta a rappresentare gli elementi di un piano grafico e su in teorema di riduzione a forma normale*, Rendic. della classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. 33, n. 1-2, pp. 1962, 37-44.

[86] R. Magari, *Calcoli generali e spazi V_α (Calcoli generali I)*, Le Matematiche, vol. 21, 1966, pp. 83-108.

[87] R. Magari, *Lettera a Giuliano Toraldo di Francia*, in Paolo Pagli, *Roberto Magari; Una mente algebrica*, Quattro venti, 2000, pp. 201-205.

[88] R. Magari, *Su certe teorie non enumerabili (Sulle limitazione dei sistemi formali, I)*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), Vol. XCVIII, 1974, pp. 119-152.

[89] R. Magari, *Significato e verità nell'aritmetica peaniana*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), Vol. CIII, 1975, pp. 343-368.

[90] R. Magari, *Une proposition pour dépasser les limitations des formalismes*, Bulletin d'information de la societé Française de Logique, Methodologie et Philosphie des Sciences, n. 7, 1979.

[91] R. Magari, *Natura empirica della metamatematica*, Technical report n. 35, Istituto di Matematica, Università di Siena, 1980.

[92] R. Magari, *Finitismo e creatività*, Il Dubbio; rivista di opinioni neoilluministe, Anno I, Marzo-Giugno, 1980 (n.2/3) pp. 42-45 (poi in *Sapere*, Maggio 1986, pp. 35-38).

[93] R. Magari (1982), *In difesa del concetto di progresso*, Il Dubbio, n. 3, pp. pp. 62-68.

[94] R. Magari, *Tavola rotonda sul tema: I fondamenti della matematica oggi. Intervento di Roberto Magari*, Atti degli incontri di Logica Matematica, volume 2, pp. 293- 295.

[95] R. Magari, *La fortuna della matematica*, Malvagia; trimestrale della cultura sommersa, Anno III, Ottobre, 1983 (n.3) pp. 8-17.

[96] R. Magari, *Intervento di Roberto Magari*, in *Atti degli incontri di logica matematica Volume 2*, (a cura di) Claudio Bernardi e Paolo Pagli, pp. 293-295.

[97] R. Magari (1983), *Verità non tarskiana nelle algebre diagonalizzabili*, Bollettino UMI, vol. 6, n. 2B, pp. 739-758.

[98] R. Magari, *Morale, metafisiche e campi non Archimedei*, Il Dubbio; rivista di opinioni neoilluministe, Anno IV, 1984 (n.2/3) pp. 69-73.

[99] R. Magari, *The success of Mathematics*, Synthèse, Vol. 62, n. 2, pp. 1985, 265-274.

[100] R. Magari, *Aritmetica e geometria*, Sapere, Luglio 1986, pp. 43-45.

[101] R. Magari, *La macchina di Turing e i suoi eredi: Una preliminare spiegazione dei problemi di fondo dell'intelligenza artificiale così come ce li presenta la teoria delle funzioni ricorsive*, Sapere, Luglio 1986, pp. 43-45.

[102] R. Magari, *Morale e metamorale: un approccio probabilistico ai problemi morali*, CLUEB Bologna, 1986.

[103] R. Magari, *Un paradosso: Siamo più bravi del previsto?*, Notizie di logica, Anno V, (n.3) luglio-Settembre 1986, pp. 13-18.

[104] R. Magari, *Osservazioni sulla creatività*, Sapere, Ottobre 1986.

[105] R. Magari, *I razionalisti e la matematica*, Sapere, Giugno 1986, pp. 29-31.

[106] R. Magari, *Numeri, Caso e Sequenze*, Le Scienza quaderni; numeri, caso e sequenze a cura di Roberto Magari, 1988, pp. 3-6.

[107] R. Magari, *Logica e teofilia. Osservazioni su una dimostrazione attribuita a Kurt Gödel*, Notizie di Logica, vol. 7, n. 4, 1988.

[108] R. Magari, *Scacchi e probabilità*, Atti del convegno "Matematica e scacchi. L'uso del gioco degli scacchi nella didattica della matematica.", Forlì 18 settembre 1992.

[109] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena.* R. Magari, *Introduzione alle strutture matematiche*, 1993, inedito.

[110] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*, Carteggio Magari-Kreisel, inedito.

[111] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*, Carteggio Magari-Jeroslow, inedito.

[112] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena.* R. Magari, *Assiomi*, inedito.

[113] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena.* R. Magari, 1968, *Strutture e rappresentazione*, inedito.

[114] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena.* R. Magari, *Matematica pura ed applicata*, 197?, inedito.

[115] P. Mancosu The Philosophy of Mathematical Practice. Oxford: Oxford University 6 Press, 2008.

[116] T. Mikolov, A. Joulin e M. Baroni, *A Roadmap towards Machine Intelligence*, http://arxiv.org/pdf/1511.08130v2.pdf.

[117] F. Montagna, G. Simi, e A. Sorbi, *Logic and probabilistic systems*, Arch. Math. Log., vol. 35, n.4, 1996, pp. 225–261.

[118] F. Montagna, M. Fedel e G. Scianna, Non-standard probability, coherence and conditional probability on many-valued events. *International Journal of Approximate Reasoning* 54, 573-589, 2013.

[119] L. Narens, *Minimal Conditions for Additive Conjoint Measurement and Qualitive Probabilty*, Journal of Mathematical Psychology 11, 1974, pp. 404-430.

[120] L. Narens, *Theories of Probability. An Examination of logical and Qualitative Foundations.*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

[121] E. Nelson, *Radically elementary probability theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 117. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.

[122] A. Nies, *Computability and Randomness*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

[123] T. Ord, R. Hillerbrand e A. Sandberg, Probing the Improbable: Methodological Challenges for Risks with Low Probabilities and High Stakes, Journal of Risk Research, 13(2), pp. 191-205, 2010.

[124] D. N. Osherson, M. Stob, e S. Weinstein, *A Universal Inductive Inference Machine*, J. Symbolic Logic, vol. 56, n. 2, 1991, pp. 661-672.

[125] S. Ospichev, *Friedberg numberings in the Ershov hierarchy*, Algebra and Logic, 54(4):283–295, September, 2015.

[126] P. Pagli, *Roberto Magari; Una mente algebrica*, Quattro venti, 2000.

[127] J.B. Paris, *A note on the Dutch Book method*, http://www.maths.manchester.ac.uk/~jeff/papers/15.ps.

[128] R. Penrose, The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics, Oxford University Press, 1989.

[129] H. Poincaré, *Mathematical creation*, The Monist, Vol. 20, n. 3, 1910, pp. 321-335.

[130] K. Popper, The Logic of Scientific Discovery, Basic Books; reprint edition 1992, Routledge.

[131] H. Putnam, *Trial and error predicates and the solution of a problem of Mostowski*. J. Symbolic Logic, vol. 30, 1965, pp. 49-57.

[132] H. Putnam, *Mathematics without Foundations*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 64, n., 1967.

[133] H. Putnam, *What is Mathematical Truth?*, in Mathematics, Matter and Method, Cambridge University Press, 1975.

[134] A. R. Pruss, Probability, Regularity, and Cardinality, *Philosophy of Science* Vol. 80, No. 2, Aprile 2013, pp. 231-240.

[135] A. R. Pruss, Infinitesimals are too small for countably inifite fair lotteries, *Synthese* 191 (6), 2014, pp. 1051-1057.

[136] H. Rogers, Jr, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, New York, 1967.

[137] L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*, Willey, New York, 1954.

[138] M. Schirn e K. G. Niebergal, *Hilbert's finitism and the notion of infinity*, in *The Philosophy of Mathematics Today* (a cura di) M. Schirn, Oxford University Press, 2005.

[139] J. H. Schmerl, *Undecidable theories and reverse mathematics*, Reverse mathematics 2001, (a cura di) S. G. Simpson, vol. 21 of Lecture Notes in Logic, La Jolla, CA, 2005. Assoc. Symbol. Logic, pp. 349–351.

[140] G. Shafer, *From Cournot's Principle to Market Efficiency*, http://www.probabilityandfinance.com/articles/15.pdf, 2006.

[141] S. Shapiro , *Incompleteness, mechanism, and optimism*, Bulletin of Symbolic Logic, vol. 4, n.3, 1998, pp. 273-302.

[142] A. Shimony, *Coherent and the Axioms of Confirmation*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, No. 1, 1955, pp. 1-28.

[143] H. J. Skala, *Non-Archimedean Utility Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland/Boston-U.S.A., 1975.

[144] R. I. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees.* Perspectives in Mathematical Logic, Omega Series, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.

[145] R. C. Stalnaker, Probability and Conditionals, *Philosophy of Science*, Philosophy of Science 37, 1970, pp. 64-80.

[146] P. Suppes, S. Feferman e L. Barwise, *Commemorative meeting for Alfred Tarski*, in A Century of Mathematics in America, vol. III, American Mathematical Society (a cura. di) P. Duren, Providence R.I., 1989, pp. 393-403.

[147] R.S. Sutton e A. G. Barto, *An Introduction to Reinforcement Learning*, MIT Press, 1998.

[148] Nassim Nicholas Taleb, *Il cigno nero. Come l'improbabile governa la nostra vita*, Il Saggiatore, 2008.

[149] A. Tarski, *On some fundamental concepts of metamathematics*, 1931, in *Logic, semantics, metamathematics, papers from 1923 to 1938* (a cura di) J. H. Woodger, Clarendon Press, 1956.

[150] R.M. Thrall, *Applications of multidimensional utility theory*, in Decision Processes (a cura di) Thrall, R.M., Coombs, C.H., John Wiley and Sons, New York, NY, 1954, pp. 181-186.

[151] A. M. Turing, *Lecture to London Mathematical Society,* Febbraio 20, 1947, Turing Digital Archive.

[152] A. M. Turing, *Intelligent machinery, a heretical theory*, Philosophia Mathematica, series III, vol. 4, n.3, 1951, pp. 256-260.

[153] A. Ursini, *A sequence of theories for arithmetic whose union is complete*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. 57, 1977, pp. 75-92.

[154] A. Ursini, *On the set of Meaningful sentences of arithmetic*, in Studia Logica, Vol. 37, n. 3, 1978, pp. 237-241.

[155] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press, 1944.

[156] W. H. Tang, Regularity Reformulated, *Episteme* Volume 9, Issue 04, 2012, pp. 329-343.

[157] S. Wenmackers, *Philosophy of Probability. Foundation, Epitemology, and Computation*, http://www.sylviawenmackers.be/documents/SWenmackers\PhDThesis2011.pdf.